1601 Formale Grundlagen der Informatik

Lösungsvorschläge zur Nachklausur

Aufgabe 1: *7 Punkte*

Menge	Kardinalität
$A \cup B$	5
$A \cup (A \cap B)$	4
$\mathcal{P}(A \setminus \{b, 3\})$	8
$\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, \{b, 3\}\}$	15
$(A \cup B) \times (B \cap A)$	10
$(A \times B) \cap (B \times A)$	4
$(A \times B) \setminus \{(1, 1)\}$	11

$|A \cup B| = |\{a, b, 2, 1, 3\}| = 5.$

$|A \cup (A \cap B)| = |A| = 4.$

$|\mathcal{P}(A \setminus \{b, 3\})| = 2^{|A \setminus \{b,3\}|} = 2^3 = 8,$
da $|A \setminus \{b, 3\}| = |\{a, 2, 1\}| = 3$

$|\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, \{b, 3\}\}| = |\mathcal{P}(A)| - 1 = 2^4 - 1 = 15,$
da $\{b, 3\} \not\subseteq A$, also $\{b, 3\} \notin \mathcal{P}(A)$.

$|(A \cup B) \times (B \cap A)| = |A \cup B| \cdot |B \cap A| = 5 \cdot 2 = 10,$
da $|A \cap B| = |\{b, 1\}| = 2.$

$|(A \times B) \cap (B \times A)| = |(A \cap B) \times (B \cap A)| = 2 \cdot 2 = 4,$
denn $(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in B \times A \leftrightarrow$
$x \in A \wedge y \in B \wedge x \in B \wedge y \in A \leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in B \cap A \leftrightarrow$
$(x, y) \in (A \cap B) \times (B \cap A)$.

$|(A \times B) \setminus \{(1, 1)\}| = |A \times B| - 1 = 11,$
da $(1, 1) \in A \times B$.

Aufgabe 3: *8 Punkte*

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein
injektiv		X	X			X		X
surjektiv		X		X	X			X

f_1 ist *nicht* injektiv, denn $f_1(0, n) = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

f_1 ist *nicht* surjektiv, da z.B. $(m \cdot n, m) \neq (1, 2)$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

f_2 ist injektiv, denn wenn $(m_1 + n_1^2, m_1) = (m_2 + n_2^2, m_2)$, dann $m_1 = m_2$, also $n_1^2 = n_2^2$ und somit $n_1 = n_2$, für alle $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$.

f_2 ist *nicht* surjektiv, da z.B. $(m + n^2, m) \neq (0, 1)$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

f_3 ist *nicht* injektiv, da z.B. $f_3(1, 0) = f_3(0, 1)$.

f_3 ist surjektiv, da $f_3(m, 0) = m$, für alle $m \in \mathbb{N}$.

f_4 ist *nicht* injektiv, denn $f_4(m, n) = f_4(n, m)$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

f_4 ist *nicht* surjektiv, denn z.B. $f_4(m, n) \neq 2$, da $(m + n) \cdot (m + n + 1) \neq 4$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: *12 Punkte*

Es reichen 6 Schritte. (Die Spalte „Anw." wird nicht bewertet.)

Schritt	Formel	Theo.	Anw.
	$((\neg G \vee K) \wedge (K \rightarrow H)) \rightarrow (G \rightarrow H)$	1	3
1	$\neg((\neg G \vee K) \wedge (\neg K \vee H)) \vee (\neg G \vee H)$	6	1
2	$\neg(\neg G \vee K) \vee \neg(\neg K \vee H) \vee (\neg G \vee H)$	7	2
3	$(\neg(\neg G) \wedge \neg K) \vee (\neg(\neg K) \wedge \neg H) \vee (\neg G \vee H)$	8	2
4	$(G \wedge \neg K) \vee (K \wedge \neg H) \vee (\neg G \vee H)$	3	2
5	$\neg G \vee (G \wedge \neg K) \vee H \vee (K \wedge \neg H)$	2	1
6			
7			
8	$\neg G \vee (G \wedge \neg K) \vee H \vee (\neg H \wedge K)$	–	–

Aufgabe 7: *9 Punkte*

a) Ausgangsformel: $(D \rightarrow E) \vee G$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$G \vee (\neg E \rightarrow \neg D)$	X	
$D \wedge E \wedge G$		X
$\neg D \vee E \vee \neg(\neg G)$	X	

b) Ausgangsformel: $\neg(D \leftrightarrow E) \vee (G \wedge D \wedge E)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$(D \wedge E \wedge G) \vee (\neg D \leftrightarrow \neg E)$		X
$((E \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg E)) \vee (D \wedge G \wedge E)$	X	
$\neg(E \leftrightarrow D) \vee (G \wedge (D \leftrightarrow E))$		X

c) Ausgangsformel: $(A \wedge \neg B) \wedge (B \vee \neg A)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$A \wedge \neg B \wedge (B \rightarrow A)$		X
$(A \wedge B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (\neg A \rightarrow B)$		X
$C \wedge (A \vee B) \wedge \neg C$	X	

Aufgabe 9: *10 Punkte*

PL1-Formel über Σ und V ?	ja	nein
$Neun(Eins \wedge Null \wedge Acht)$		X
$\forall x \wedge y\ (\exists z\ (R(x,y,z) \leftrightarrow R(y,x,z)))$		X
$\neg\forall x\ \forall z\ (Q(x,y) \vee P(z)) \wedge \forall y\ Q(z,y)$		X
$\exists x\ (\forall y\ \neg(\neg Primzahl(y) \vee \exists x\ \forall z\ Primzahl(x)))$	X	
$\neg\forall x\ \forall y\ \exists P\ (R(x,y,y) \rightarrow P(x)) \vee (R(y,y,x) \rightarrow P(y))$		X
$\forall x\ (x > Eins \wedge x < Acht \rightarrow Primzahl(x))$	X	
$\forall x\ \forall y\ (R(x,y,x) \rightarrow \forall x\ R(y,y,z))$	X	
$\forall n\ (Vier > Vier - Eins)$		X
$\forall x\ \forall y\ (Integer(x) \wedge Integer(y)) \rightarrow Primzahl((x * y) + Neun))$		X
$\forall Kokos\ \exists\ Nuss(Kokos) \vee \exists Milch(Kokos)$		X

Aufgabe 11: *6 Punkte*

	ja	nein
F		
$\equiv \forall x\ (\neg \forall y\ (P(y,x) \wedge \exists z\ (R(y,x))))$		
Ist die Variable y in einer Teilformel von F gebunden?	X	
Wird das Symbol R in Infixnotation verwendet?		X
$\equiv \forall x\ (\exists y\ \neg(P(y,x) \wedge \exists z\ (R(y,x))))$		
Ist die Variable z in einer Teilformel von F gebunden?	X	
Ist die Formel geschlossen?	X	
$\equiv \forall x\ (\exists y\ (\neg P(y,x) \vee \neg \exists z\ (R(y,x))))$		
Wurde das De Morgansche Gesetz für die Konjunktion angewendet?	X	
Ist $\neg P(y,x)$ ein Literal?	X	
$\equiv \forall x\ (\exists y\ (\neg P(y,x) \vee \forall z\ \neg(R(y,x))))$		
Wurde das Th. für Distributivität für die Disjunktion angewendet?		X
Wurde das Th. für Distributivität für die Konjunktion angewendet?		X
$\equiv \forall x\ (\exists y\ (\forall z\ \neg P(y,x) \vee \neg(R(y,x))))$		
Wurde der Satz vom ausgeschlossenen Dritten angewendet?		X
Ist eine Teilformel der Formel quantorenfrei?	X	
$\equiv \forall x\ \exists y\ \forall z\ \neg P(y,x) \vee \neg R(y,x)$		
Ist der Kern der Pränexform in KNF?	X	
Ist der Kern der Pränexform in DNF?	X	

Aufgabe 2: *10 Punkte*

	R_1		R_2	
	ja	nein	ja	nein
reflexiv		X		X
konnex		X	X	
antisymmetrisch		X	X	
transitiv		X	X	
invertierbar		X		X

R_1 ist *nicht* reflexiv, da z.B. $(a, a) \notin R_1$.

R_1 ist *nicht* konnex, da $(a, c), (c, a) \notin R_1$.

R_1 ist *nicht* antisymmetrisch, da z.B. $(a, b), (b, a) \in R_1$, aber $a \neq b$.

R_1 ist *nicht* transitiv, da $(a, b), (b, c) \in R_1$, aber $(a, c) \notin R_1$.

R_1 ist *nicht* invertierbar; denn wäre R_1 invertierbar, dann würde gemäß Kurseinheit 1, Satz 1.37 gelten, dass $R_1 \circ R_1^T = I$; aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R_2 ist *nicht* reflexiv, da z.B. $(b, b) \notin R_2$.

R_2 ist konnex, da $(b, a), (c, a), (b, c) \in R_2$.

R_2 ist antisymmetrisch, denn $(x, y), (y, x) \in R_2 \rightarrow x = y = a \vee x = y = c$.

R_2 ist transitiv, da $(b, c), (c, a), (b, a) \in R_2$, etc.

R_2 ist *nicht* invertierbar, da

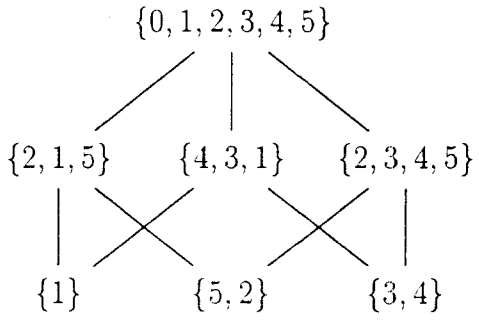
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: *8 Punkte*

Halbordnung	M_1	M_2	M_3	M_4
Infimum	0	—	$\emptyset$	—
Supremum	—	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	—

M_1: Das Infimum von $\mathbb{N} \setminus \{1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1\}$ ist 0; ein Supremum existiert nicht.

M_2: Zugehöriges Hasse-Diagramm:



M_3: Für jede Menge M hat $\mathcal{P}(M)$ das Infimum $\emptyset$ und das Supremum M.

M_4: Für alle $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt: $(n_1 + 1, n_2) < (n_1, n_2) < (n_1, n_2 + 1)$ (wobei $(m_1, m_2) < (n_1, n_2)$ gdw. $(m_1, m_2) \leq (n_1, n_2)$ und $(m_1, m_2) \neq (n_1, n_2)$).

Aufgabe 6: *12 Punkte*

Formel F	F allgemeingültig		F erfüllbar		F inkonsistent		F in DNF oder KNF		Zahl der
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	Mod.
$((B \wedge \neg A) \rightarrow A) \vee (\neg A \wedge B)$	X		X			X		X	4
$(D \wedge E) \vee (\neg E \wedge D \wedge K) \vee \neg K$		X	X			X	X		6
$\neg((\neg B \vee A) \rightarrow \neg(B \wedge \neg A)) \rightarrow C$	X		X			X		X	8
$(D \leftrightarrow C) \vee (\neg C \leftrightarrow \neg D) \vee (C \wedge D)$		X	X			X		X	2

Lösung zum Beispiel mit Wahrheitswertetafeln

A	B	$B \wedge \neg A$	$\neg(B \wedge \neg A)$	$\neg(B \wedge \neg A) \vee A$	$\neg A \wedge B$	$((B \wedge \neg A) \rightarrow A) \vee (\neg A \wedge B)$
T	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T

D	E	K	$D \wedge E$	$\neg E \wedge D \wedge K$	$\neg K$	$(D \wedge E) \vee (\neg E \wedge D \wedge K) \vee \neg K$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	F	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	T	T

A	B	C	$\neg B \vee A, \neg(B \wedge \neg A)$	$(\neg B \vee A) \rightarrow \neg(B \wedge \neg A)$	$\neg((\neg B \vee A) \rightarrow \neg(B \wedge \neg A)) \rightarrow C$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

C	D	$D \leftrightarrow C$	$\neg C \leftrightarrow \neg D$	$C \wedge D$	$(D \leftrightarrow C) \vee (\neg C \leftrightarrow \neg D) \vee (C \wedge D)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T

Aufgabe 8: *8 Punkte*

A:	T	T	F	F	j
B:	T	F	T	F	
	T	T	F	T	5
	T	F	T	F	11
	T	F	F	F	15
	T	T	T	F	9
	T	T	T	T	1
	F	F	F	T	8
	F	T	T	F	10
	F	T	F	T	6

ıufgabe 10: *10 Punkte*

Allgemeingültig?	ja	nein
$\neg\exists x\ F \leftrightarrow \neg\forall x\ F$		X
$\forall x\ \exists y\ F \leftrightarrow \exists y\ \forall x\ F$		X
$\neg\exists x\ \neg F \leftrightarrow \forall x\ F$	X	
$\neg\exists x\ F \leftrightarrow \neg\forall x\ \neg F$		X
$\forall x\ (F \wedge G) \leftrightarrow \forall x\ F \vee \forall x\ G$		X
$\exists x\ F \leftrightarrow \neg\forall x\ \neg F$	X	
$\forall y\ \forall x\ F \leftrightarrow \forall x\ \forall y\ F$	X	
$\forall x\ (F \vee G) \leftrightarrow \forall x\ F \vee \forall x G$		X
$\exists x\ \neg F \leftrightarrow \forall x\ \neg F$		X
$\exists x\ (F \wedge G) \leftrightarrow (\exists x\ F) \wedge (\exists x\ G)$		X