FernUniversität
-Gesamthochschule- in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität D - 58084 Hagen

Name, Vorname

Straße, Nr.

PLZ, Wohnort

FERNUNIVERSITÄT
- Gesamthochschule -
EINGANG

INF

Bitte zurück an:
FERNUNIVERSITÄT
Gesamthochschule
D-58084 Hagen

Fachbereich Informatik

Kurs: 1601: "FORMALE GRUNDLAGEN DER INFORMATIK"

NACHKLAUSUR AM 20. MÄRZ 2004

Klausurort:

- ☐ Berlin
- ☐ Bochum
- ☐ Frankfurt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ Kassel
- ☐ Düsseldorf
- ☐ München
- ☐ Bregenz
- ☐ Wien
- ☐ .....

Status:

- ☐ Vollzeitstudent
- ☐ Teilzeitstudent
- ☐ Zweithörer
- ☐ Gasthörer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
erreichbare Punkte	20	21	12	20	15	12					100
bearbeitet (×)											
erreichte Punktzahl											

Datum: _____ Korrektur: _____

Hinweise zur Bearbeitung der Klausur zum Kurs 1601 "Formale Grundlagen der Informatik"

Wir begrüßen Sie zur Klausur zum Kurs 1601 "Formale Grundlagen der Informatik". Bitte lesen Sie sich diese Hinweise vollständig und aufmerksam durch, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen:

1. Prüfen Sie bitte die Vollständigkeit Ihrer Unterlagen. Die Klausur umfaßt:
   - 2 Deckblätter,
   - diese Hinweise zur Bearbeitung,
   - 1 Formblatt für eine Bescheinigung für das Finanzamt,
   - 6 Aufgaben.
2. Bitte füllen Sie, bevor Sie mit der Bearbeitung der Klausuraufgaben beginnen, die folgenden Teile der Klausur aus:
   a. BEIDE Deckblätter mit Name, Anschrift sowie Matrikelnummer. Markieren Sie vor der Abgabe auf beiden Deckblättern die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben.
   b. Falls Sie eine Teilnahmebescheinigung für das Finanzamt wünschen, füllen Sie bitte das entsprechende Formblatt aus.

   Nur wenn Sie beide Deckblätter vollständig ausgefüllt haben, können wir Ihre Klausur korrigieren!
3. Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter oder die beigefügten Leerblätter.
4. Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug (Füller oder Kugelschreiber) und Konzeptpapier zugelassen.
5. Bitte beachten Sie, daß Sie die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge bearbeiten können. Unsere Empfehlung: Konzentrieren Sie sich zunächst auf die Aufgaben, bei denen Sie sich sicher fühlen.
6. Zum Bestehen der Klausur müssen Sie 50 Punkte erzielen.

Wir wünschen Ihnen bei der Bearbeitung der Klausur viel Erfolg!

Aufgabe 1 Mengen, Prädikatenlogik (20 Punkte)

Lesen Sie den folgenden Informationskasten zum Thema "Katzen":

> Zu den Landraubtieren gehören die Katzen. Sie unterteilen sich in die *Eigentlichen Katzen* und die Geparden. Die *Eigentlichen Katzen* teilen sich auf in Großkatzen und Kleinkatzen. Großkatzen können brüllen und nur beim Ausatmen schnurren. Kleinkatzen können nicht brüllen, jedoch sowohl beim Ein- als auch beim Ausatmen schnurren. Zu den Kleinkatzen gehört unter anderem die Wildkatze.

Wir definieren die folgenden Mengen:

L	:=	Landraubtiere	K	:=	Katzen	E	:=	Eigentliche Katzen
G	:=	Geparden	GK	:=	Großkatzen	KK	:=	Kleinkatzen
W	:=	Wildkatzen	B	:=	Tiere, die brüllen können			

AS := Tiere, die beim Ausatmen schnurren können
ES := Tiere, die beim Einatmen schnurren können

Leon ist ein Löwe (Großkatze) und Violetta eine Wildkatze.

Teil 1 (8 Pkt.):
Welche Beziehung(en) bestehen gemäß Infokasten zwischen den folgenden Mengenpaaren
(/ = "es besteht keine Beziehung"; vgl. Muster? Markieren Sie diese durch Ankreuzen.

		$=$	$\subseteq$	$\supseteq$	$\in$	/	
(1)	$\{Leon\}$						K
(2)	$E \cup G$						L
(3)	$AS \cap ES$						KK
(4)	$AS \cup ES$						G
(5)	$G \cap GK$						E
(6)	$\{W\}$						K
(7)	$\{Leon, Violetta\}$						$\mathcal{P}(L)$
(8)	$\{\{Leon\}, \{Violetta\}\}$						$\mathcal{P}(K)$

Muster:

	$=$	$\subseteq$	$\supseteq$	$\in$	/	
KK		×				E

Die Kleinkatzen gehören zu den Eigentlichen Katzen, daher gilt $KK \subseteq E$.

Teil 2 (4 Pkt.):
Drücken Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen über Katzen in der *Mengensprache* unter Verwendung der oben definierten Mengen aus!

Muster:
Es gibt keine Katze, die zugleich Großkatze und Kleinkatze ist.

$$GK \cap KK = \emptyset$$

1. Wildkatzen sind Kleinkatzen, (aber) es gibt (auch) Kleinkatzen, die keine Wildkatzen sind.

2. Katzen, die beim Einatmen schnurren können, sind keine Großkatzen.

3. Es gibt Landraubtiere, die nicht brüllen können und die beim Ausatmen nicht schnurren können.

4. Tiere, die keine Landraubtiere sind, sind auch keine Großkatzen.

Teil 3 (8 Pkt.):
Drücken Sie nun dieselben Sätze in der Sprache der *Prädikatenlogik* aus. Verwenden Sie als einstellige Prädikatensymbole die oben angegebenen Mengensymbole, also beispielsweise das einstellige Prädikat L, das auf x zutrifft, wenn x ein Landraubtier ist.

Muster:
Es gibt keine Katze, die zugleich Großkatze und Kleinkatze ist.

$$\neg\exists x\ GK(x) \wedge KK(x)$$

1. Wildkatzen sind Kleinkatzen, (aber) es gibt (auch) Kleinkatzen, die keine Wildkatzen sind.

2. Katzen, die beim Einatmen schnurren können, sind keine Großkatzen.

3. Es gibt Landraubtiere, die nicht brüllen können und die beim Ausatmen nicht schnurren können.

4. Tiere, die keine Landraubtiere sind, sind auch keine Großkatzen.

Aufgabe 2 Relationen, Prädikatenlogik (21 Punkte)

$A = \{a_1, \ldots, a_5\}$ sei eine Menge von Firmen, die Verträge über die folgenden Zulieferungen abgeschlossen haben: a_1 soll Teile an a_3 und a_5 liefern, a_3 liefert Teile an a_5; a_4 liefert an a_2. Mehr Zulieferungsverträge bestehen nicht. Wir betrachten nur direkte Lieferungen: Bekommt ein Unternehmen Teile von einem Unternehmen X und liefert seinerseits Teile an Y, so begründet dies keinen Lieferantenvertrag zwischen X und Y.

Teil 1 (3 Pkt.):
Stellen Sie die zweistellige Relation Z ("liefert Teile an") auf A:

$$x\ Zy :\Leftrightarrow x \text{ liefert (lt. Vertrag) Teile an } y$$

graphisch dar.

Teil 2 (3 Pkt.):
Wenn Unternehmen a_i an das Unternehmen a_j liefert oder umgekehrt a_j an a_i, dann besteht zwischen beiden eine Abhängigkeit. Abhängigkeit pflanzt sich fort: Sind a_i und a_j voneinander abhängig und a_j und a_k ebenfalls voneinander abhängig, dann gilt dies auch von a_i und a_k. Stellen Sie die so erklärte Relation $H \subseteq A \times A$ (unter Berücksichtigung der oben erklärten Zulieferungsrelation Z) in einer Matrix dar.

Teil 3 (5 Pkt.):
Welche Eigenschaften haben die Relationen Z und H?

	transitiv ja/nein	symmetrisch ja/nein	reflexiv ja/nein	konnex ja/nein	homogen ja/nein
Z					
H					

Teil 4 (4 Pkt.):
Formulieren Sie eine prädikatenlogische Formel, die den folgenden Sachverhalt zum Ausdruck bringt:

> *Wenn eine Firma Lieferschwierigkeiten hat und an ein anderes Unternehmen vertragsgemäß Teile liefern soll, hat*[1] *auch dieses Unternehmen Lieferschwierigkeiten.*

Verwenden Sie ausschließlich das zweistellige Prädikatensymbol Z für "zuliefern" (siehe oben) und das einstellige Prädikatensymbol S für "Lieferschwierigkeiten haben".

Teil 5 (6 Pkt.):
Beweisen Sie mit Mitteln der Prädikatenlogik, dass das Unternehmen a_5 Lieferschwierigkeiten bekommt, wenn das Unternehmen a_1 welche hat, d.h., setzen Sie die Formel $S(a_1)$ sowie die oben beschriebene Relation Z als gültig voraus und leiten Sie mit Hilfe der Formel aus Teil 4 die Formel $S(a_5)$ ab.

[1] Genauer müsste es "bekommt" heißen, aber den zeitlichen Aspekt betrachten wir hier nicht.

Aufgabe 3 Ordnungen und Verbände (12 Punkte)

Teil 1 (2 Pkt.):
Auf $\mathbb{N}$ ist $\mid$ eine Halbordnung ($x \mid y$ entspricht "*x ist Teiler von y*"). Ist $(\mathbb{N}, \mid)$ auch ein Verband? Wenn nein, warum nicht, wenn ja: Wie werden Supremum und Infimum gebildet?

Teil 2 (2 Pkt.):
Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer beliebigen Menge M ist durch die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ eine Halbordnung erklärt, die $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ zu einem Verband macht. Wie werden Supremum und Infimum in diesem Verband gebildet?

Teil 3 (5 Pkt.):
Sei $V := (M, \subseteq)$ ein Verband und M sei eine Teilmenge von M.

$V' := (M', \subseteq)$ heißt *Unterverband* von V, wenn gilt: Sind a und b in M', dann sind auch $sup(a, b)$ und $inf(a, b)$ in M'. V' benutzt also dieselbe Ordnung wie V und ist unter Supremumu- und Infimumbildung abgeschlossen.

Sei nun M eine beliebige Menge, $a, b \in M$ und $V := (\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathcal{P}(M)$. Für welche Teilmengen U von $\mathcal{P}(M)$ ist $V' := (U, \subseteq)$ Unterverband von $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$? Für die Fälle, in denen V' Ihrer Meinung nach *kein* Unterverband ist, geben Sie eine Begründung an.

		Unterverband	kein Unterverband
(1)	$U := \{\emptyset, M, \{a\}, \overline{\{a\}}\}$		
(2)	$U := \{A \subseteq M \mid a \in A\}$		
(3)	$U := \{A \subseteq M \mid \mid A \mid \leq 2\}$		
(4)	$U := \{A \mid a \in A \text{ oder } b \in A\}$		
(5)	$U := \{A \mid a \notin A \text{ und } b \notin A\}$		

Begründungen:

Teil 4 (3 Pkt.):
Sei nun $\mathcal{F}$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln. Betrachten Sie die Relation $\models$ auf $\mathcal{F}$.

Ist $\models$ antisymmetrisch (mit Begründung)?

Aufgabe 4 Aussagenlogik (20 Punkte)

Teil 1 (10 Pkt.):
Beurteilen Sie die Aussagen (jeweils bezogen auf Aussagenlogik) in der folgenden Tabelle:

Ist es möglich, ...

A ... dass eine Formel zugleich tautologisch und unerfüllbar ist?

B ... dass eine Formel zugleich in disjunktiver und in konjunktiver Normalform ist?

C ... eine beliebige Formel äquivalent in eine Formel umzuformen, die nur den Junktor | ("NAND") enthält?

D ... eine Wahrheitstafel zu einer unerfüllbaren Formel aufzustellen?

E ... dass eine Belegung einer Formel diese zugleich falsifiziert und verifiziert?

F ... dass eine Formel mehrere äquivalente, verschieden lange disjunktive Normalformen hat?

G ... dass eine Formel mehr Aussagenvariablen als Belegungen hat?

H ... dass die Anzahl der Modelle einer Formel ungerade ist?

I ... zu jeder beliebigen Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel aufzustellen, deren Werteverlauf dieser Wahrheitstafel entspricht?

J ... eine erfüllbare Formel äquivalent umzuformen in eine unerfüllbare Formel?

	ja	nein
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		
J		

Teil 2 (5 Pkt.):
Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln entsprechen der Vorschrift "Sie dürfen die Klausur nur dann mitschreiben (M), wenn Sie sich angemeldet haben (A)."

	entspricht	entspricht nicht
$M \rightarrow A$		
$A \rightarrow M$		
$\neg A \rightarrow \neg M$		
$\neg M \rightarrow \neg A$		
$A \leftrightarrow M$		

Teil 3 (5 Pkt.):
Welche der folgenden Formeln entsprechen der Regel "Sie schreiben die Nachklausur (N) nur dann mit, wenn Sie die Hauptklausur (H) geschrieben, aber nicht bestanden ($\neg B$) haben oder die Hauptklausur nicht mitgeschrieben haben".

	entspricht	entspricht nicht
$(H \wedge B) \vee (H \wedge N) \vee N$		
$(H \wedge \neg B) \vee \neg H \rightarrow N$		
$(H \vee \neg H) \wedge (\neg B \vee \neg H)$		
$\neg B \vee \neg H \vee N$		
$N \rightarrow ((H \wedge \neg B) \vee \neg H)$		

Aufgabe 5 Aussagenlogik (15 Punkte)

Teil 1 (4 Pkt.):
Sei $T(G)$ der $\wedge - \vee - \neg$ - Syntaxbaum[2] einer aussagenlogischen Formel G. Dabei seien alle Blätter nicht-negiert und verschieden, d.h., es gibt beispielsweise keine zwei Äste, die beide mit dem Literal A markiert sind. Welchen Schluss auf die Formel G lässt die Darstellung $T(G)$ zu?

	ja	nein
G ist erfüllbar		
G ist nicht erfüllbar		
G ist tautologisch		
G ist erfüllbar und falsifizierbar		

Teil 2 (4 Pkt.):
Eine Formel in konjunktiver Normalform besteht aus der Konjunktion von Disjunkten. Eine Formel G enthalte n Aussagenvariablen ($n > 0$), 2^n verschiedene Disjunkte und jede Aussagenvariable komme in jedem Disjunkt genau einmal (in negierter oder nicht-negierter Form) vor. Welchen Schluss können Sie auf die Formel G ziehen?

	ja	nein
G ist erfüllbar		
G ist nicht erfüllbar		
G ist tautologisch		
G ist erfüllbar und falsifizierbar		

[2] "leere" Syntaxbäume betrachten wir hier nicht

Teil 3 (4 Pkt.):
Was gilt im dualen Fall, d.h., eine Formel ist in disjunktiver Normalform, enthalte 2^n verschiedene Konjunkte ($n > 0$), und jede Aussagenvariable komme in jedem Konjunkt genau einmal in negierter oder nicht-negierter Form vor?

	ja	nein
G ist erfüllbar		
G ist nicht erfüllbar		
G ist tautologisch		
G ist erfüllbar und falsifizierbar		

Teil 4 (3 Pkt.):
Sei T der $\wedge - \vee - \neg$ - Syntaxbaum einer aussagenlogischen Formel und es gelten die folgenden Bedingungen:

1. Für alle Pfade $(X_1, \ldots, X_n)$ in T gelte

$$X_i = \vee \Rightarrow X_j \in \{\neg, \vee\} \text{ für alle } j > i.$$

2. Ist $X_i = \neg$ und $(X_i, Xi + 1)$ ein Weg in T, dann ist X_{i+1} ein Blatt, d.h., es gibt keinen Pfad (X_{i+1}, Y) in T. (X_{i+1} ist also eine Aussagenvariable.)

Welche besondere Darstellung einer aussagenlogischen Formel wird durch diese Bedingungen beschrieben?

Aufgabe 6 Prädikatenlogik (12 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $\Sigma = (\{f/1, a\}, \{P/1, Q/2\})$

Wir betrachten die Trägermenge $U_I := \{1, 2\}$ und versuchen, Modelle I zu Formeln anzugeben, deren Universum gerade U_I ist.

Wie müssen a, f, P und Q interpretiert werden (vgl. Muster), damit $I := (U_I, \{a_I, f_I\}, \{P_I, Q_I\})$ Modell der im Folgenden angegebenen Formeln ist?

Muster:

$F_0 := \forall x\ (P(x) \vee Q(x, f(x))) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(f(a), f(f(a)))$

(1)	F_0 hat kein Modell	
(2)	F_0 hat ein Modell, aber nicht mit dem Universum $\{1, 2\}$	
(3)	F_0 hat ein Modell mit Universum $\{1, 2\}$	$\times$

Falls (3) zutrifft:

$a_I := 1$	$f_I(1) := 2$ $f_I(2) := 2$	$P_I := \{2\}$	$Q_I := \{(1, 2)\}$

Es gilt $I \models F_0$, da in I die Formeln $P(1) \vee Q(1, 2)$, $P(2) \vee Q(2, 2)$, $\neg P(1)$ und $\neg Q(2, 2)$ wahr sind.

Teil 1 (3 Pkt.):
$F_1 := (\neg \exists x\ P(x)) \wedge (\forall x\ P(x) \rightarrow \neg P(f(x))) \wedge (\exists x \exists y\ Q(x, y))$

(1)	F_1 hat kein Modell	
(2)	F_1 hat ein Modell, aber nicht mit dem Universum $\{1, 2\}$	
(3)	F_1 hat ein Modell mit Universum $\{1, 2\}$	

Falls (3) zutrifft:

$a_I :=$	$f_I(1) :=$ $f_I(2) :=$	$P_I :=$	$Q_I :=$

Teil 2 (3 Pkt.):
$F_2 := (\exists x\ \neg P(x) \wedge \neg P(f(x))) \wedge (\forall x(P(x) \vee P(f(f(x))))$

(1)	F_2 hat kein Modell	
(2)	F_2 hat ein Modell, aber nicht mit dem Universum $\{1, 2\}$	
(3)	F_2 hat ein Modell mit Universum $\{1, 2\}$	

Falls (3) zutrifft:

$a_I :=$	$f_I(1) :=$ $f_I(2) :=$	$P_I :=$	$Q_I :=$

Teil 3 (3 Pkt.):
$F_3 := (\forall x(\exists y\ Q(x, y)) \rightarrow \neg P(x)) \wedge (P(a) \wedge Q(a, f(a)))$

(1)	F_3 hat kein Modell	
(2)	F_3 hat ein Modell, aber nicht mit dem Universum $\{1, 2\}$	
(3)	F_3 hat ein Modell mit Universum $\{1, 2\}$	

Falls (3) zutrifft:

$a_I :=$	$f_I(1) :=$ $f_I(2) :=$	$P_I :=$	$Q_I :=$

Teil 4 (3 Pkt.):
$F_4 := (\forall x\ (P(x) \vee Q(x,x))) \wedge (\exists x\ \neg Q(x,x)) \wedge P(a) \wedge (\neg P(f(a)))$

(1)	F_4 hat kein Modell	
(2)	F_4 hat ein Modell, aber nicht mit dem Universum $\{1,2\}$	
(3)	F_4 hat ein Modell mit Universum $\{1,2\}$	

Falls (3) zutrifft:

$a_I :=$	$f_I(1) :=$ $f_I(2) :=$	$P_I :=$	$Q_I :=$