Kurs 1653 — Einführung in die Theoretische Informatik A

Lösungsvorschläge zu der Klausur am 9. Februar 2002

Aufgabe 1

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen durch vollständige Induktion über t, dass für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} r(n, 2^t) = 0 \quad \Rightarrow \quad & \mathrm{ES}^{4t}(1, (0, n, 0, 0, 0, \dots)) \\ & = (1, (t, n/2^t, 0, 0, 0, \dots)) \,. \end{aligned}$$

"$t = 0$": Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{4t}(1, (0, n, 0, 0, 0, \dots)) &= \mathrm{ES}^{4\cdot 0}(1, (0, n, 0, 0, 0, \dots)) \\ &= (1, (0, n, 0, 0, 0, \dots)) \\ &= (1, (t, n/2^t, 0, 0, 0, \dots)). \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichung wegen $2^t = 2^0 = 1$.

"$t \to t+1$": Wir müssen aus der Annahme, dass die Induktionsbehauptung für t gilt, die Gültigkeit dieser Behauptung für $t+1$ nachweisen. Wenn $r(n, 2^{t+1}) \neq 0$ ist, dann ist nichts weiter zu zeigen. Wir betrachten daher den Fall $r(n, 2^{t+1}) = 0$. Dann ist auch $r(n, 2^t) = 0$. Wir erhalten aus der Induktionsannahme also

$$\mathrm{ES}^{4t}(1, (0, n, 0, 0, 0, \dots)) = (1, (t, n/2^t, 0, 0, 0, \dots)) \,.$$

Außerdem folgt aus $r(n, 2^{t+1}) = 0$, dass $n/2^t$ eine natürliche Zahl ist, die bei Division durch 2 Rest 0 ergibt, d.h. $r(n/2^t, 2) = 0$. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{4(t+1)}(1, (0, n, 0, 0, 0, \dots)) &= \mathrm{ES}^4\Big(\mathrm{ES}^{4t}(1, (0, n, 0, 0, 0, \dots))\Big) \\ &= \mathrm{ES}^4(1, (t, n/2^t, 0, 0, 0, \dots)) \\ &= \mathrm{ES}^3(2, (t, n/2^t, 0, 0, 0, \dots)) \\ &= \mathrm{ES}^2(3, (t, n/2^t, 0, 0, 0, \dots)) \\ &= \mathrm{ES}(4, (t+1, n/2^t, 0, 0, 0, \dots)) \\ &= (1, (t+1, n/2^{t+1}, 0, 0, 0, \dots)). \end{aligned}$$

Das ist die zu beweisende Behauptung für $t+1$. Somit gelingt der Induktionsschluss.

(b) Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f_M(n) = f(n)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $n = 0$. Dann gilt $r(n, 2^t) = r(0, 2^t) = 0$ für alle t, also nach (a)

$$\mathrm{ES}^{4t}(1, (0, 0, 0, 0, 0, \dots)) = (1, (t, 0, 0, 0, 0, \dots))$$

für alle $t \in \mathbb{N}$. Bei Eingabe 0 hört die Maschine M also nie auf zu rechnen. Daher ist $f_M(0) = \mathrm{div} = f(0)$.

2. Fall: $n > 0$. Dann ist $f(n)$ definiert. Sei $m := f(n)$. Dann gilt $r(n, 2^m) = 0$. Aus der in (a) bewiesenen Behauptung erhalten wir also

$$\mathrm{ES}^{4m}(1, (0, n, 0, 0, 0, \dots)) = (1, (m, n/2^m, 0, 0, 0, \dots)).$$

Andererseits ist $r(n, 2^{m+1}) \neq 0$. Wegen $r(n, 2^m) = 0$ ist $n/2^m$ daher eine natürliche Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist, d.h. $r(n/2^m, 2) \neq 0$, und daher $r(n/2^m, 2) = 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}^{4m+2}(1, \mathrm{EC}(n)) &= \mathrm{ES}^{4m+2}(1, (0, n, 0, 0, 0, \dots)) \\
&= \mathrm{ES}^{2}(1, (m, n/2^m, 0, 0, 0, \dots)) \\
&= \mathrm{ES}(2, (m, n/2^m, 1, 0, 0, \dots)) \\
&= (5, (m, n/2^m, 1, 0, 0, \dots)).
\end{aligned}$$

Also ist in diesem Fall $f_M(n) = m = f(n)$. Das war zu zeigen.

Aufgabe 2

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1, \quad \text{sowie} \\
f(y+1) &= 3^{y+1} = 3 \cdot 3^y = 3 \cdot f(y)
\end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{N}$. Die durch

$$h(y, z) := 3 \cdot z$$

für alle $y, z \in \mathbb{N}$ definierte Funktion $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist primitiv–rekursiv. Es gilt nämlich

$$h = \mathrm{Sub}(m, c_3^{(2)}, \mathrm{pr}_2^{(2)}),$$

und die Funktionen $\mathrm{pr}_2^{(2)}$, $c_3^{(2)}$ und m sind nach Definition 7.9 und Satz 7.10 primitiv–rekursiv. Wegen

$$f = \mathrm{Prk}(c_1^{(0)}, h)$$

ist auch f primitiv–rekursiv.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt

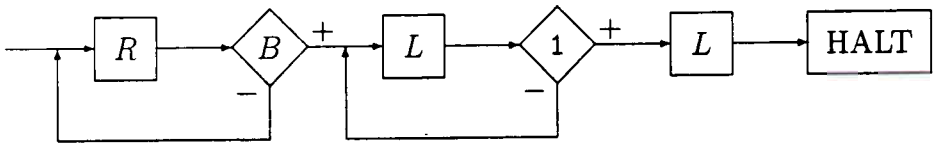
$$g(x,y) = (3^x)^y = 3^{x \cdot y} = f(x \cdot y) = f(m(x,y)) \,.$$

Also ist

$$g = \mathrm{Sub}(f, m) \,.$$

Daher ist auch g primitiv–rekursiv.

Aufgabe 3
Die Bandmaschine mit dem folgenden Flußdiagramm berechnet die Funktion g.



Nach Eingabe eines Wortes w geht der Kopf so lange nach rechts, bis er ein Blank B findet. Dann geht er so lange wieder nach links, bis er eine 1 findet. Wenn das Wort w keine 1 enthält, läuft er also immer weiter nach links, und die Maschine hält nie an. Wenn das Wort eine 1 enthält, und die Maschine die erste 1 von rechts gefunden hat, dann geht der Kopf noch einen Schritt weiter nach links neben die erste 1 von rechts. Dann hält die Maschine an. Wenn das Wort w auf 10^l endet, gibt die Maschine also gerade das Wort 10^l aus.

Aufgabe 4
Wir definieren eine Simulationsrelation $\mathrm{Sim} \subseteq \mathbb{N} \times \Sigma^*$ durch

$$n \,\mathrm{Sim}\, w \quad :\Longleftrightarrow \quad \nu_{Du}(w) = n \,.$$

Dabei sei $\nu_{Du} :\subseteq \Sigma^* \to \mathbb{N}$ die in Beispiel 10.1.6(1) definierte Dualnotation. Wir zeigen, dass die Funktion g die Funkion h bezüglich Sim simuliert, d.h. dass $h \,\mathrm{Sim}\, g$ gilt. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $w \in \Sigma^*$ mit $n \,\mathrm{Sim}\, w$. Das heißt, es gilt $w \in \mathrm{Def}(\nu_{Du})$ und $\nu_{Du}(w) = n$. Wir müssen die folgenden beiden Aussagen zeigen:

(1) $h(n)$ existiert genau dann, wenn $g(w)$ existiert.

(2) Wenn $h(n)$ existiert, dann gilt $h(n) \,\mathrm{Sim}\, g(w)$.

Zu (1): Für $n \in \mathbb{N}$ und $w \in \mathrm{Def}(\nu_{Du})$ mit $\nu_{Du}(w) = n$ gilt:

$$\begin{aligned} h(n) \text{ existiert} &\iff n \neq 0 \\ &\iff w \text{ enthält eine } 1 \\ &\iff g(w) \text{ existiert.} \end{aligned}$$

Zu (2): Wir nehmen an, dass $h(n)$ existiert. Wie wir gerade gesehen haben, ist dann $n \neq 0$, und w enthält mindestens eine 1. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $w = a_k \dots a_0$ mit $a_i \in \Sigma$ für $i = 0, \dots, k$. Dann gibt es eine Zahl $l \leq k$ mit $a_l = 1$ und mit $a_i = 0$ für $0 \leq i < l$. Wegen

$$n = \nu_{Du}(w) = \nu_{Du}(a_k \dots a_0) = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i = 2^l \cdot \left(1 + \sum_{i=l+1}^{k} a_i 2^{i-l}\right)$$

ist 2^l die maximale Zweierpotenz, die n teilt. Also ist $h(n) = l$. Außerdem ist $g(w) = 10^l$ und

$$\nu_{Du}(g(w)) = \nu_{Du}(10^l) = 2^l = h(n)\,.$$

Damit haben wir $h(n) \,\mathrm{Sim}\, g(w)$ gezeigt.

Anmerkung. Anstelle der in Beispiel 10.1.6(1) eingeführten Dualnotation, bei der führende Nullen erlaubt sind, verwendet man oft die formal wie folgt definierte binäre Notation $\nu_{bin} :\subseteq \Sigma^* \to \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ohne führende Nullen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Def}(\nu_{bin}) := \{0\} \cup \{1\}\Sigma^*\,, \\ &\nu_{bin}(a_k \dots a_0) := \nu_{Du}(a_k \dots a_0) = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_k \in \Sigma$ mit $a_k \dots a_0 \in \mathrm{Def}(\nu_{bin})$. In der Definition einer geeigneten Simulationsrelation $\mathrm{Sim} \subseteq \mathbb{N} \times \Sigma^*$ kann man anstelle von ν_{Du} ebensogut ν_{bin} verwenden. Der Beweis von $h \,\mathrm{Sim}\, g$ ist in dem Fall wörtlich gleich dem Beweis oben abgesehen davon, dass man überall ν_{Du} durch ν_{bin} ersetzen muss.

Aufgabe 5

(a) Wir definieren eine Funktion $h_1 :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$h_1(i, x) := u_\varphi(i, u_\varphi(x, i + x))$$

für alle $i, x \in \mathbb{N}$. Da die Funktion u_φ nach dem utm–Theorem berechenbar ist, ist die Funktion h_1 als Komposition berechenbarer Funktionen selbst berechenbar. Nach dem smn–Theorem gibt es eine Funktion $r \in R^{(1)}$ mit

$$\varphi_{r(i)}(x) = h_1(i, x) = \varphi_i(\varphi_x(i + x))$$

für alle $i, x \in \mathbb{N}$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

(b) Wir definieren eine Funktion $h_2 :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$h_2(\langle x, y\rangle, z) := u_\varphi(x, y) + u_\varphi(y, z) + u_\varphi(z, x)$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$. Die Funktion h_2 ist als Komposition von Funktionen, die nach dem utm–Theorem, nach Satz 3.5 und nach Satz 5.3 berechenbar sind, selbst berechenbar. Nach dem smn–Theorem gibt es eine Funktion $t \in R^{(1)}$ mit

$$\varphi_{t(k)}(z) = h_2(k, z)$$

für alle $k, z \in \mathbb{N}$. Wir definieren $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$s(x, y) := t(\langle x, y\rangle)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Dann ist auch s berechenbar. Offenbar gilt

$$\varphi_{s(x,y)}(z) = h_2(\langle x, y\rangle, z) = \varphi_x(y) + \varphi_y(z) + \varphi_z(x),$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 6

(a) Seien alle drei Mengen A, B und C rekursiv–aufzählbar. Nach Satz 9.9 ist dann auch die Vereinigung $A \cup B$ rekursiv–aufzählbar. Da die Menge $A \cup B$ gerade das Komplement der Menge C ist, d.h. $\mathbb{N} \setminus C = A \cup B$, ist C nach Satz 9.11 rekursiv. Völlig analog zeigt man, dass auch A und B rekursiv sind.

(b) Nein, es ist nicht möglich, dass zwei der drei Mengen rekursiv sind, die dritte aber nicht. Wenn zwei der drei Mengen A, B und C rekursiv sind, dann ist nach Satz 9.5 auch die Vereinigung dieser beiden Mengen rekursiv. Die dritte Menge ist aber gerade das Komplement dieser Vereinigung und daher nach Satz 9.5 in dem Fall ebenfalls rekursiv.

(c) Ja, es ist möglich, dass eine der drei Mengen rekursiv ist, die anderen beiden aber nicht. Man wähle zum Beispiel $A := K_\varphi$, $B := \mathbb{N} \setminus K_\varphi$ und $C := \emptyset$. Dann ist die Menge A nach Satz 9.14 nicht rekursiv, und die Menge B nach Satz 9.14 und Satz 9.11 nicht rekursiv. Die Menge C ist jedoch die leere Menge und daher rekursiv. Ihre charakteristische Funktion ist nämlich die konstante Funktion $c_0^{(1)}$, die bekanntlich berechenbar ist.

Aufgabe 7

(a) Wir definieren eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } u_\varphi(i,i) > 2002, \\ \text{div} & \text{sonst}, \end{cases}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe einer geeigneten verallgemeinerten Registermaschine und unter Benutzung des utm–Theorems sieht man, dass f berechenbar ist. Ferner gilt offenbar $\mathrm{Def}(f) = A$. Also ist A rekursiv–aufzählbar.

(b) Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, A sei rekursiv. Dann ist die charakteristische Funktion cf_A von A berechenbar. Wir definieren eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$g(n) = \begin{cases} 2003 & \text{falls } n \notin A, \\ 0 & \text{falls } n \in A, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $g(n) = 2003 \cdot (1 \dot{-} \mathrm{cf}_A(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist g berechenbar.

Da φ eine Nummerierung aller berechenbaren Funktionen ist, muss es eine Zahl i_0 mit $\varphi_{i_0} = g$ geben. Es muss entweder $i_0 \in A$ oder $i_0 \notin A$ gelten. In jedem Fall gelangt man aber zu einem Widerspruch:

- Im Fall $i_0 \in A$ ist $\varphi_{i_0}(i_0) = g(i_0) = 0$, und daher ist $i_0 \notin A$ nach Definition von A.
- Im Fall $i_0 \notin A$ ist $\varphi_{i_0}(i_0) = g(i_0) = 2003 > 2002$, und daher ist $i_0 \in A$ nach Definition von A.

Also kann A nicht rekursiv sein.

Aufgabe 8

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die durch

$$g(\langle i,j\rangle) = g\langle i,j\rangle := \langle 1 + 2ij, i^2 + j^2\rangle$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$ definierte Funktion. Dann ist g berechenbar, und es gilt für alle $i, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f\nu_{\mathbb{Z}}\langle i,j\rangle &= f(i-j) \\ &= 1-(i-j)^2 \\ &= 1+2ij-(i^2+j^2) \\ &= \nu_{\mathbb{Z}}\langle 1+2ij, i^2+j^2\rangle \\ &= \nu_{\mathbb{Z}} g\langle i,j\rangle\,. \end{aligned}$$

Also ist f eine $(\nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}})$–berechenbare Funktion.