1653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Klausur vom 18. Februar 2006

Es sollten Ihnen 9 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 4 Blätter mit 7 Aufgaben,
- 2 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 1653 erhalten Sie, wenn Sie

- in dieser Klausur mindestens 36 der möglichen 90 Punkte erreichen und zusätzlich mindestens 25% der insgesamt möglichen Punktzahl in den Einsendeaufgaben erreicht haben.

Die Benutzung von Hilfsmitteln (wie z. B. des Kurstextes) ist nicht erlaubt!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben links Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert, beginnend mit dem Deckblatt und der Bescheinigung für das Finanzamt, zusammen.

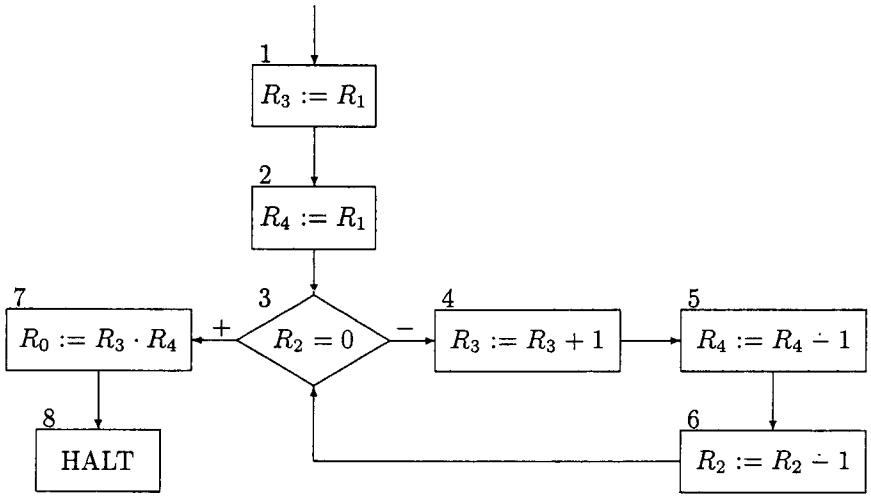
Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.
Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben so rasch wie möglich – etwa in drei Wochen – zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Eine zweistellige verallgemeinerte Registermaschine M sei durch das folgende Flussdiagramm gegeben:



(a) *(7 Punkte)* Seien $w, x, y, z \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n \leq x \Longrightarrow$$
$$\mathrm{ES}^{4n}(3, (0, w, x, y, z, 0, ...)) = (3, (0, w, x \dot{-} n, y + n, z \dot{-} n, 0, ...)).$$

(b) *(3 Punkte)* Folgern Sie aus (a), dass $f_M(a, b) = a^2 \dot{-} b^2$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*

(a) *(2 Punkte)* Sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(\langle a, b\rangle, c) := \langle c, b, \langle a, a\rangle\rangle$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Geben Sie eine explizit Definition von f mittels der Cantorschen Tupelfunktionen, der Projektionen ihrer Umkehrfunktionen und den Projektionen in der Form "$f(z) := \ldots$" mit $z \in \mathbb{N}$ an, ohne andere Variablen als z zu benutzen.

(b) *(3 Punkte)* Die Simulationsrelation $\mathrm{Sim} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei definiert durch

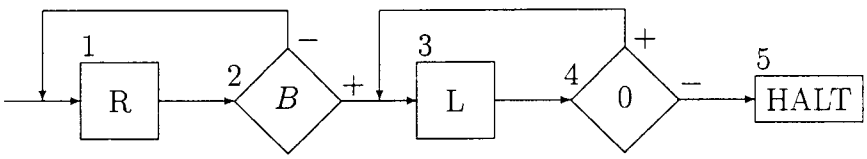
$$d \,\mathrm{Sim}\, d' :\Longleftrightarrow d = d' - 1$$

Ferner sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) := 3 \cdot n$.

Geben Sie eine Funktion $f' : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$ an, die f bzgl. der Simulationsrelation Sim simuliert, und beweisen Sie dieses.

Aufgabe 3 *(15 Punkte)*

Das Flussdiagramm F einer einstelligen Bandmaschine M über dem Alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$ sei wie folgt gegeben:



(a) *(2 Punkte)* Zeigen Sie:

$$\mathrm{ES}^5\,(2, (10, B, \varepsilon)) = (5, (B, 1, 0B)).$$

Es sei nun $\Gamma := \Sigma \cup \{B\}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $w \in \Sigma^*$, $u, v \in \Gamma^*$, $c \in \Gamma$ und $d \in \{1, B\}$:

(1) Ist $n = \lg(w)$ die Länge von w, dann ist
$$\mathrm{ES}^{2\cdot n+2}\,(1, (v, c, wBu)) = (3, (vcw, B, u)).$$

(2) $\mathrm{ES}^{2\cdot n+2}\,(3, (ud0^n, c, v)) = (5, (u, d, 0^n cv))$.

(b) *(7 Punkte)* Beweisen Sie die Behauptung (2) durch vollständige Induktion nach n.

(c) *(6 Punkte)* Es sei $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ für alle $w \in \Sigma^*$ definiert durch

$$f(w) := \text{das längste Endstück von } w \text{ aus } \{0\}^*.$$

Zeigen Sie $f = f_M$ mit Hilfe von (1) und (2).

Aufgabe 4 *(15 Punkte)*

(a) *(7 Punkte)* Es sei $\Sigma := \{a\}$ ein einelementiges Alphabet. Ferner sei die Funktion $g : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ definiert durch

$$g(w) := ww \text{ für alle } w \in \Sigma^*.$$

Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und des Satzes über den Zusammenhang zwischen Zahlen- und Wortberechenbarkeit (7.1.9 im Kurs 01653; s. Anhang), dass g berechenbar ist.

(b) *(8 Punkte)* Es sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(0) := 1 \text{ und } f(x+1) := (x+1) \cdot f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist. (Dabei dürfen Sie den im Anhang angegebenen Satz 7.2.2 benutzen.)

Aufgabe 5 *(15 Punkte)*

(a) *(10 Punkte)* Zeigen Sie, dass die totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die durch $f(0) := 0$ und

$$f(n+1) := \begin{cases} \varphi_n(n+1) + 1 & \text{falls } n+1 \in \mathrm{Def}(\varphi_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist, nicht berechenbar ist. (Tipp: Diagonalisierung)

(b) *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass es eine totale berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $i, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\varphi_{r(i)}(n) = \varphi_{\varphi_n(i)}(n).$$

Um nachzuweisen, dass eine Zahlenfunktion berechenbar ist, genügt es im Folgenden, z.B. eine geeignete verallgemeinerte Registermaschine zu skizzieren (ein formaler Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich).

Aufgabe 6 *(15 Punkte)* Die Menge

$$T_0 := \{(i, x, y, t) \in \mathbb{N}^4 \mid \Phi_i(x) \leq t \text{ und } \varphi_i(x) = y\}$$

ist rekursiv.

(a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Menge

$$T_1 := \{(i, x, y) \in \mathbb{N}^3 \mid \varphi_i(x) = y\}$$

rekursiv-aufzählbar ist.

(b) *(2 Punkte)* Kann man aus (a) schließen, dass die Menge

$$T_2 := \{\langle i, x, y\rangle \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(x) = y\}$$

rekursiv-aufzählbar ist?

(c) *(7 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Menge T_2 nicht rekursiv ist.
(Tipp: Selbstanwendbarkeitsproblem und Reduktion; verwenden Sie Funktionen h und f, so dass $\varphi_{h(i)}(x) = 0 \cdot \varphi_i(i)$ und $f(i) := \langle h(i), 0, 0\rangle$.)

(d) *(2 Punkte)* Ist die Menge T_1 rekursiv?

Aufgabe 7 *(15 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)*
Es sei $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to M$ eine Nummerierung, und es sei $X \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$X \text{ ist } \nu\text{-rekursiv} \implies X \text{ ist } \nu\text{-r.a.}.$$

(b) *(10 Punkte)*
Es sei $\delta_{10} :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ die Darstellung der reellen Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche, und es sei $\delta_2 :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ die Darstellung der reellen Zahlen durch unendliche Dualbrüche. Zeigen Sie: es gibt keine Typ-2-Maschine, die jeden endlichen Dualbruch in einen äquivalenten Dezimalbruch transformiert (übersetzt).
(Tipp: gehen Sie indirekt vor, nehmen Sie den Dualnamen p von $1/5$ als Eingabe, beachten Sie, dass p weder die Form $p = w000\ldots$ noch die Form $p = w111\ldots$ mit $w \in \Sigma^*$ hat.)

Anhang

Definition 4.3.4 (Simulation) D, D' seien Mengen, und es sei $\mathrm{Sim} \subseteq D \times D'$. Statt $(d, d') \in \mathrm{Sim}$ schreiben wir $d\mathrm{Sim}d'$ und sagen auch: d' *simuliert* d (bzgl. der *Simulationsrelation* Sim).

(a) Seien $f :\subseteq D \longrightarrow D$ und $f' :\subseteq D' \longrightarrow D'$ gegeben.
Wir sagen "f' *simuliert* f (bzgl. Sim)" und schreiben dafür $f\mathrm{Sim}f'$, gdw. für alle d, d' mit $d\mathrm{Sim}d'$ gilt:

$$\begin{array}{lll} & f(d) \text{ existiert} & \Longleftrightarrow & f'(d') \text{ existiert} \\ \text{und} & f(d) \text{ existiert} & \Longrightarrow & f(d)\mathrm{Sim}f'(d'). \end{array}$$

(b) Seien $t :\subseteq D \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ und $t' :\subseteq D' \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ gegeben.
Wir sagen "t' *simuliert* t (bzgl. Sim)" und schreiben $t\mathrm{Sim}t'$, gdw. für alle d, d' mit $d\mathrm{Sim}d'$ gilt:

$$\begin{array}{lll} & t(d) \text{ existiert} & \Longleftrightarrow & t'(d') \text{ existiert} \\ \text{und} & t(d) \text{ existiert} & \Longrightarrow & t(d) = t'(d'). \end{array}$$

Satz 7.1.9
Es sei Σ ein Alphabet, es sei $\nu_\Sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma^*$ eine Standardnummerierung von Σ^*, und es sei $k \in \mathbb{N}$. Es sei $g :\subseteq (\Sigma^*)^k \longrightarrow \Sigma^*$. Dann gilt:

$$g \text{ berechenbar} \iff \nu_\Sigma^{-1} g \vec{\nu}_\Sigma :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N} \text{ berechenbar.}$$

Definition 5.3.3 (Substitution, primitive Rekursion)

- Für Funktionen $g :\subseteq \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_m :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sei die Substitution $\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

  $$\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m)(\bar{x}) := g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_m(\bar{x}))$$

  für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.

- Es seien $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

  $$\begin{array}{lll} f(\bar{x}, 0) & = & g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) & = & h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)), \end{array}$$

  die für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ und $y \in \mathbb{N}$ gelten, eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: f entsteht aus g und h durch *primitive Rekursion.*

Definition 7.2.1 (primitiv–rekursive Funktionen)
Wir nennen

$$\mathrm{Gr} := \{\tilde{0}, Z, S\} \cup \{\mathrm{pr}_i^{(k)} \mid i, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k\}$$

die Menge der *primitiv–rekursiven Grundfunktionen* (die in der Menge Gr enthaltenen Funktionen sind weiter unten nochmals definiert).

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt *primitiv–rekursiv*, genau dann, wenn sie sich in endlich vielen Schritten aus der Menge Gr durch wiederholtes Anwenden der Operatoren Sub und Prk erzeugen läßt.

Satz 7.2.2 (einige primitiv–rekursive Funktionen)
Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv–rekursiv:

(a) $c_n^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).

(b) $s : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(x, y) := x + y$ (Summe).

(c) $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).

(d) $d : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $d(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).

(e) $m : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $m(x, y) := x \cdot y$ (Multiplikation).

Satz 9.2.5 (Projektionssatz)
$A \subseteq \mathbb{N}^k$ ist r.a. gdw.

$$A = \{x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists t)\,(x, t) \in B\}$$

für eine rekursive Menge $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$.

Definition 10.1.3 (ν-rekursiv)
Es seien $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to M$ und $\nu_1 :\subseteq \mathbb{N} \to M_1$ Nummerierungen. Eine Menge $X \subseteq M$ heißt ν-rekursiv, g.d.w. es eine berechenbare Funktion $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit

$$g(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu(i) \in X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\text{für alle } \ i \in \mathrm{Def}(\nu)\,).$$