1653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Klausur vom 16. Februar 2008

Es sollten Ihnen 8 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 3 Blätter mit 8 Aufgaben,
- 2 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 1653 erhalten Sie, wenn Sie

- in dieser Klausur mindestens 36 der möglichen 90 Punkte erreichen und zusätzlich mindestens 25% der insgesamt möglichen Punktzahl in den Einsendeaufgaben erreicht haben.

Die Benutzung von Hilfsmitteln (wie z. B. des Kurstextes) ist nicht erlaubt!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben links Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert, beginnend mit dem Deckblatt und der Bescheinigung für das Finanzamt, zusammen.

Bitte beachten Sie, dass sich diese Klausur auf die Version des Kurses 1653 bezieht, die im **aktuellen** Wintersemester **2007/08** eingesetzt wird. Berücksichtigen Sie dies bitte bei Ihren Lösungen!

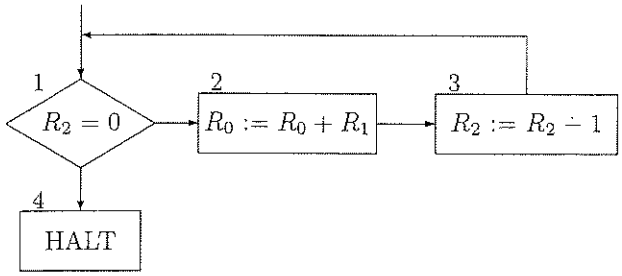
Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg. Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben so rasch wie möglich – etwa in drei Wochen – zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Eine zweistellige verallgemeinerte Registermaschine M sei gegeben durch das folgende Flussdiagramm:



(a) *(7 Punkte)*
Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $i \leq y$ gilt:

$$\mathrm{ES}^{3i}\big(1, (0, x, y, 0, ...)\big) = (1, (x \cdot i, x, y - i, 0, ...)) \ .$$

(b) *(3 Punkte)*
Zeigen Sie mit (a), dass $f_M(x, y) = x \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f\langle x, y\rangle &:= \langle x, y \dot{-} 1\rangle \\ g\langle x, y, z\rangle &:= \langle xy, 3z, z + \langle 5x, z + x\rangle, x\rangle \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$.

(a) *(2 Punkte)*
Geben Sie eine explizite Definition von f mittels der Cantorschen Tupelfunktionen, der Projektionen ihrer Umkehrfunktionen und der Projektionen in der Form "$f(n) := \ldots$" mit $n \in \mathbb{N}$ an, ohne andere Variablen als n zu benutzen.

(b) *(3 Punkte)*
Geben Sie eine explizite Definition von g mittels der Cantorschen Tupelfunktionen, der Projektionen ihrer Umkehrfunktionen und der Projektionen in der Form "$g(n) := \ldots$" mit $n \in \mathbb{N}$ an, ohne andere Variablen als n zu benutzen.

(c) *(3 Punkte)*
Sind f und g berechenbar? Bitte begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Sei $\Sigma := \{a_1, a_2\}$.

(a) *(4 Punkte)*
Geben Sie eine Bandmaschine M an, so dass

$$\nu_\Sigma(n+1) = f_M \nu_\Sigma(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) *(6 Punkte)*
Erläutern Sie die Funktionsweise Ihrer Bandmaschine aus Teil (a) so, dass ersichtlich wird, dass sie das Gewünschte leistet.
(Ein formaler Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich.)

(Bitte beachten Sie, dass sich die Kopfposition in Bezug auf die Ausgabe im Vergleich zu früheren Kursdurchläufen geändert hat!)

Aufgabe 4 *(11 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)*
Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) := n + 1$ die Nachfolgerfunktion. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3, dass g berechenbar ist.

(Hinweis: Ein direkter Beweis mit einer Registermaschine oder ein Rückgriff auf Satz 3.2.5 ist hier keine gültige Lösung.)

(b) *(6 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die definiert ist durch

$$f(n) := \sum_{k=0}^{n} k^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, eine primitiv-rekursive Funktion ist.

Aufgabe 5 *(15 Punkte)*

(a) *(7 Punkte)*
Zeigen Sie, dass es eine berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit

$$\varphi_{r(i)}(n) = i \cdot n + \varphi_{i+2n}(2i + n)$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}$.

(b) *(8 Punkte)*
Sei $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eine berechenbare Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $i \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$f(i, n) = \varphi_i(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 6 *(18 Punkte)*

Für zwei beliebige Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sei

$$\langle A, B\rangle := \{\langle i, j\rangle \mid i \in A, j \in B\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie

(a) *(8 Punkte)*
$A \cap B \leq \langle A, B\rangle$,

(b) *(6 Punkte)*
A rekursiv–aufzählbar $\Longrightarrow \langle A, \mathbb{N}\rangle$ rekursiv–aufzählbar,

(c) *(4 Punkte)*
$\langle K_\varphi, \mathbb{N}\rangle$ ist nicht rekursiv.

(Hinweis: Sie dürfen die Aussagen vorhergehender Aufgabenteile auch dann verwenden, wenn Sie diese nicht bearbeitet haben.)

Aufgabe 7 *(9 Punkte)*

Sei $\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ die durch $\nu_{\mathbb{Q}}\langle i, j, k\rangle := \frac{i-j}{k+1}$ definierte Nummerierung der rationalen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, die durch

$$f(q) := 1 - q$$

für alle $q \in \mathbb{Q}$ definiert ist, eine $(\nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$-berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 8 *(9 Punkte)*

Sei $\rho : \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ die Cauchydarstellung der reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := 1 - x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, eine (ρ, ρ)-berechenbare Funktion ist.

Anhang

Berechenbare Zahlenfunktionen (Satz 3.2.5)

Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t auf den natürlichen Zahlen sind berechenbar.

1. $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $\tilde{0}(\,) := 0$ (nullstellige Nullfunktion).
2. $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).
3. $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).
4. $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).
5. $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathrm{pr}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).
6. $f(x_1, \ldots, x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).
7. $f(x, y) := x + y$ (Summe).
8. $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
9. $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).
10. $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = \mathrm{div}$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).
11. $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).
12. $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, div sonst).
13. $\max(x, y)$.
14. $\min(x, y)$.
15. $f(x) := (1$ falls x Primzahl, 0 sonst).
16. $f(x) :=$ die x–te Primzahl.
17. $f(x, y) := (1$ falls $x < y$, 0 sonst). (Entsprechend für $\leq$, $=$, $\geq$, $>$, $\neq$ anstelle von $<$.)
18. Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich. $f(x) := (0$ falls $x \in A$, 1 sonst).
19. Es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar. $f(x) :=$ (die kleinste Zahl y mit $g(y) = x$ falls $x \in \mathrm{Bild}(g)$, div sonst).
20. Es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar, und es gelte $(\forall y)\, g(y) < g(y + 1)$. Dann sei $f(x) := \max\{y \mid g(y) \leq x\}$.
21. $f(a, b) := \mathrm{ggT}(a, b)$ falls $a, b > 0$, $f(a, b) := 0$ sonst.

Primitive Rekursion (Definition 4.3.3)

1. Für Funktionen $g :\subseteq \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_m :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ sei die Substitution $\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m) :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m)(\bar{x}) := g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_m(\bar{x}))$$

   für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.

2. Es seien $g : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \longrightarrow \mathbb{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{aligned}$$

   (für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ und $y \in \mathbb{N}$) eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: f entsteht aus g und h durch *primitive Rekursion.*

Einige primitiv-rekursive Funktionen (Satz 6.2.2)

Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv–rekursiv:

1. $c_n^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).
2. $s : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(x, y) := x + y$ (Summe).
3. $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).
4. $d : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $d(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
5. $m : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $m(x, y) := x \cdot y$ (Multiplikation).

Cauchy-Darstellung (Definition 9.4.6)

Die Cauchy-Darstellung $\rho :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \rho(p) = x :\Longleftrightarrow \quad & \text{es gibt } u_0, u_1, \ldots \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{rat}}), \text{ so dass } p = u_0 \sharp u_1 \sharp \ldots, \\ & \text{und } (\forall k \in \mathbb{N})\, |x - \nu_{\mathrm{rat}}(u_k)| \leq 2^{-k} \end{aligned}$$

Primitive Rekursion (Definition 4.3.3)

1. Für Funktionen $g :\subseteq \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_m :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ sei die Substitution $\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m) :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m)(\bar{x}) := g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_m(\bar{x}))$$

   für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.

2. Es seien $g : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \longrightarrow \mathbb{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{aligned}$$

   (für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ und $y \in \mathbb{N}$) eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: f entsteht aus g und h durch *primitive Rekursion.*

Einige primitiv-rekursive Funktionen (Satz 6.2.2)

Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv–rekursiv:

1. $c_n^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).
2. $s : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(x, y) := x + y$ (Summe).
3. $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).
4. $d : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $d(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
5. $m : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $m(x, y) := x \cdot y$ (Multiplikation).

Cauchy-Darstellung (Definition 9.4.6)

Die Cauchy-Darstellung $\rho :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \rho(p) = x :\Longleftrightarrow \quad & \text{es gibt } u_0, u_1, \ldots \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{rat}}), \text{ so dass } p = u_0 \sharp u_1 \sharp \ldots, \\ & \text{und } (\forall k \in \mathbb{N})\, |x - \nu_{\mathrm{rat}}(u_k)| \leq 2^{-k} \end{aligned}$$