FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität 58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

(Land)

FERNUNIVERSITÄT
EINGANG

MI

Bitte zurück an:
FERNUNIVERSITÄT
58084 Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik

Kurs 01653 – Einführung in die Theoretische Informatik A

Klausur am 21. Februar 2009

- ☐ Berlin
- ☐ Bern
- ☐ Bochum
- ☐ Bregenz
- ☐ Frankfurt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ Köln
- ☐ München
- ☐ Wien
- ☐ sonstige

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
bearbeitet										
maximale Punktzahl	8	8	8	18	10	15	13	10	10	100
erreichte Punktzahl										

Datum: _____ Korrektor: _____

© 2009 FernUniversität in Hagen

Vorbemerkungen zur Klausur zum Kurs 01653 „Einführung in die Theoretische Informatik A“

Es müssen Ihnen 10 Blätter Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung für das Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 5 Blätter mit 9 Aufgaben
- 2 Blätter Anhang.

Füllen Sie bitte vor der Bearbeitung das Deckblatt aus (Matrikel-Nr., Name, Adresse) und legen Sie es mit den Ausweisen zur Kontrolle bereit.

Für die Bearbeitung haben Sie 3 Stunden Zeit. Außer Schreibzeug sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.

Schreiben Sie bitte leserlich und lassen Sie einen breiten Korrekturrand. Beginnen Sie möglichst für jede Aufgabe eine neue Seite.

Folgende Unterlagen sind zusammengeheftet abzugeben:

- das ausgefüllte Deckblatt (bitte bearbeitete Aufgaben ankreuzen),
- die ausgefüllte Finanzamt-Bescheinigung (sofern gewünscht),
- Ihre Lösungsblätter, möglichst in der Reihenfolge der Aufgaben. Schreiben Sie zur Sicherheit auf jedes Blatt nochmals Name und Matrikel-Nr. Vergessen Sie bitte nicht, den ausgefüllten Fragebogen von Aufgabe 1 abzugeben!

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie 40 von 100 Punkten erreichen. Wir bemühen uns, die Klausur zügig zu korrigieren und zurückzusenden. Sollten Sie nach zwei Wochen noch keine Nachricht haben, können Sie Ihr Ergebnis im Lehrgebiet erfragen.

Viel Erfolg!

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann in dieser Aufgabe nur eine nicht-negative Punktzahl erzielt werden.

Um eine Frage zu beantworten, kreuzen Sie bitte das entsprechende Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile. Vergessen Sie bitte nicht, Ihre Lösung für diese Aufgabe abzugeben!

Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Wenn $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nicht berechenbar sind, so ist auch $f \circ g$ nicht berechenbar.
[ ]	[ ]	Die einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entsprechen genau der Menge $\mathrm{R}^{(1)}$ der einstelligen total-berechenbaren Funktionen
[ ]	[ ]	Der $\tilde{\mu}$-Operator darf nur auf totale Funktionen angewendet werden.
[ ]	[ ]	Für alle Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$, so dass A rekursiv und B rekursiv-aufzählbar ist, ist $A \cap (\mathbb{N} \setminus B)$ ebenfalls rekursiv-aufzählbar.
[ ]	[ ]	Die charakteristische Funktion des Definitionsbereichs der universellen Funktion u_φ zur Standardnummerierung φ ist nicht berechenbar.
[ ]	[ ]	Es existiert eine total-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \varphi_n(n)$.
[ ]	[ ]	Die Menge $\varphi^{-1}[\mathrm{R}^{(1)}]$ ist rekursiv.
[ ]	[ ]	Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \lceil x \rceil$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist nicht berechenbar.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Formulieren Sie

(a) *(2 Punkte)*
den Satz über den Zusammenhang zwischen den berechenbaren Zahlen- und Wortfunktionen,

(b) *(2 Punkte)*
das utm-Theorem,

(c) *(2 Punkte)*
das smn-Theorem,

(d) *(2 Punkte)*
das Korrektheitsproblem.

Aufgabe 3 *(8 Punkte)*

Geben Sie Definitionen an für

(a) *(2 Punkte)*
„$f :\subseteq (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$ ist eine berechenbare Funktion", wobei Σ ein Alphabet ist,

(b) *(2 Punkte)*
„$A \subseteq \mathbb{N}^k$ ist rekursiv",

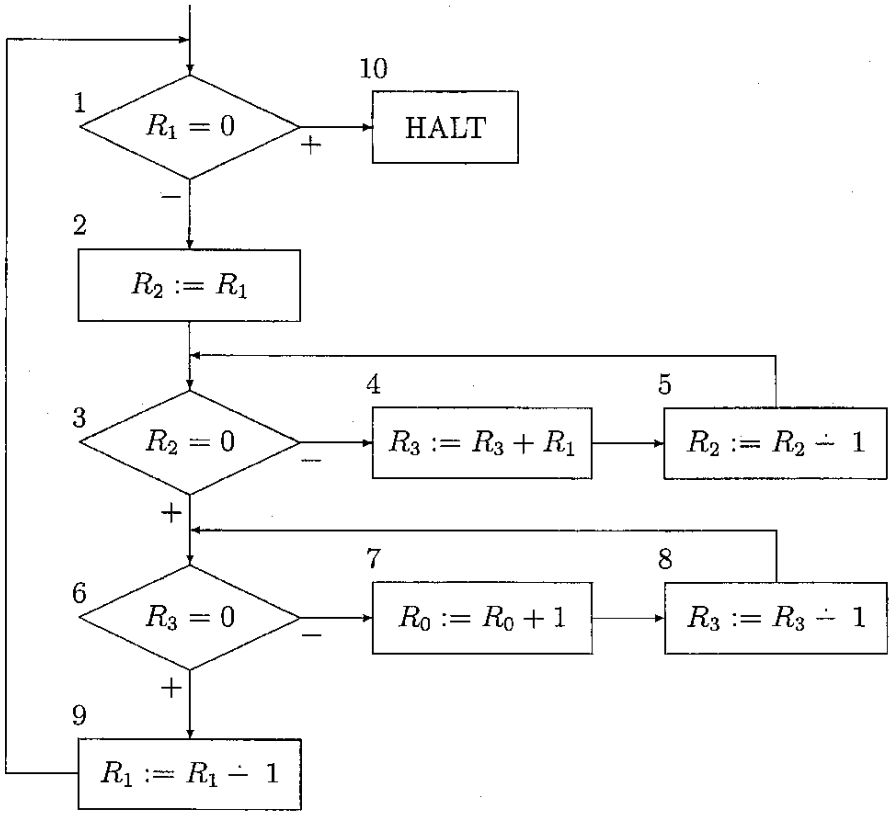
(c) *(2 Punkte)*
„$A \subseteq (\Sigma^*)^k$ ist rekursiv-aufzählbar", wobei Σ ein Alphabet ist,

(d) *(2 Punkte)*
„$f :\subseteq M \to L$ ist (ν, ν')-berechenbar", wobei $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to M$ und $\nu' :\subseteq \mathbb{N} \to L$ Nummerierungen sind.

In den folgenden Aufgaben dürfen Sie insbesondere Satz 3.2.5 (siehe Anhang) verwenden.

Aufgabe 4 *(18 Punkte)*

Gegeben sei die einstellige verallgemeinerte Registermaschine M mit dem folgenden Flussdiagramm F:



(a) *(6 Punkte)*
Seien $k, m, z \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{ES}^{3n}(3, (z, m, n, k, 0, \ldots)) = (3, (z, m, 0, k + n \cdot m, 0, \ldots)).$$

(b) *(4 Punkte)*
Gegeben seien die folgenden Behauptungen über die äußere Schleife in F:

1. $(\forall m, z)(\exists t)\, \mathrm{ES}^t(1, (z, m, 0, \ldots)) = (1, (z + \sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots))$
2. $(\forall m)(\exists t)\, \mathrm{ES}^t(1, (0, m, 0, \ldots)) = (1, (\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots))$
3. $(\forall m)(\forall k \leq m)(\exists t)\, \mathrm{ES}^t(1, (0, m, 0, \ldots)) = (1, (\sum_{i=m-k+1}^{m} i^2, m - k, \ldots))$
4. $(\forall k, m, n, z)(\exists t, y)\, \mathrm{ES}^t(1, (z, k, m, n, 0, \ldots)) = (1, (y, 0, m, n, 0, \ldots))$
5. $(\forall k, m, z)(\exists t, y)\, \mathrm{ES}^t(1, (z, k, m, 0, 0, \ldots)) = (1, (y, 0, 0, 0, 0, \ldots))$
6. $(\forall k, m, n, z)(\exists t, y)\, \mathrm{ES}^t(1, (z, k, m, n, 0, \ldots)) = (1, (y, 0, 0, 0, 0, \ldots))$

(Alle vorkommenden Variablen stammen hierbei aus $\mathbb{N}$.)
Welche dieser Behauptungen ist/sind korrekt?

(c) *(2 Punkte)*
Welche der Behauptungen 1, 2 und 3 aus Aufgabenteil (b) läßt/lassen sich direkt mit vollständiger Induktion beweisen?

(d) *(4 Punkte)*
Beweisen Sie mit Hilfe (einer) der richtigen Aussagen aus Aufgabenteil (b), dass M die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := \sum_{i=1}^{n} i^2$ berechnet.

(e) *(2 Punkte)*
Ist die von M berechnete Funktion f auch berechenbar? Bitte begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ die k-stellige Summe $f^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{i=1}^{k} x_i$ $(= x_1 + \ldots + x_k)$ primitiv-rekursiv ist.

(b) *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x, y) := x^y$ (mit $0^0 := 1$) primitiv-rekursiv ist.

Sie dürfen hierzu Satz 6.2.2 (siehe Anhang) verwenden.

Aufgabe 6 *(15 Punkte)*

Seien $\Sigma := \{0, 1\}$ und ν_{Du} die Dualnotation von $\mathbb{N}$ (siehe Anhang).

(a) *(10 Punkte)*
Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Turingmaschine M, dass die folgende Wortfunktion f berechenbar ist:

$$f : \Sigma^* \to \Sigma^*,\ f(w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } w \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}}) \text{ und } \nu_{\mathrm{Du}}(w) \text{ gerade,} \\ 1 & \text{falls } w \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}}) \text{ und } \nu_{\mathrm{Du}}(w) \text{ ungerade,} \\ \varepsilon & \text{sonst, d. h. } w \notin \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}}). \end{cases}$$

Eine graphische Angabe des Flussdiagramms von M ist dabei ausreichend. Kommentieren/beschreiben Sie Ihre Maschine M so ausführlich, dass ersichtlich wird, dass sie die gewünschte Funktion berechnet. Ein formaler Korrektheitsbeweis für f_M ist nicht erforderlich.

(b) *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die Wortmenge

$$G := \{w \in \Sigma^* \mid \nu_{\mathrm{Du}}(w) \text{ ist gerade}\} \subseteq \Sigma^*$$

rekursiv ist.

Aufgabe 7 *(13 Punkte)*

(a) *(3 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f :\subseteq \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ f(i, j, x) := \max(\varphi_i(x), \Phi_j(x))$$

berechenbar ist.

(b) *(5 Punkte)*
Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv. Zeigen Sie, dass es eine berechenbare Funktion $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\varphi_{r(i,j)}(x) := \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{falls } x \in A, \\ \varphi_j(x) & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) *(5 Punkte)*
Geben Sie eine nicht berechenbare Funktion $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq \{0\}$ an. Beweisen Sie, dass Ihre Funktion g nicht berechenbar ist.

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(1653) = 1653\} \subseteq \mathbb{N}$$

rekursiv-aufzählbar, aber nicht rekursiv ist.

Aufgabe 9 *(10 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)*
Sei $\nu_{\mathbb{Z}}$ die im Kurstext eingeführte Nummerierung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ (siehe Anhang). Zeigen Sie, dass die Multiplikation

$$m_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ m_{\mathbb{Z}}(x, y) := x \cdot y$$

auf $\mathbb{Z}$ eine $(\nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}})$-berechenbare Funktion ist.

(b) *(5 Punkte)*
Sei φ die Standardnummerierung von $\mathrm{P}^{(1)}$. Die Funktion $M : \mathrm{P}^{(1)} \times \mathrm{P}^{(1)} \to \mathrm{P}^{(1)}$ sei definiert durch:

$$M(f, g)(x) := f(x) \cdot g(x) \qquad (f, g \in \mathrm{P}^{(1)}, x \in \mathbb{N})$$

Zeigen Sie, dann M dann $(\varphi, \varphi, \varphi)$-berechenbar ist.

Anhang

Satz 3.2.5 (berechenbare Zahlenfunktionen)

Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t auf den natürlichen Zahlen sind berechenbar.

(1) $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $\tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).

(2) $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).

(3) $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).

(4) $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).

(5) $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathrm{pr}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).

(6) $f(x_1, \ldots, x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktion).

(7) $f(x, y) := x + y$ (Summe).

(8) $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).

(9) $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).

(10) $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = \mathrm{div}$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).

(11) $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 = 1$ (Exponentiation).

(12) $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, div sonst).

(13) $\max(x, y)$.

(14) $\min(x, y)$.

(15) $f(x) := (1$ falls x Primzahl, 0 sonst).

(16) $f(x) :=$ die x-te Primzahl.

(17) $f(x, y) := (1$ falls $x < y$, 0 sonst). (Entsprechend für $\leq, =, \geq, >, \neq$ anstelle von $<$.)

(18) Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich. $f(x) := (0$ falls $x \in A$, 1 sonst).

(19) Es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar.
$f(x) :=$ (die kleinste Zahl y mit $g(y) = x$ falls $x \in \mathrm{Bild}(g)$, div sonst).

(20) Es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar, und es gelt $(\forall y) g(y) < g(y + 1)$. Dann sei $f(x) := \max\{y \mid g(y) \leq x\}$.

(21) $f(a, b) := \mathrm{ggT}(a, b)$ falls $a, b > 0$, $f(a, b) := 0$ sonst.

Satz 6.2.2 (einige primitiv-rekursive Funktionen)

Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv-rekursiv:

(1) $c_n^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen),

(2) $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $s(x, y) := x + y$ (Summe),

(3) $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion),

(4) $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $d(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz),

(5) $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $m(x, y) := x \cdot y$ (Multiplikation).

Definition 9.1.1.3 (Standardnummerierung $\nu_{\mathbb{Z}}$)

Die Standardnummerierung $\nu_{\mathbb{Z}}$ der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist wie folgt definiert:

$$\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ \nu_{\mathbb{Z}}\langle i, j\rangle := i - j \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 9.1.11.1 (Dualnotation)

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$.

Die Dualnotation $\nu_{\mathrm{Du}} :\subseteq \Sigma^* \to \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}}) := \{0\} \cup \{1\}\{0, 1\}^*$$

$$\nu_{\mathrm{Du}}(a_n \ldots a_0) := \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i \quad (n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots a_n \in \Sigma)$$