1653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Lösungen zur Klausur vom 16. März 2002

Aufgabe 1

(a) Sei $x \in \mathbb{N}$ gegeben. Zu zeigen ist durch vollständige Induktion nach n :

$$(\forall n)\,(x \geq n \Rightarrow \mathrm{ES}^{4n}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,(n\cdot(n+1),x-n,2n,0,\ldots)))\,.$$

$\underline{n=0:}$ In diesem Fall ist $\mathrm{ES}^{4n} = \mathrm{ES}^0 = \mathrm{id}$, also

$$\mathrm{ES}^{4n}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,(0,x,0,\ldots))\,.$$

Die rechte Seite gleicht aber $(1,(0\cdot(0+1),x-0,2\cdot 0,0,\ldots))$, womit die Behauptung in diesem Fall gezeigt ist.
$\underline{n \to n+1:}$ Sei nun $x \geq n+1$. Dann ist erst recht $x \geq n$. Damit ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar, die uns

$$\mathrm{ES}^{4n}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,(n\cdot(n+1),x-n,2n,0,\ldots))$$

liefert. Es gilt aber sogar $x > n$. Damit folgt

$$\mathrm{ES}\,(1,(n\cdot(n+1),x-n,2n,0,\ldots)) = (2,(n\cdot(n+1),x-n,2n,0,\ldots))\,.$$

Weiter erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{ES}^3\,(2,(n\cdot(n+1),x-n,2n,0,\ldots)) \\
= \;& \mathrm{ES}^2\,(3,(n\cdot(n+1),x-n-1,2n,0,\ldots)) \\
= \;& \mathrm{ES}\,(4,(n\cdot(n+1),x-n-1,2n+2,0,\ldots)) \\
= \;& (1,(n\cdot(n+1)+2n+2,x-n-1,2n+2,0,\ldots)) \\
= \;& (1,((n+1)\cdot(n+2),x-(n+1),2\cdot(n+1),0,\ldots))\,.
\end{aligned}$$

Durch Zusammensetzen ergibt sich wie gewünscht

$$\mathrm{ES}^{4\cdot(n+1)}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,((n+1)\cdot(n+2),x-(n+1),2\cdot(n+1),0,\ldots))\,.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

(b) Wir wenden die Behauptung aus (a) an für $n = x$ und erhalten dann

$$\mathrm{ES}^{4x}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,(x\cdot(x+1),0,2x,0,\ldots))\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \mathrm{ES}^{4x+1}\,(1,(0,x,0,\ldots)) \\ = \; & \mathrm{ES}\,(1,(x\cdot(x+1),0,2x,0,\ldots)) \\ = \; & (5,(x\cdot(x+1),0,2x,0,\ldots))\,. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Ein- und Ausgabecodierung der Registermaschinen ergibt sich die Behauptung für f_M.

Aufgabe 2

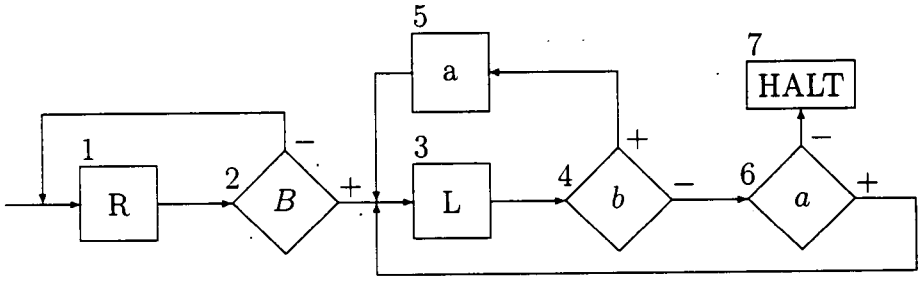
Das WHILE-Programm

$$(Q_1\colon((R_3:(R_1+;(Q_2;R_3-)));(R_2:(R_0+;R_2-))))$$

leistet das Gewünschte.

Aufgabe 3

(a) Das Flussdiagramm F einer Bandmaschine M sei wie folgt gegeben:



(b) Sei $\Gamma := \Sigma \cup \{B\}$. Für alle $w \in \Sigma^*$, $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$ gilt:

(1) $\exists\, t \in \mathbb{N} : \mathrm{ES}^t\,(1,(v,c,wBu)) = (3,(vcw,B,u))$

(2) $\exists\, t \in \mathbb{N} : \mathrm{ES}^t\,(3,(vBw,c,u)) = \big(7,(v,B,a^{\lg(w)}cu)\big)\,.$

(c) Wir beweisen Behauptung 2 durch vollständige Induktion nach $n = \lg(w)$.

$\underline{n = 0:}$ In diesem Fall ist $w = \varepsilon$, und mit $t := 3$ erhalten wir durch leichte Rechnung für alle $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$:

$$\mathrm{ES}^t\,(3, (vB\varepsilon, c, u)) = (7, (v, B, cu)) = \left(7, (v, B, a^{\lg(\varepsilon)}cu)\right).$$

Also gilt die Behauptung in diesem Fall.

$\underline{n \to n+1:}$ Sei nun $\lg(w) = n + 1$. Dann gibt es $w' \in \Sigma^*$ und $d \in \Sigma$, so dass $w = w'd$. Es gilt nun für alle $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$

$$\mathrm{ES}^3\,(3, (vBw, c, u)) = (3, (vBw', a, cu)),$$

und zwar sowohl im Falle $d = a$, als auch im Falle $d = b$. Es ist $\lg(w') = n$. Wir wenden jetzt die Induktionsvoraussetzung auf w' an, und zwar mit a anstelle von c und cu anstelle von u. Danach existiert ein $t' \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^{t'}\,(3, (vBw', a, cu)) = \left(7, (v, B, a^{\lg(w')}acu)\right) = \left(7, (v, B, a^{\lg(w)}cu)\right).$$

Setzen wir $t := 3 + t'$, dann folgt

$$\mathrm{ES}^t\,(3, (vBw, c, u)) = \left(7, (v, B, a^{\lg(w)}cu)\right).$$

Dies war zu zeigen.

(d) Sei $w \in \Sigma^*$ gegeben. Für $v = u = \varepsilon$ und $c = B$ liefert Behauptung 1 die Existenz eines $t \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^t\,(1, (\varepsilon, B, wB)) = (3, (Bw, B, \varepsilon)).$$

Für $v = u = \varepsilon$ und $c = B$ liefert Behauptung 2 die Existenz eines $t' \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^{t'}\,(3, (Bw, B, \varepsilon)) = \left(7, (\varepsilon, B, a^{\lg(w)}B)\right).$$

Es folgt

$$\mathrm{ES}^{t+t'}\,(1, (\varepsilon, B, wB)) = \left(7, (\varepsilon, B, a^{\lg(w)}B)\right).$$

Unter Berücksichtigung der Ein- und Ausgabecodierung für Bandmaschinen ist damit $f_M = f$ gezeigt.

Aufgabe 4

Es sei $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ die Addition, also $f(n,m) = n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Ferner sei ν die Standardnummerierung von Σ^*. Es gilt mit $k = 2$ in Satz 7.6 des Kurses für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\nu^{-1} g \vec{\nu}(n,m) = \nu^{-1} g\left(b^n, b^m\right) = \nu^{-1}\left(b^n b^m\right) = \nu^{-1}\left(b^{n+m}\right) = n + m.$$

Es folgt

$$\nu^{-1} g \vec{\nu} = f.$$

Da f berechenbar ist, ergibt sich nach Satz 7.6 die Berechenbarkeit von g.

Aufgabe 5

(a) Es sei eine zweistellige Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n,i) := u_\varphi(i,n)$$

für alle $n, i \in \mathbb{N}$. Da $f = \mathrm{Sub}\left(u_\varphi, pr_2^{(2)}, pr_1^{(2)}\right)$ gilt, ist $f \in P^{(2)}$ nach dem utm–Theorem (u. a.). Das smn–Theorem liefert dann eine Funktion $s \in R^{(1)}$, die das Gewünschte leistet.

(b) Nun sei eine zweistellige Funktion $g :\subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(i, \langle j, x\rangle) := u_\varphi(\langle i, j\rangle, x)$$

für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$. Wegen

$$g = \mathrm{Sub}\left(u_\varphi, \mathrm{Sub}\left(\pi, pr_1^{(2)}, \mathrm{Sub}(\pi_1^{(2)}, pr_2^{(2)})\right), \mathrm{Sub}(\pi_2^{(2)}, pr_2^{(2)})\right)$$

gilt $g \in P^{(2)}$ (utm–Theorem; Satz 5.3). Wiederum liefert das smn–Theorem eine geeignete Funktion $r \in R^{(1)}$.

Aufgabe 6

(a) Die Menge A ist *nicht* rekursiv.

(b) Nach (2) des Φ–Theorems (8.7) gilt

$$\mathrm{Def}(\Phi_i) = \mathrm{Def}(\varphi_i)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Es folgt für alle $i, n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi_i(n) \neq \mathrm{div} \iff \varphi_i(n) \neq \mathrm{div}.$$

Also gilt

$$(i, n) \in \mathrm{Def}(u_\Phi) \iff (i, n) \in \mathrm{Def}(u_\varphi),$$

d. h., $A = \mathrm{Def}(u_\varphi)$. Nach Satz 8.16 (*Unlösbarkeit des Halteproblems*) ist die charakteristische Funktion von $\mathrm{Def}(u_\varphi)$ nicht berechenbar. Damit ist A nicht rekursiv.

Aufgabe 7

(a) Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann lässt sich m wie folgt darstellen:

$$m = \begin{cases} \frac{m-0}{1} & \text{falls } m \geq 0 \\ \frac{0-(-m)}{1} & \text{falls } m < 0. \end{cases}$$

Also gilt im ersten Fall $m = \nu\langle m, 0, 0\rangle$, und $m = \nu\langle 0, -m, 0\rangle$ im zweiten. Damit ist ν surjektiv, also eine Nummerierung von $\mathbb{Z}$.

(b) Zuerst zeigen wir $\nu_{\mathbb{Z}} \leq \nu$. Dazu definieren wir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$f\langle i, j\rangle := \langle i, j, 0\rangle$$

für alle $\langle i, j\rangle \in \mathbb{N}$. Die Funktion f ist berechenbar wegen Satz 5.3 (u. a.). Ferner gilt

$$\nu_{\mathbb{Q}} f\langle i, j\rangle = \nu_{\mathbb{Q}}\langle i, j, 0\rangle = \frac{i-j}{1} = i - j = \nu_{\mathbb{Z}}\langle i, j\rangle$$

für alle $\langle i,j\rangle \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{N}$. Damit ist $\nu_{\mathbb{Z}} \leq \nu$.
Nun zur umgekehrten Reduzierbarkeit. Wir definieren $g :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$g\langle i,j,k\rangle := \begin{cases} \langle q(i-j,k+1),0\rangle & \text{falls } i \geq j \\ \langle 0, q(j-i,k+1)\rangle & \text{falls } i < j, \end{cases}$$

für alle $\langle i,j,k\rangle \in \mathrm{Def}(\nu)$: dabei ist q die berechenbare Funktion aus Satz 3.5(10). Wegen dieses Satzes und, wiederum, wegen Satz 5.3 ist g berechenbar. Da außerdem im Falle $i < j$

$$-q(j-i,k+1) = \frac{i-j}{k+1}$$

gilt, ergibt sich

$$\nu_{\mathbb{Z}} g\langle i,j,k\rangle = \nu\langle i,j,k\rangle$$

für alle $\langle i,j,k\rangle \in \mathrm{Def}(\nu)$, also $\nu \leq \nu_{\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 8

Wir skizzieren die Arbeitsweise einer Typ–2–Maschine M, die eine Funktion $f_M :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \Sigma^\omega$ berechnet, so dass

$$f\rho(p) = \rho f_M(p)$$

für alle $p \in \mathrm{Def}(\rho)$ gilt. Daraus folgt dann, dass f (ρ,ρ)-berechenbar ist. Bei Eingabe von $p = u_0\#u_1\#\ldots \in \mathrm{Def}(\rho)$ verhält sich M wie folgt:

> Für jedes $k = 0,1,\ldots$ berechnet die Maschine M ein Wort $v_k \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{rat}})$, so dass $\overline{v_k} = \overline{u_k} + 5$ gilt. Dabei gibt M die Folge $q = v_0\#v_1\#\ldots$ aus.

Eine solche Maschine gibt es, da nach der Bemerkung im Anschluss an Beispiel 10.1.6 des Kurses die Operation „+5“ auf $\mathbb{Q}$ $(\nu_{\mathrm{rat}},\nu_{\mathrm{rat}})$–berechenbar ist. Für alle $i,k \in \mathbb{N}$ mit $i > k$ gilt nun

$$\begin{aligned} |\overline{v_i} - \overline{v_k}| &= |(\overline{u_i} + 5) - (\overline{u_k} + 5)| \\ &= |\overline{u_i} - \overline{u_k}| \\ &\leq 2^{-k}, \end{aligned}$$

und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \overline{v_k} = \lim_{k\to\infty} (\overline{u_k} + 5) = \lim_{k\to\infty} \overline{u_k} + 5 = \rho(p) + 5.$$

Dabei gilt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Stetigkeit von „+5“ auf $\mathbb{Q}$. Es folgt $q \in \mathrm{Def}(\rho)$ und

$$\rho f_M(p) = \rho(q) = \rho(p) + 5 = f\rho(p),$$

was zu zeigen war.