Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich!

Postanschrift: FernUniversität in Hagen, 58084 Hagen

Name, Vorname _____

_____

Straße, Nr. _____

PLZ, Wohnort _____

Klausur ohne Hilfsmittel!

FernUniversität in Hagen
Theoretische Informatik I
Informatikzentrum
58084 Hagen

Fachbereich Informatik

Kurs 1653 – Einführung in die Theoretische Informatik A

Klausur vom 20. März 2004

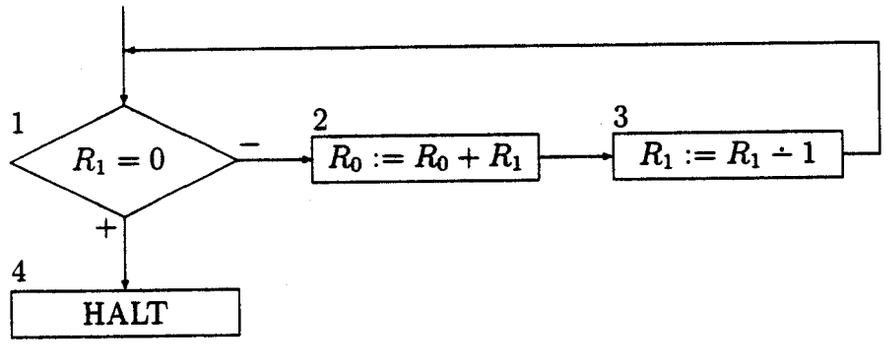
- ☐ Berlin
- ☐ Bochum
- ☐ Bregenz
- ☐ Düsseldorf
- ☐ Frankfurt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ Kassel
- ☐ München
- ☐ Wien
- ☐ Anderer Ort: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
bearbeitet									
Punktzahl									

Datum: _____ Korrektur: _____

© 2004 FernUniversität in Hagen

Aufgabe 1 *(11 Punkte)*
Es sei graphisch das Flussdiagramm F einer einstelligen verallgemeinerten Registermaschine M wie folgt gegeben:



(a) *(1 Punkte)* Welche der folgenden Behauptungen über F treffen zu (und welche sind ggf. falsch)?

(1) $(\forall x)(\forall n)\,(x \geq n \Rightarrow \mathrm{ES}^{3\cdot n}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,(\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \ldots)))$

(2) $(\forall n)(\forall x)\,(x \geq n \Rightarrow \mathrm{ES}^{3\cdot n}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,(\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \ldots)))$

(3) $(\forall x)\,\mathrm{ES}^{3\cdot x}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,(\sum_{i=1}^{x} i, 0, 0, \ldots))$

(b) *(7 Punkte)* Beweisen Sie eine der korrekten Behauptungen in (a), für die dies möglich ist, durch vollständige Induktion nach der außen stehenden Variablen.

(c) *(3 Punkte)* Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$f_M(x) = \sum_{i=1}^{x} i$$

für alle $x \in \mathbf{N}$ gilt.

(Man beachte, dass $\sum_{i=j}^{k} a_i$ für den Fall $j > k$ definitionsgemäß gleich 0 ist.)

Aufgabe 2 *(11 Punkte)*
Es sei $D' := \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, und für alle $d = (b_0, b_1, \ldots) \in D'$ und $i \in \mathbf{N}$ sei analog zu den Registermaschinen definiert:

$$f_i^+(d) := (b_0, \ldots, b_{i-1}, b_i + 1, b_{i+1}, \ldots),$$

$$f_i^-(d) := (b_0, \ldots, b_{i-1}, b_i - 1, b_{i+1}, \ldots),$$

$$t_i^0(d) := \begin{cases} 1 & \text{falls } d(i) = 0 \\ 2 & \text{falls } d(i) \neq 0. \end{cases}$$

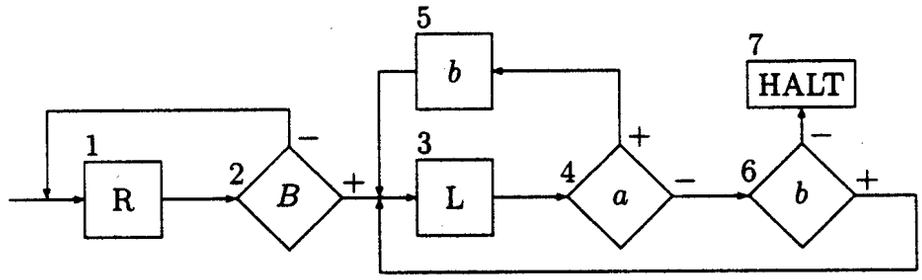
Sei $D := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ die Datenmenge der (verallgemeinerten) Registermaschinen. Eine Simulationsrelation $\mathrm{Sim} \subseteq D' \times D$ sei erklärt durch

$$(d', d) \in \mathrm{Sim} :\Longleftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N})\, d'(i) = \nu_{\mathbb{Z}}(d(i)),$$

für alle $d' \in D'$ und $d \in D$. (Dabei ist $\nu_{\mathbb{Z}}$ die Standardnummerierung der ganzen Zahlen, die definiert ist durch $\nu_{\mathbb{Z}}(\langle i, j\rangle) = i - j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.) Geben Sie – in Form von Befehlen verallgemeinerter Registermaschinen mit berechenbaren Funktionen und Tests – Funktionen F_i^+, F_i^- und F_i^0 an, so dass gilt:

$$f_i^+ \,\mathrm{Sim}\, F_i^+, \quad f_i^- \,\mathrm{Sim}\, F_i^- \quad \text{und} \quad t_i^0 \,\mathrm{Sim}\, F_i^0.$$

Aufgabe 3 *(11 Punkte)*
Das Flussdiagramm F einer einstelligen Bandmaschine M über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei wie folgt gegeben:



Sei $\Gamma := \Sigma \cup \{B\}$. Wir behaupten, dass für alle $w \in \Sigma^*$, $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$ gilt:

(1) $(\exists t \in \mathbb{N})\, \mathrm{ES}^t(1, (v, c, wBu)) = (3, (vcw, B, u))$

(2) $(\exists t \in \mathbb{N})\, \mathrm{ES}^t(3, (vBw, c, u)) = \left(7, (v, B, b^{\lg(w)}cu)\right)$.

Beweisen Sie

(a) *(7 Punkte)* die Behauptung (2) durch eine geeignete Induktion, sowie

(b) *(4 Punkte)* $f = f_M$ mit Hilfe von (1) und (2), wobei $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ definiert ist durch

$$f(w) := b^{\lg(w)} \text{ für alle } w \in \Sigma^*.$$

Aufgabe 4 *(9 Punkte)*
Es sei $\Sigma := \{a\}$ ein einelementiges Alphabet. Ferner sei $g : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &:= \varepsilon \\ g(wa) &:= w \end{aligned}$$

für alle $w \in \Sigma^*$. Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und des Satzes über den Zusammenhang zwischen Zahlen- und Wortberechenbarkeit (7.6 im Kurs), dass g berechenbar ist.

Aufgabe 5 *(9 Punkte)*

(a) *(7 Punkte)* Es sei $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ die *Exponentiation,* definiert durch

$$f(x, y) = x^y$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ (mit $0^0 := 1$). Zeigen Sie, dass f primitiv–rekursiv ist.

(b) *(2 Punkte)* Erläutern Sie die Definition der μ–rekursiven Funktionen. (Die Definition der Operatoren brauchen Sie dabei nicht anzugeben.)

Aufgabe 6 *(15 Punkte)*

(a) *(10 Punkte)* Beweisen Sie mit Hilfe eines Diagonalisierungsarguments, dass die Menge $J := \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(x) = \text{div}\}$ nicht rekursiv ist.

(b) *(5 Punkte)* Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass die Menge

$$I := \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y)\, \varphi_x(y) = \text{div}\}$$

nicht rekursiv ist.

Aufgabe 7 *(11 Punkte)*
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) *(5 Punkte)* Die Menge $A := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \cdot y \in K_\varphi\}$ ist rekursiv–aufzählbar.

(b) *(6 Punkte)* Die Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \varphi_x(y) = \text{div}\}$ ist rekursiv–aufzählbar.

Aufgabe 8 *(13 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)* Es sei ν_{C2} die Cantorsche Nummerierung von $\mathbf{N}^2$, also $\nu_{C2} = \pi^{-1}$. Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta := \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x = y\} \subseteq \mathbf{N}^2$ ν_{C2}–rekursiv ist.

(b) *(8 Punkte)* Es sei $\mathrm{sq} : P^{(1)} \longrightarrow P^{(1)}$ die durch

$$\mathrm{sq}(f)(n) := (f(n))^2 \quad \text{für alle } f \in P^{(1)} \text{ und } n \in \mathbf{N}$$

auf der Menge $P^{(1)}$ aller einstelligen berechenbaren Funktionen definierte Funktion. Zeigen Sie, dass sq (φ, φ)–berechenbar ist.

Anhang

Definition (Simulation)

D, D' seien Mengen, und es sei $\mathrm{Sim} \subseteq D \times D'$. Statt $(d, d') \in \mathrm{Sim}$ schreiben wir $d \,\mathrm{Sim}\, d'$ und sagen auch: d' *simuliert* d (bzgl. der *Simulationsrelation* Sim).

1. Seien $f :\subseteq D \longrightarrow D$ und $f' :\subseteq D' \longrightarrow D'$ gegeben.
   Wir sagen "f' *simuliert* f (bzgl. Sim)" und schreiben dafür $f \,\mathrm{Sim}\, f'$, gdw. für alle d, d' mit $d \,\mathrm{Sim}\, d'$ gilt:

$$\begin{array}{lll} & f(d) \text{ existiert} & \Longleftrightarrow & f'(d') \text{ existiert} \\ \text{und} & f(d) \text{ existiert} & \Longrightarrow & f(d) \,\mathrm{Sim}\, f'(d'). \end{array}$$

2. Seien $t :\subseteq D \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ und $t' :\subseteq D' \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ gegeben.
   Wir sagen "t' *simuliert* t (bzgl. Sim)" und schreiben $t \,\mathrm{Sim}\, t'$, gdw. für alle d, d' mit $d \,\mathrm{Sim}\, d'$ gilt:

$$\begin{array}{lll} & t(d) \text{ existiert} & \Longleftrightarrow & t'(d') \text{ existiert} \\ \text{und} & t(d) \text{ existiert} & \Longrightarrow & t(d) = t'(d'). \end{array}$$

Satz 7.1.9

Es sei Σ ein Alphabet, es sei $\nu : \mathbf{N} \longrightarrow \Sigma^*$ eine Standardnummerierung von Σ^*, und es sei $k \in \mathbf{N}$. Es sei $g :\subseteq (\Sigma^*)^k \longrightarrow \Sigma^*$. Dann gilt:

$$g \text{ berechenbar} \iff \nu^{-1} g \vec{\nu} :\subseteq \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N} \text{ berechenbar.}$$

Definition (primitive Rekursion)

- Für Funktionen $g :\subseteq \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}$ und $h_1, \ldots, h_m :\subseteq \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$ sei die Sustitution $\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m) : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ definiert durch

$$\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m)(\bar{x}) := g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_m(\bar{x}))$$

  für alle $\bar{x} \in \mathbf{N}^k$.

- Es seien $g : \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$ und $h : \mathbf{N}^{k+2} \longrightarrow \mathbf{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{lll} f(\bar{x}, 0) & = & g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) & = & h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{array}$$

  (für alle $\bar{x} \in \mathbf{N}^k$ und $y \in \mathbf{N}$) eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbf{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbf{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: f entsteht aus g und h durch *primitive Rekursion.*

Definition (primitiv–rekursive Funktionen)
Wir nennen

$$\mathrm{Gr} := \{\tilde{0}, Z, S\} \cup \{\mathrm{pr}_i^{(k)} \mid i, k \in \mathbf{N}, 1 \leq i \leq k\}$$

die Menge der *primitiv–rekursiven Grundfunktionen.*

Eine Funktion $f : \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$ heißt *primitiv–rekursiv*, gdw. wenn sie sich in endlich vielen Schritten aus der Menge Gr durch wiederholtes Anwenden der Operatoren Sub und Prk erzeugen lässt.

Wir bezeichnen die Menge der primitiv–rekursiven Funktionen mit PRK.

Satz (einige primitiv–rekursive Funktionen)
Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv–rekursiv:

1. $c_n^{(k)} : \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := n$ für alle $k, n \in \mathbf{N}$ (konstante Funktionen).
2. $s : \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$, $s(x, y) := x + y$ (Summe).
3. $V : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).
4. $d : \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$, $d(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
5. $m : \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$, $m(x, y) := x \cdot y$ (Multiplikation).

Satz (Satz von Rice)
Für jede Menge $F \subseteq \mathrm{P}^{(1)}$ mit $F \neq \emptyset$ und $F \neq \mathrm{P}^{(1)}$ ist die Menge

$$\varphi^{-1}[F] = \{i \in \mathbf{N} \mid \varphi_i \in F\} \text{ nicht rekursiv.}$$

Definition (ν–rekursiv)
Es sei ν eine Nummerierung von M und $X \subseteq M$. Dann heißt X *ν–rekursiv,* gdw. es eine berechenbare Funktion $g :\subseteq \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ gibt mit

$$g(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu(i) \in X \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i \in \mathrm{Def}(\nu)$.