Aufgabe 2 *(9 Punkte, (e) 2 Punkte, 1 Punkt sonst)*

Geben Sie Definitionen an für:

(a) $f^{-1}\{0\}$ für eine partielle Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

(b) Datenmenge D einer Registermaschine;

(c) $f :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist berechenbar;

(d) $\tilde{\mu}(h)$ für eine totale Funktion $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$;

(e) $\mathrm{Prk}(g, h)$ für totale Funktionen $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$;

(f) Nummerierung einer Menge M;

(g) $A \leq B$ für Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$;

(h) Notation einer Menge M.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

(i) *(je 2 Punkte)* Formulieren Sie:

  (a) das smn-Theorem,

  (b) den Satz von Rice.

(ii) *(3 Punkte)* Geben Sie 3 verschiedene Charakterisierungen der rekursiv-aufzählbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ an, die Sie im Kurs 01653 kennengelernt haben.

(iii) *(3 Punkte)* Geben Sie 3 verschiedene Charakterisierungen der Menge der berechenbaren Zahlenfunktionen an, die Sie im Kurs 01653 kennengelernt haben.

Aufgabe 4 *(11 Punkte)*

(a) *(4 Punkte)* Geben Sie ein LOOP-Programm P an, das das Quadrat einer Zahl berechnet, d.h. es soll

$$AC \circ \lambda(P) \circ EC(a) = a^2$$

für alle $a \in \mathbb{N}$ gelten.

(b) *(7 Punkte)* Zeigen Sie die Korrektheit des von Ihnen im Teil (a) gewählten LOOP-Programms P.

Beachten Sie bitte den Anhang. Dort finden Sie die Definition der Syntax und Semantik der LOOP-Programme.

Anhang

LOOP–Programme
Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei R_i eine Kurzschreibweise für die Zeichenreihe $R0\ldots0$ (R gefolgt von i Nullen).

a) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sind R_i+ und R_i- LOOP–Programme.

b) Wenn die Zeichenreihen P und Q LOOP–Programme sind und $i \in \mathbb{N}$ ist, dann sind auch

$$(P;Q)$$
$$(R_i \mid P \mid Q)$$
$$(R_i : P)$$

LOOP–Programme.

c) Keine anderen Zeichenreihen sind LOOP–Programme.

Semantik der LOOP–Programme:

Für jedes LOOP–Programm P sei eine Funktion $\lambda(P) : D \longrightarrow D$, wobei $D = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, definiert durch:

a) $\lambda(R_i+)(a_0, a_1, \ldots) := (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \ldots)$
$\lambda(R_i-)(a_0, a_1, \ldots) := (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \dot{-} 1, a_{i+1}, \ldots)$

b) $\lambda(P;Q) := \lambda(Q) \circ \lambda(P)$

c) $\lambda(R_i \mid P \mid Q)(d) := \begin{cases} \lambda(P)(d) & \text{falls } d(i) = 0 \\ \lambda(Q)(d) & \text{sonst} \end{cases}$

d) $\lambda(R_i : P)(d) := \lambda(P)^{d(i)}(d)$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle LOOP–Programme P und Q.

Definitionen $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, $\nu_{\mathbb{Z}}$, $\nu_{\mathbb{Q}}$:

a) $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}(k) := k$ für alle $k \in \mathbb{N}$;

b) $\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\nu_{\mathbb{Z}} \langle i, j \rangle := i - j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$;

c) $\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $\nu_{\mathbb{Q}} \langle i, j, k \rangle := \frac{i-j}{1+k}$ für alle $i, j, k \in \mathbb{N}$.

Berechenbare Zahlenfunktionen. Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t auf den natürlichen Zahlen sind berechenbar.

a) $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$, $\tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).

b) $Z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).

c) $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).

d) $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).

e) $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathrm{pr}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektionen).

f) $f(x_1, \ldots, x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).

g) $f(x, y) := x + y$ (Summe).

h) $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).

i) $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).

j) $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = \mathrm{div}$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).

k) $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).

l) $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, div sonst).

m) $\max(x, y)$.

n) $\min(x, y)$.

o) $t(x) := (1$ falls x Primzahl, 2 sonst).

p) $f(x) :=$ die x–te Primzahl.

q) $t(x, y) := (1$ falls $x < y$, 2 sonst). (Entsprechend für $\leq, =, \geq, >, \neq$ anstelle von $<$.)

r) Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich. $f(x) := (0$ falls $x \in A$, 1 sonst).

s) Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar. $f(x) :=$ (die kleinste Zahl y mit $g(y) = x$ falls $x \in \mathrm{Bild}(g)$, div sonst).

t) Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar, und es gelte $(\forall y)\, g(y) < g(y + 1)$. Dann sei $f(x) := \max\{y \mid g(y) \leq x\}$.

u) $f(a, b) := \mathrm{ggT}(a, b)$ falls $a, b > 0$, $f(a, b) := 0$ sonst.