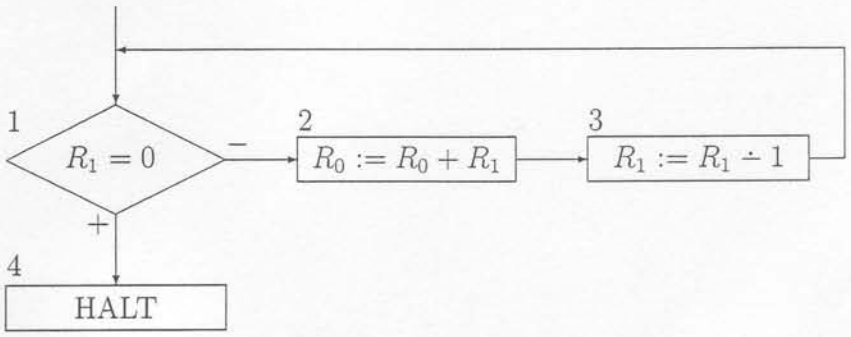
NK 10/11 (A26)

Aufgabe 1 *(11 Punkte)*

Das Flussdiagramm F einer einstelligen verallgemeinerten Registermaschine M sei wie folgt graphisch gegeben:



(a) *(1 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen über F treffen zu und welche ggf. nicht?

(1) $(\forall x)(\forall n)\, \mathrm{ES}^{3\cdot n}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = \big(1,(\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \ldots)\big)$.

(2) $(\forall n)(\forall x)\,\big(x \geq n \Rightarrow \mathrm{ES}^{3\cdot n}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = \big(1,(\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \ldots)\big)\big)$.

(3) $(\forall x)\, \mathrm{ES}^{3\cdot x}\,(1,(0,x,0,\ldots)) = (1,(\sum_{i=1}^{x} i, 0, 0, \ldots))$.

(Beachten Sie, dass $\sum_{i=j}^{k} a_i$ für den Fall $j > k$ definitionsgemäß gleich 0 ist.)

(b) *(7 Punkte)*

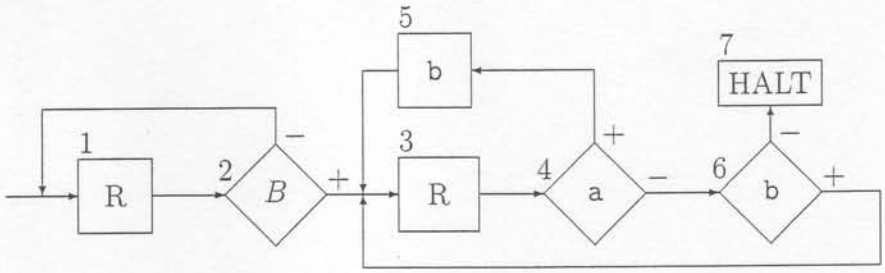
Beweisen Sie eine der korrekten Behauptungen aus (a) durch vollständige Induktion.

(c) *(3 Punkte)*

Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $f_M(x) = \sum_{i=1}^{x} i$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 *(11 Punkte)*

Das Flussdiagramm F einer 2-stelligen Bandmaschine M über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ sei wie folgt gegeben:



Ferner sei $\Gamma := \Sigma \cup \{B\}$. Wir behaupten, dass für alle $w \in \Sigma^*$, $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$ gilt:

(1) $(\exists\, t \in \mathbb{N})\, \mathrm{ES}^t\,(1, (v, c, wBu)) = (3, (vcw, B, u))$.

(2) $(\exists\, t \in \mathbb{N})\, \mathrm{ES}^t\,(3, (v, c, wBu)) = \left(7, (vc\,\mathsf{b}^{\lg(w)}, B, u)\right)$.

Beweisen Sie

(a) *(7 Punkte)*

die Behauptung (2) durch vollständige Induktion nach der Länge von w, sowie

(b) *(4 Punkte)*

$f = f_M$ mit Hilfe von (1) und (2), wobei $f : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert ist durch $f(w_1, w_2) := \mathsf{b}^{\lg(w_2)}$ für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$.

Aufgabe 3 *(13 Punkte)*

(a) *(6 Punkte)*

Es sei $\Sigma := \{\mathsf{a}\}$ ein einelementiges Alphabet. Ferner sei die Funktion $g : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert durch

$$g(v, w) := vw \text{ für alle } v, w \in \Sigma^*.$$

Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und des Satzes über den Zusammenhang zwischen Zahlen- und Wortberechenbarkeit (s. Anhang), dass g berechenbar ist.

(b) *(7 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x, 0) := 1 \text{ und } f(x, y+1) := (x + y + 1) \cdot f(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist. (Dabei dürfen Sie die im Anhang angegebenen primitiv-rekursiven Funktionen benutzen.)

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*
Es sei $2^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$. Beweisen Sie durch Diagonalisierung, dass es keine Nummerierung $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ gibt.

Aufgabe 5 *(11 Punkte)*
Es seien A und B Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(a) *(8 Punkte)*
Beweisen Sie (1) und (2).

(1) *(3 Punkte)*
A rekursiv und B rekursiv-aufzählbar $\Rightarrow A \cap B$ und $A \cup B$ rekursiv-aufzählbar.

(2) *(5 Punkte)*
A rekursiv und $A \cup B$ rekursiv-aufzählbar $\Rightarrow B \setminus A$ rekursiv-aufzählbar.

(b) *(3 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die Aussage „A rekursiv und $A \cap B$ rekursiv-aufzählbar $\Rightarrow B \setminus A$ rekursiv-aufzählbar" nicht immer gilt.

Aufgabe 6 *(11 Punkte)*
Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv-aufzählbar. Beweisen Sie:

$$\mathrm{card}\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Def}\,(\varphi_i) = A\} = \infty.$$

Aufgabe 7 *(13 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)*
Es sei ν_{C2} die Cantorsche Nummerierung von $\mathbb{N}^2$, also $\nu_{C2} = \pi^{-1}$. Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = y\} \subseteq \mathbb{N}^2$ ν_{C2}-rekursiv ist.

(b) *(8 Punkte)*
Es sei $\texttt{twice} : P^{(1)} \to P^{(1)}$ die durch

$$\texttt{twice}(f)(n) := 2 \cdot f(n) \text{ für alle } f \in P^{(1)} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

auf $P^{(1)}$ definierte Funktion. Zeigen Sie, dass $\texttt{twice}$ (φ, φ)-berechenbar ist.

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) := 2 \cdot x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ berechenbar ist.

Aufgabe 9 *(10 Punkte)*
Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?
(Bei dieser Aufgabe erhalten Sie für jede richtige Antwort (entweder „richtig" oder „falsch") einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann pro Teilblock keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

1. + (a) Es gibt eine nicht berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $f = f_M$ für eine geeignete verallgemeinerte Registermaschine M gilt.
   - (b) Keine μ-rekursive Funktion ist primitiv-rekursiv.
   + (c) Jede primitiv-rekursive Funktion ist WHILE-berechenbar.
   + (d) Ist Σ ein zweielementiges Alphabet, dann gibt es genau zwei Standardnummerierungen von Σ^*.
   - (e) Die universelle Funktion u_φ zur Standardnummerierung φ ist total.
2. - (f) Jede Teilmenge einer rekursiven Menge ist rekursiv-aufzählbar.
   - (g) Die Menge $A := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \varphi_x(y) = \text{div}\}$ ist rekursiv-aufzählbar, aber nicht rekursiv.
   + (h) Das Äquivalenzproblem ist nicht rekursiv.
   + (i) Die Menge PP aller PASCAL-Programme ist rekursiv.
   + (j) Jede n-korrekte Beweissystem V_i ist nicht n-vollständig.