**Aufgabe 1** *(12 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen treffen zu und welche sind falsch? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}.\ \log n \leq n$;

(b) $\log n \in O(n)$;

(c) $O(n) \subseteq \mathrm{FZEIT}(n)$;

(d) $\mathrm{FZEIT}(\log n) \subsetneq \mathrm{FBAND}(n)$.

**Aufgabe 2** *(13 Punkte)*

Beweisen Sie: $\mathsf{BAND}(n) \subsetneq \mathsf{BAND}(n^2)$. Zeigen Sie dazu, dass alle Voraussetzungen des Bandhierarchiesatzes erfüllt sind (auch die Bandkonstruierbarkeit).

**Aufgabe 3** *(7 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Geben Sie bei den falschen Aussagen jeweils eine korrigierte Version an.

(a) Die Komplexitätsklasse $\mathsf{NZEIT}(f)$ ist nur für totale Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert.

(b) Die Komplexitätsklasse $\mathsf{NP}$ ist die Vereinigung aller $\mathsf{NZEIT}(f)$, wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total ist.

(c) Es sei $\Sigma$ ein Alphabet, und $L, M \subseteq \Sigma^*$ seien Sprachen. Genau dann ist $L$ polynomiell reduzierbar auf $M$ ($L \leq_{pol} M$), wenn es eine Funktion $f \in \mathsf{FP}$ gibt, die jedes Element aus $L$ in $M$ abbildet.

(d) Ist eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ $\mathsf{NP}$-vollständig, dann ist sie auch $\mathsf{NP}$-hart.

## Aufgabe 4 *(12 Punkte)*

Im Folgenden bezeichne $d(k)$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ die Dualzahldarstellung von $k$.

Es sei RUCKSACK-HALB die folgende Menge:

$$\{d(N)\#d(k_1)\ldots\#d(k_n) \mid n \geq 1,\ N, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N},\ N \text{ gerade},\ \exists M \subseteq \{1, \ldots, n\},\ \textstyle\sum_{i \in M} k_i = \frac{N}{2}\}.$$

(a) Zeigen Sie RUCKSACK-HALB $\in$ NP, indem Sie die Arbeitsweise einer geeigneten Kontrollturingmaschine beschreiben und eine Zeitbedarfsabschätzung vornehmen. (Es ist kein Korrektheitsbeweis erforderlich.)

(b) Beweisen Sie die NP-Vollständigkeit von RUCKSACK–HALB unter Verwendung derjenigen von RUCKSACK (siehe Anhang).

## Aufgabe 5 *(12 Punkte)*

Sei $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \lg(w) > 2,\ \text{das zweite und das letzte Zeichen von } w \text{ ist } b\}.$$

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck $\alpha$ mit $L(\alpha) = L$ an.

(Sie brauchen hier nicht zu beweisen, dass $L(\alpha) = L$ gilt.)

(b) Geben Sie einen endlichen Automaten $A$ mit höchstens vier Zuständen an, für den $L(A) = L$ gilt, und skizzieren Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

(Sie brauchen hier nicht zu beweisen, dass $L(A) = L$ gilt.)

(c) Konstruieren Sie zu dem Automaten aus Aufgabenteil (b) mit Hilfe eines im Kurs angegebenen Verfahrens einen deterministischen und vollständigen Automaten $A'$ mit $L(A') = L(A)$ und skizzieren Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

## Aufgabe 6 *(14 Punkte)*

Sei $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Mengen, dass die folgende Sprache $L \subseteq \Sigma^*$

$$L := \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m < n\}$$

nicht regulär ist.

(b) Die kontextfreie Grammatik $G = (\{\mathtt{S}\}, \Sigma, R, \mathtt{S})$ sei durch folgende Regelmenge bestimmt

$$\mathtt{S} \rightarrow \mathtt{aSb} \mid \mathtt{Sb} \mid \mathtt{b}.$$

Zeigen Sie, dass sich mit $G$ nur Worte der folgenden Form ableiten lassen ($k, l, m, n \in \mathbb{N}$):

(i) $\mathtt{a}^k\mathtt{Sb}^l$ mit $k \leq l$,

(ii) $\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n$ mit $m < n$.

(c) Beweisen Sie, dass die kontextfreie Grammatik $G$ aus Aufgabenteil (b) die Sprache $L$ aus Aufgabenteil (a) erzeugt, dass also $L(G) = L$ gilt.

(Hinweis: Sie können die Aussage von Aufgabenteil (b) auch dann verwenden, wenn Sie diesen Teil nicht bearbeitet haben.)

## Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Die kontextfreie Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ sei gegeben durch das Nichtterminalalphabet $\Pi = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{U}\}$, das Terminalalphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und die wie folgt bestimmte Regelmenge $R$

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \rightarrow & \mathtt{TT} \mid \mathtt{T} \\ \mathtt{T} & \rightarrow & \mathtt{aTb} \mid \mathtt{U} \\ \mathtt{U} & \rightarrow & \mathtt{ab}. \end{array}$$

Bestimmen Sie zu dieser Grammatik $G$ mit Hilfe des im Kurs angegebenen Verfahrens eine Grammatik $G'$ in Chomsky-Normalform mit der Eigenschaft $L(G') = L(G)$.

# Anhang

## $O$-Notation

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine (totale) Funktion. Dann ist

$$O(g) := \left\{ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \exists c.\ \forall n.\ f(n) \leq c \cdot g(n) + c \right\},$$

$$o(g) := \left\{ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)+1}{g(n)+1} = 0 \right\}.$$

## Bandhierarchiesatz

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bandkonstruierbar, $\log \in O(g)$, $f \in O(g)$ und $g \notin O(f)$. Dann gilt $\mathsf{BAND}(f) \subsetneq \mathsf{BAND}(g)$.

## Rucksackproblem

Es ist RUCKSACK die folgende Menge:

$$\{d(N)\#d(k_1)\ldots\#d(k_n) \mid \ n \geq 1,\ N, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$$
$$\exists M \subseteq \{1, \ldots, n\}.\ \textstyle\sum_{i \in M} k_i = N\}.$$

## Pumping-Lemma für reguläre Mengen

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär.
Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $\lg(z) = n$ gilt:

$$\exists u, v, w \in \Sigma^*.\ (z = uvw \wedge v \neq \varepsilon \wedge \forall i \geq 0.\ tuv^iw\bar{t} \in L).$$

## Chomsky-Normalform

Eine kontextfreie Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, S)$ ist genau dann in *Chomsky-Normalform*, wenn alle Regeln die Form $A \to BC$ oder $A \to a$ haben ($A, B, C \in \Pi$, $a \in \Sigma$).