Einführung in die Theoretische Informatik B
Lösungsvorschläge zur
Klausur am 29. Juli 2006
Sommersemester 2006

Aufgabe 1

Wir geben die Satznummern aus dem Kurstext an. Dort können Sie die korrekte Formulierung des Satzes nachlesen.

(i) Satz 3.4.4

(ii) Satz 3.4.2

(iii) Satz 6.2.3

(iv) Satz 8.4.4

(v) Satz 9.2.13

Aufgabe 2

Analog zu Aufgabe 1 geben wir hier nur die Nummern der Definitionen an. Im Kurstext finden Sie die korrekte Formulierung.

(i) Definition 2.2.1

(ii) Definition 3.3.1

iii) Definition 4.3.2

(iv) SAT ist in Definition 5.3.2 gegeben.
(Es reicht SAT=$\{\gamma_{WFF}(F) \mid F \in WFF$, F ist erfüllbar$\}$.)

(v) Definition 7.3.1

(vi) Definition 8.3.2.3

(vii) Definition 9.3.2

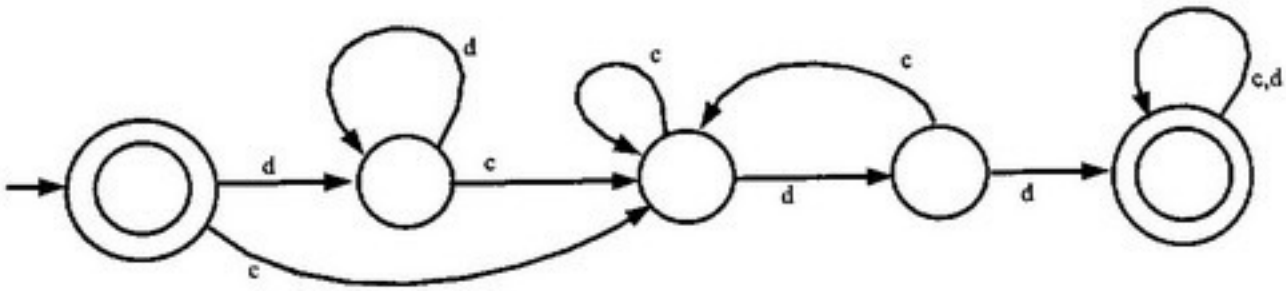
Aufgabe 3

(a) (i) $\alpha_1 = d^* c d^* c d^*$

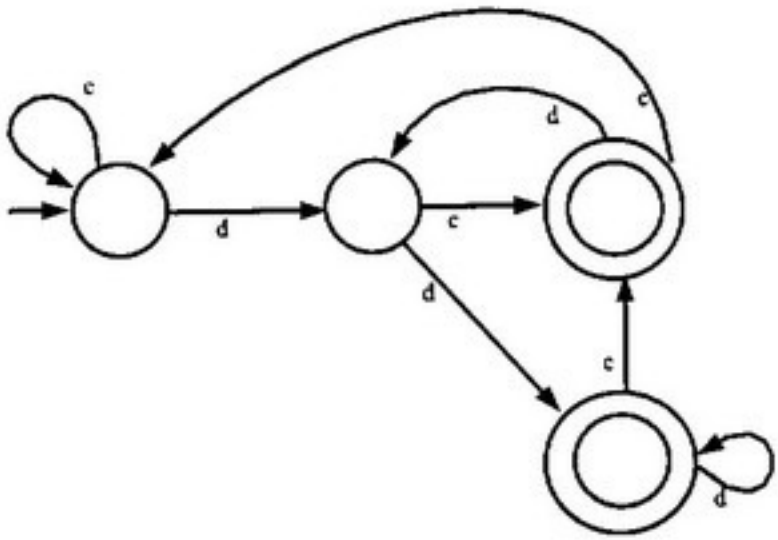
(ii) $\alpha_2 = d(c \cup d)^* \cup c \cup cd \cup cdcd$

(iii) $\alpha_3 = (c \cup d)(c \cup d)^*$

(b)



(c)



(d)

$G = (\{S, T\}, \{c, d\}, R, S)$
mit R gegeben durch: $S \to cT, T \to cT \mid dT \mid cd \mid dd$

Aufgabe 4

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Für alle k-Band TM ist der Bandbedarf s_M eine totale Funktion.
[ ]	[X]	Falls $f \in O(n)$ gilt, dann ist f berechenbar.
[X]	[ ]	Für alle Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt: $O(f) \subseteq O(g) \Longrightarrow \mathrm{ZEIT}(f) \subseteq \mathrm{ZEIT}(g)$.
[ ]	[X]	Es ist bekannt, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\mathrm{BAND}(\log n) \subseteq \mathrm{ZEIT}(n^k)$.
[X]	[ ]	Die Funktion $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist bandkonstruierbar.
[X]	[ ]	Es ist bekannt, dass $\mathrm{ZEIT}(n) \neq \mathrm{ZEIT}(n \log n)$ gilt.
[ ]	[X]	Sei M eine Kontrollturingmaschine mit Eingabealphabet Σ. Wenn es für $x \in \Sigma^*$ ein $y \in \{0,1\}^*$ gibt, so dass $\tau_M(x,y) = 0$ gilt, dann gilt $x \notin L_M$.
[X]	[ ]	$\mathrm{NZEIT}(n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^n)$

(ii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[X]	[ ]	Für alle $A \in \mathrm{P}$ gilt $A \in \mathrm{NP}$.
[ ]	[X]	Es ist bekannt, dass $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{NP}$ gilt.
[X]	[ ]	$\mathrm{SAT} \leq_{pol} \mathrm{3SAT}$
[ ]	[X]	Es sind keine vollständigen Mengen für NLOGSPACE bekannt.
[X]	[ ]	Aus $A \leq_{pol} B$ und $B \in$PSPACE folgt $A \in$ PSPACE.
[X]	[ ]	Für alle $A \in \mathrm{P}$ gilt $A \leq_{pol} \{0,1\}$.
[X]	[ ]	$\mathrm{P}=\mathrm{NP} \Leftrightarrow \mathrm{3SAT} \in \mathrm{P}$
[X]	[ ]	Es ist bekannt, dass PSPACE=NPSPACE gilt.

(iii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei.
[ ]	[X]	Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.
[X]	[ ]	Die Sprache $\{uu^R \mid u \in \{0,1\}^*\}$ ist kontextfrei.
[ ]	[X]	Die Sprache $\{u\$u \mid u \in \{0,1\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.
[X]	[ ]	Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid T\,,\ T \to aT \mid S\}, S)$. $L(G)$ ist regulär.
[X]	[ ]	Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aTb \mid T\,,\ T \to aT \mid S\}, S)$. G ist eine kontextfreie Grammatik.
[X]	[ ]	Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid T\,,\ T \to aT \mid a\}, S)$. Es ist $\mathrm{L}(G)=\{a^m b^n \mid m,n \in \mathbb{N}, m > n\}$.
[X]	[ ]	Für zwei beliebige regulären Mengen L_1 und L_2 ist entscheidbar, ob $L_1 = L_2$ gilt.
[ ]	[X]	Für zwei beliebige kontextfreie Mengen L_1 und L_2 ist entscheidbar, ob $L_1 = L_2$ gilt.

Aufgabe 5

(i) Bei der Aufgabe 5(i) hat sich leider ein Schreibfehler eingeschlichen. Die Aufgabe wurde deshalb aus der Wertung genommen. Es sollte eigentlich folgendes bewiesen werden:
Aus $f(n)$ zeitkonstruierbar folgt, dass auch $f(n) \cdot \log f(n)$ zeitkonstruierbar ist. Wir zeigen nun diese Aussage auf zwei verschiedene Weisen:

(a) Da f zeitkonstruierbar ist, existiert eine TM M mit $f_M(0^n) = 0^{f(n)}$ und $\tilde{t}_M \in 0(f(n))$. Wir konstruieren nun eine TM M' mit $f_{M'}(0^n) = 0^{f(n) \cdot \log f(n)}$ und $\tilde{t}_M \in O(f(n) \cdot \log f(n))$.

Eingabe: 0^n

1.) Berechne mit M $0^{f(n)} := x$.
2.) Ermittle die Länge von x und stelle sie in dualer Form da (zählen). Sei y die Dualdarstellung der Länge von x, also $y = d(lg(x)) = d(f(n))$.
3.) Schreibe $lg(y)$–mal $x = 0^{f(n)}$ auf das Ausgabeband.

Es ist $f_{M'}(0^n) = 0^{f(n) \cdot lg(y)} = 0^{f(n) lg(d(f(n)))} = 0^{f(n) \cdot lg(f(n))}$.

Zeitanalyse: (Eingabe 0^n):

Schritt 1.) $O(f)$, da $\tilde{t}_M \in O(f)$.
Schritt 2.) $O(lg(x)) = O(f)$(siehe Kapitel 2.1-2, Kurseinheit 1).
Schritt 3.) $O(f(n) \cdot lg(y)) = O(f(n) \cdot \log f(n))$.
Insgesamt also $\tilde{t}_{M'} \in O(f(n) \cdot \log f(n))$. Somit ist $f(n) \cdot \log f(n)$ zeitkonstruierbar.

(b) Beweisskizze:

(i) Zeige zuerst, dass $n \log n$ zeitkonstruierbar ist.
(ii) Mit Übungsaufgabe 2 auf Seite 29 der Kurseinheit 2 und (i) folgt die Aussage.

Wir zeigen nun noch, dass die in der Klausur zu beweisende Aussage falsch ist.
Sei $M \in$ ZEIT $(2^{2^n}) \setminus$ ZEIT (2^{n^2}) mit $M \subseteq \{0,1\}^*$. Eine solche Menge existiert auf Grund des Zeithierachiesatzes. Wir definieren nun die Funktion f wie folgt:

$$f(n) = \begin{cases} 2^n & , \; falls\ last(d(n) \in M \\ 2^{n+1} & , \; falls\ last(d(n)) \notin M \end{cases}$$

Daraus folgt

$$n \cdot \log f(n) = \begin{cases} n^2 & , \; falls\ last(d(n) \in M \\ n^2 + n & , \; falls\ last(d(n)) \notin M \end{cases}$$

Hierbei ist $last(\varepsilon) > \varepsilon$ und $last(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_2 \ldots x_n$ $x_i \in \{0,1\}$. Betrachten Sie die folgende Maschine M' ($d(n)$ ist die Dualdarstellung von n).

Eingabe: $x \in \{0,1\}^*$

1.) Berechne $d^{-1}(1x) =: y$.

2.) Berechne $0^{y \cdot \log f(y)} =: z_1$.

3.) Berechne $0^{y^2} =: z_2$.

4.) Ist $z_1 = z_2$, dann halte. Ansonsten schreibe etwas auf das Ausgabeband und halte.

Es ist $\tilde{x} = last(d(d^{-1}(1\tilde{x})))$ für alle $\tilde{x} \in \Sigma$. Daraus folgt: $x \in L_{M'} \Leftrightarrow 0^{y^2} = 0^{y \cdot \log f(y)} \Leftrightarrow last(d(y)) \in M \Leftrightarrow last(d(d^{-1}(1x))) \in M \Leftrightarrow x \in M$. Also $L_{M'} = M$.
Angenommen $n \cdot \log f(n)$ ist zeitkonstruierbar. Dann ergibt die Zeitanalyse ($n := lg(x)$):

Schritt 1.) (y in regulärer Darstellung $O(2^n)$
Schritt 2.) $O(lg(y) \cdot \log f(lg(y))) = O(2^n \cdot \log f(2^n)) = O(2^n)$
Schritt 3.) $O(2^{2^2})$
Schritt 4.) $O(2^{n^2})$
Insgesamt: $O(2^{n^2})$

Daraus folgt $M \in \text{ZEIT}(2^{n^2})$. Widerspruch. Somit kann $n \cdot \log f(n)$ nicht zeitkonstruierbar sein.
Es bleibt noch zu zeigen, dass f zeitkonstruierbar ist.
Eingabe: 0^n
1.) Berechne $last(d(n)) =: x$
2.) Teste ob $x \in M$. Falls ja, gebe 0^{2^n} aus, sonst $0^{2^{n+1}}$.
Zeit:
1.) $O(n)$. (Bem. $lg(x) = \log n$)
2.) $x \in M$ testet man in $O(2^{2^{\log n}} = O(2^n)$, da $M \in$ZEIT(2^{2^n}). 0^{2^n} bzw. $0^{2^{n+1}}$ zu berechnen und auszugeben braucht $0(2^n)$ Zeit. Insgesamt also $0(2^n)$ Zeit. Damit ist f zeitkonstruierbar.

(ii) Die Aussage gilt nicht. Für $f(n) = n$ gilt beispielsweise, dass $\log f(n)$ nicht zeitkonstruierbar ist.

Aufgabe 6

(i) Angenommen $L \in \text{ZEIT}(n^3)$; dann existiert eine TM M mit $L_M = L$ und $\tilde{t}_M \in O(n^3)$.

Betrachte folgende TM M':

Eingabe x.
1.) Schreibe $0x$ auf ein Band und prüfe mit M , ob $0x \in L_M = L$: falls ja, halte. Falls nein, schreibe etwas aufs Ausgabeband und halte.

Es gilt $x \in L_{M'} \Leftrightarrow 0x \in L \Leftrightarrow x \in L_1$, also $L_{M'} = L_1$.
Offensichtlich gilt $\tilde{t}_{M'} \in O(n^3)$, da $\tilde{t}_M \in O(n^3)$. Somit $L_1 \in \text{ZEIT}(n^3)$.
Widerspruch.

(ii) L_1' liest in P, da $L_1 \in P$ (prüfen, ob erstes Zeichen eine 0, denn eine polynominalzeitbeschränkte Maschine für L_1 auf den Rest). Analog folgt für L_2', dass $L_2' \in MP$. Die Vereinigung zweier Sprachen aus NP liegt wieder in NP, Somit $L \in NP$.
Betrachte die folgende Funktion: $f : \Sigma^* \to \Sigma^*, f(w) = 1w$. Offensichtlich $f \in FP$.

Es gilt:
$w \in L_2 \Rightarrow 1w \in L_2' \subseteq L$ und $1w \in L \Rightarrow 1w' \in L_2' \Rightarrow w \in L_2$:
Also $w \in L_2 \Leftrightarrow f(w) \in L$. Daraus folgt: $L_2 \leq_{pol} L$. Somit ist L $NP-$hart, da L_2 und Voraussetzung NP-hart ist. Wir haben also gezeigt $L \in NP$ und L ist NP-hart. Somit ist L NP-vollständig.

Aufgabe 7

Sei $L := \{a^n 0^m 1 b^n \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$.
Wir zeigen zuerst $L \subseteq L(G)$:

Es gibt:

(1) $\forall n. S \xrightarrow{n} a^n S b^n$.

(2) $\forall m. T \xrightarrow{*} 0^m T$.

zu (1)

$n = 0 :$ $a^o S b^o = S$.

$n = n + 1$ Nach IV gilt $S \xrightarrow{*} a^n S b^n$. Anwendung von $S \to aSb$ liefert $S \xrightarrow{*} a^n S b^n \to a^{n+1} S b^{n+1}$.

zu (2):

$n = 0$ Trivial.

$m = n + 1$ Nach IV gilt $T \xrightarrow{*} 0^m T$. Anwendung von $T = 0T$ liefert $T \xrightarrow{*} 0^{m+1} T$.

Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ nach $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit (1) folgt $S \xrightarrow{*} a^{n-1} S b^{n-1}$. Es gilt $a^{n-1} S b^{n-1} \to a^n T b^n$. Mit (2) folgt $a^n T b^n \xrightarrow{*} a^n 0^n T b^n$. Mit Regel $T \to 1$ folgt $S \xrightarrow{*} a^n 0^n 1 b^n$.
Wir zeigen nun $L(G) \subseteq L$.

Wir beweisen:
(3)

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad S \xrightarrow{n} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (w = a^n S b^n) \text{ oder } (w = a^n T b^n, \text{ und } n > 0) \\ (w = a^k 0^l T b^k) \text{ und } k + l = n \text{ und } k > 0) \\ (w = a^k 0^l T b^k) \text{ und } (k + l = n - 1 \text{ und } k > 0) \end{array}$$

Aus (3) folgt sofort $L(G) \subseteq L$.

Beweis zu (3):

$n = 0$: S kann in 0 Schritten nur nach S abgeleitet werden. Es ist $a^o S b^o = S$.

$n = n + 1$ $S \xrightarrow{n+1}$ W. Dann gibt es W', so dass $S \xrightarrow{n} W' \xrightarrow{1} W$. Auf W' kann die W angewendet werden.

<u>Fall 1:</u> $W' = a^n S b^n$
Dann sind für W folgende Fälle möglich: $W = a^{n+1} S b^{n+1}$ oder ($W = a^{n+1} T b^{n+1}$ und $n + 1 > 0$).

<u>Fall 2:</u> $W' = a^n T b^n$ und $n > 0 \Rightarrow (W = a^n 0 T b^n$ und $n > 0)$ oder ($W = a^n 1 b^n$ und $n > 0$)

<u>Fall 3:</u> $W' = a^k 0^l T b^k$ und $k + l = n$ und $k > 0$
$\Rightarrow (W = a^k 0^{l+1} T b^k$ und $k + l + 1 = n + 1$ und $k > 0)$ oder
($W = a^k 0^l 1 b^k$ und $k + l = n$ und $k > 0$)

<u>Fall 4:</u> $W' = a^k 0^l 1 b^k$ ist nicht möglich.

Aufgabe 8

Es gilt

$$
\begin{aligned}
W \in Drittel(A) &\Leftrightarrow WWW \in L(A). \\
\textit{und} & \\
WWW \in L(A) &\Leftrightarrow \exists p, q.Q_A.\exists r \in F_A.(\delta_A(q_o, w) = p \ \wedge \delta_A(p, w) = q \ \wedge \delta_A(q, w) = r) \\
&\Leftrightarrow \exists p, q \in Q_A.\ \exists r \in F_A.(W \in L(A_{p_o}, p) \wedge W \in L(A_/p, q =) \wedge W \in L(A_{q,r})) \\
&\Leftrightarrow \exists p, q \in QA.\exists r \in F_A.W \in L(A_{p,p}) \cap L(A_{p,q}) \cap L(A_{q,r}) \\
&\Leftrightarrow W \in \bigcup_{(p,q,r) \in \mathbb{Q}_A x \mathbb{Q}_A x F_A} L(A_{p,p} \cap L(p, q) \cap L(A_{p,r})
\end{aligned}
$$

$L(A_{po,p}) \cap L(A_{p,q}) \cap L(A_{q,r})$ ist ein Schritt von regulären Mengen und daher regulär. Somit haben wir Drittel (A) als endliche Vereinigung von regulären Mengen dargestellt. Daher ist Drittel(A) regulär (siehe Satz 8.4.1).