Aufgabe 1: s. Musterlösung

1654 HK
1. 8. 2009

**Aufgabe 2** *(11 Punkte)*

(a) Geben Sie Definitionen an für:

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bandkonstruierbar,

(ii) $\mathrm{FBAND}_\Sigma(f)$,

(iii) die Sprache $L_M$ einer Kontrollturingmaschine $M$,

(iv) NP-vollständige Sprache,

(v) Chomsky-Normalform.

(5 Punkte)

(b) Formulieren Sie

(i) den Zusammenhang zwischen Zeit- und Band-Komplexitätsklassen,

(ii) den Zeithierarchiesatz,

(iii) das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(6 Punkte)

**Aufgabe 3** *(12 Punkte)*

Sei $L$ eine beliebige Sprache, $L \subseteq \mathbb{N}$, und bezeichne $\mathrm{cf}_L$ wie gewohnt die charakteristische Funktion von $L$. Zeigen Sie:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{BAND}(\log^k(n) + \mathrm{cf}_L(n)) \subsetneq \mathrm{BAND}(n) \subsetneq \mathrm{BAND}(n \cdot \log(n) + \mathrm{cf}_L(n))$$

**Aufgabe 4** *(14 Punkte)*

Geben Sie alle Ihnen bekannten nicht-trivialen Inklusionen zwischen den folgenden Klassen an und begründen Sie 3 dieser Inklusionen:
P, LOGSPACE, NLOGSPACE, $\mathrm{BAND}(n^3)$, $\mathrm{BAND}(\log^3(n))$, $\mathrm{ZEIT}(2^n)$, PSPACE, NPSPACE.
(Sollten Inklusionen als echt bekannt sein, so werten wir diese nur, wenn sie als echt notiert sind.)

**Aufgabe 5** *(12 Punkte)*

Gibt es NP-vollständige Sprachen in BAND($\lceil\sqrt{n}\rceil$) ? (Beweis)

**Aufgabe 6** *(16 Punkte)*

Geben Sie für die Sprache

$$L := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ endet mit einem } a \text{ und } \#_a(w) \geq 3\}$$

a) einen determinierten endlichen Automaten $A$ an, mit $L(A) = L$,
(2 Punkte)

b) einen determinierten endlichen Automaten $A$ an, mit $L(A) = \{a,b\}^* \backslash L$,
(2 Punkte)

c) eine rechtslineare Grammatik $G$ in Normalform an, mit $L(G) = L$.
(2 Punkte)

d) Zeigen Sie die Korrektheit <u>einer</u> Ihrer Automaten <u>oder</u> Ihrer Grammatik.
(10 Punkte)

**Aufgabe 7** *(17 Punkte)*

Gegeben sei die Sprache

$$L := \{xay \in \{a,b\}^* \mid lg(x) = lg(y) \wedge \#_b(x) = \#_a(y)\}.$$

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G$ mit $L(G) = L$ an.
(2 Punkte)

b) Geben Sie einen Kellerautomaten $A$ mit $N(A) = L$ an.
(4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass $L$ nicht regulär ist.
(5 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass $L \cap L^R$ nicht kontextfrei ist.
(6 Punkte)