Aufgabe 1 *(18 Punkte)*

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können für jede Teilaufgabe nur nicht negative Punktzahlen erzielt werden.

Um eine Frage zu beantworten, kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihre Lösung für diese Aufgabe abzugeben!

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt? (f bezeichne hierbei stets eine totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.)

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Wenn f bandkonstruierbar ist, dann ist f berechenbar.
[ ]	[ ]	Wenn $O(f) = O(n)$, dann ist f bandkonstruierbar.
[ ]	[ ]	Es ist bekannt, dass $\mathrm{BAND}(f) \neq \mathrm{BAND}(n)$ aus $O(f) \neq O(n)$ folgt.
[ ]	[ ]	Es ist bekannt, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\mathrm{NBAND}(\log n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^{k \cdot \log n})$.
[ ]	[ ]	Die Funktion $f(n) = \lceil \sqrt[1013]{2^n} \rceil$ ist zeitkonstruierbar.
[ ]	[ ]	Es ist bekannt, dass $\mathrm{ZEIT}(n^2) \neq \mathrm{ZEIT}(n^2 \log n \log\log n)$ gilt.

(ii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Für alle $A \in \mathrm{P}$ gilt $A \cap \{0,1\}^* \in \{\{0,1\}^* \setminus A \mid A \in \mathrm{NP}\}$.
[ ]	[ ]	Es ist bekannt, dass $\mathrm{LOGSPACE} \subsetneq \mathrm{NP}$ gilt.
[ ]	[ ]	$\mathrm{GAP} \leq_{pol} \mathrm{3SAT}$
[ ]	[ ]	Es sind vollständigen Mengen für $\mathrm{NBAND}(2^n)$ bekannt.
[ ]	[ ]	Aus $A \leq_{pol} B$ folgt $\{0,1\}^* \setminus A \leq_{pol} \{0,1\}^* \setminus B$.
[ ]	[ ]	Es ist bekannt, dass PSPACE=NPSPACE gilt.

(iii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Die Sprache $\{a^n b^m c^p \mid n, m, p \in \mathbb{N}, m \neq n \text{ oder } p \neq m\}$ ist kontextfrei.
[ ]	[ ]	Die Sprache $\{u1u^R \mid u \in \{0,1\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.
[ ]	[ ]	Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid T,\ T \to aT \mid a \mid Tb \mid b\}, S)$. $L(G)$ ist regulär.
[ ]	[ ]	Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid T,\ T \to aT \mid a\}, S)$. Es ist $\mathrm{L}(G) = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$.
[ ]	[ ]	Für zwei beliebige reguläre Mengen L_1 und L_2 ist entscheidbar, ob $L_1 \neq L_2$ gilt.
[ ]	[ ]	Für zwei beliebige kontextfreie Mengen L_1 und L_2 ist $L_1 \cap L_2$ kontextfrei.

Aufgabe 2 *(8 Punkte, je 2 pro Teilaufgabe)*

Geben Sie Definitionen an für:

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bandkonstruierbar,

(ii) $L \leq_{pol} M$ für $L, M \subseteq \Sigma^*$, Σ endliches Alphabet,

(iii) NP-vollständige Sprachen,

(iv) $L(A)$ für einen endlichen Automaten $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$,

Aufgabe 3 *(6 Punkte, je 3 pro Teilaufgabe)*

Formulieren Sie

(i) den Zeithierarchiesatz,

(ii) das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*

Sei Σ ein Alphabet und $\{0, 1\} \subseteq \Sigma$. Gegeben seien die Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $L_1 \in \mathrm{P} \backslash \mathrm{ZEIT}(n^4)$,

(2) L_2 ist NP-vollständig.

Zu L_1 und L_2 definieren wir $L_1' := \{0w \mid w \notin L_1\}$ und $L_2' := \{1w \mid w \notin L_2\}$ sowie

$$L := L_1' \cup L_2'.$$

Zeigen Sie:

(i) $L \notin \mathrm{ZEIT}(n^4)$. (4 Punkte)

(ii) $\Sigma^* \setminus L$ ist NP-vollständig. (4 Punkte)

Aufgabe 5 *(8 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass es zu jeder berechenbaren Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine **bandkonstruierbare** Funktion g mit $f \in O(g)$ gibt. (4 Punkte)

(ii) Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $O(n) = O(g)$ an, die **nicht zeitkonstruierbar** ist. Begründen Sie kurz, warum Ihr g nicht zeitkonstruierbar ist. (4 Punkte)

Aufgabe 6 *(14 Punkte)*

Zeigen Sie, dass Sprachen $L \neq \emptyset$ in ZEIT(n^{n^n}) existieren, die nicht NP-vollständig sind.

Hinweis: Wenn NP=P dann ist fast jede Sprache in P auch NP-vollständig.
In welcher deterministischen Komplexitätsklasse ist NP enthalten?

Aufgabe 7 *(12 Punkte)*

Geben Sie für die Sprache

$$L := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ beginnt mit einem } a \text{ und endet mit } bba\}$$

a) einen regulären Ausdruck α an, mit $L(\alpha) = L$,
(3 Punkte)

b) einen determinierten endlichen Automaten A an, mit $L(A) = L$,
(3 Punkte)

c) einen determinierten endlichen Automaten A' an, mit $L(A') = \{a,b\}^* \backslash L$,
(3 Punkte)

d) eine rechtslineare Grammatik G in Normalform an, mit $L(G) = L$.
(3 Punkte)

Hinweis: Beweise, dass Ihr regulärer Ausdruck/Ihr Automat/Ihre Grammatik die jeweilige Sprache erzeugt/akzeptiert/erzeugt, brauchen nicht geführt zu werden.

Aufgabe 8 *(14 Punkte)*

Gegeben sei die Sprache

$$L := \{xy \in \{a,b\}^* \mid lg(x) = lg(y) \wedge \#_a(y) \geq 1\}.$$

(i) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G in Chomsky Normalform mit $L(G) = L$ an.
(3 Punkte)

(ii) Geben Sie einen ausführlich kommentierten Kellerautomaten A mit $N(A) = L$ an.
(5 Punkte)

(iii) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.
(6 Punkte)

Hinweis: Beweise, dass Ihr regulärer Ausdruck/Ihr Automat/Ihre Grammatik die jeweilige Sprache erzeugt/akzeptiert/erzeugt, brauchen nicht geführt zu werden.

Aufgabe 9 *(12 Punkte)*

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{a,b,c\}, R, S)$ mit der Regelmenge $R = \{S \to aSc \mid bSc \mid c\}$.
Sei

$$L := \{wc^{lg(w)+1} \mid w \in \{a,b\}^*\}.$$

Beweisen Sie, dass $L(G) = L$ gilt.