# Lösungshinweise zur Klausur 1654/1658 vom 31. Juli 2010

## Aufgabe 1

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt? ($f$ bezeichne hierbei stets eine totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.)

| korrekt | falsch | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Wenn $f$ bandkonstruierbar ist, dann ist $f$ berechenbar.<br>**korrekt:** Dies folgt sofort aus der Definition wenn man die Standardnummerierung von $\{0\}$ heranzieht. |
| [ ] | [ ] | Wenn $O(f) = O(n)$, dann ist $f$ bandkonstruierbar.<br>**falsch:** $f(n) := n + cf_{K_\varphi}(n)$ ist noch nicht einmal berechenbar. |
| [ ] | [ ] | Es ist bekannt, dass $\mathrm{BAND}(f) \neq \mathrm{BAND}(n)$ aus $O(f) \neq O(n)$ folgt.<br>**falsch:** Wir haben die Bandkonstruierbarkeit von $f$ gefordert – Man kann sogar Funktionen konstruieren, die diese Behauptung widerlegen. |
| [ ] | [ ] | Es ist bekannt, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\mathrm{NBAND}(\log n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^{k \cdot \log n})$.<br>**korrekt:** $\mathrm{NBAND}(\log n) \subseteq \bigcup_c \mathrm{ZEIT}(2^{c \cdot \log n}) \subseteq \mathrm{ZEIT}(2^{\log\log n \cdot \log n}) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(2^{(\log\log n)^3 \cdot \log n}) \subseteq \mathrm{ZEIT}(2^{(\log n)^2}) = \mathrm{ZEIT}(n^{\log n})$. |
| [ ] | [ ] | Die Funktion $f(n) = \lceil \sqrt[1013]{2^n} \rceil$ ist zeitkonstruierbar.<br>**korrekt** |
| [ ] | [ ] | Es ist bekannt, dass $\mathrm{ZEIT}(n^2) \neq \mathrm{ZEIT}(n^2 \log n \log\log n)$ gilt.<br>**korrekt:** Zeitseparationssatz. |

(ii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

| korrekt | falsch | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Für alle $A \in \mathrm{P}$ gilt $A \cap \{0,1\}^* \in \{\{0,1\}^* \setminus A \mid A \in \mathrm{NP}\}$.<br>**korrekt:** Zunächst ist mit $A$ auch $A \cap \{0,1\}^*$ in P enthalten, so dass die Behauptung aus der Abgeschlossenheit von P unter Komplementbildung folgt. |
| [ ] | [ ] | Es ist bekannt, dass $\mathrm{LOGSPACE} \subsetneq \mathrm{NP}$ gilt.<br>**falsch:** Es ist nicht bekannt, ob nicht LOGSPACE ganz NP umfasst. |
| [ ] | [ ] | $\mathrm{GAP} \leq_{pol} \mathrm{3SAT}$<br>**korrekt:** 3SAT ist NP-vollständig und es gilt $\mathrm{GAP} \in \mathrm{NLOGSPACE} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$. |
| [ ] | [ ] | Es sind vollständigen Mengen für $\mathrm{NBAND}(2^n)$ bekannt.<br>**korrekt:** Die Konstruktion solcher Mengen kann analog zum Fall NP mit angepassten Mengen $U_{nt}$ durchgeführt werden. |
| [ ] | [ ] | Aus $A \leq_{pol} B$ folgt $\{0,1\}^* \setminus A \leq_{pol} \{0,1\}^* \setminus B$.<br>**falsch:** Dies gilt i.A. nur, wenn $B \subseteq \{0,1\}^*$. |
| [ ] | [ ] | Es ist bekannt, dass PSPACE=NPSPACE gilt.<br>**korrekt:** Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Satz von Savitch. |

(iii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

| korrekt | falsch | |
|---|---|---|
| [ ] | [ ] | Die Sprache $\{a^n b^m c^p \mid n, m, p \in \mathbb{N}, m \neq n \text{ oder } p \neq m\}$ ist kontextfrei.<br>**korrekt:** Man kann z.B. leicht einen Kellerautomaten für diese Sprache angeben. |
| [ ] | [ ] | Die Sprache $\{u1u^R \mid u \in \{0,1\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.<br>**falsch** |
| [ ] | [ ] | Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid T\,,\ T \to aT \mid a \mid Tb \mid b\}, S)$.<br>$L(G)$ ist regulär.<br>**korrekt:** $L(G) = \{a^n b^m \mid m + n > 0\}$. |
| [ ] | [ ] | Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid T\,,\ T \to aT \mid a\}, S)$.<br>Es ist L($G$)=$\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$.<br>**korrekt** |
| [ ] | [ ] | Für zwei beliebige reguläre Mengen $L_1$ und $L_2$ ist entscheidbar,<br>ob $L_1 \neq L_2$ gilt.<br>**korrekt:** Satz 8.4.2 |
| [ ] | [ ] | Für zwei beliebige kontextfreie Mengen $L_1$ und $L_2$ ist $L_1 \cap L_2$ kontextfrei.<br>**falsch:** Satz 9.7.2 |

## Aufgabe 2

Geben Sie Definitionen an für:

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bandkonstruierbar – Definition 3.3.1

(ii) $L \leq_{pol} M$ für $L, M \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma$ endliches Alphabet – Definition 4.3.2

(iii) NP-vollständige Sprachen – Definition 4.3.5

(iv) $L(A)$ für einen endlichen Automaten $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ – Definition 8.3.2 (3).

## Aufgabe 3

Formulieren Sie

(i) den Zeithierarchiesatz – Satz 3.4.2

(ii) das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen – Satz 9.4.3.

## Aufgabe 4

(i) Zunächst gilt $L_1' \notin \mathrm{ZEIT}(n^4)$, da $L_1 \notin \mathrm{ZEIT}(n^4)$ vorausgesetzt wird. Mit $L$ wäre aber auch $L_1' = L \cap \{0w \mid w \in \Sigma^*\}$ in $\mathrm{ZEIT}(n^4)$ enthalten.

(ii) Mit $L_1$ ist auch $L_1'$ und somit $\Sigma^* \setminus L_1'$ in P enthalten. Weiter ist mit $L_2$ auch $\Sigma^* \setminus L_2'$ in NP enthalten. Somit gilt $\Sigma^* \setminus L = (\Sigma^* \setminus L_1') \cap (\Sigma^* \setminus L_2') \in \mathrm{NP}$. Um zu zeigen, dass $L$ auch NP-hart ist, genügt es $L_2 \leq_{pol} \Sigma^* \setminus L$ zu zeigen. Sei hierzu $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert durch $f(w) = 1w$ für alle $w \in \Sigma^*$. Dann gilt $f \in \mathrm{FP}$ und weiter $1w \in \Sigma^* \setminus L \Leftrightarrow 1w \notin L_2' \Leftrightarrow w \in L_2$ nach Definition von $L_2'$.

## Aufgabe 5

(i) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar. Dann ist auf Grund des Zusammenhangs zwischen Wort- und Zahlenberechenbarkeit auch die Funktion $\hat{f} : \{0\}^* \to \{0\}^*$, $0^n \mapsto 0^{f(n)}$ berechenbar. Sei $M$ eine Turingmaschine, die $\hat{f}$ berechnet. Es gilt nun für $g = \tilde{t}_M$: $f \in O(g)$, da sonst $M$ die Ausgabe nicht auf das Ausgabeband schreiben könnte. Ferner ist $g$ als Zeitkomplexität einer Turingmaschine zeitkonstruierbar und somit auch bandkonstruierbar.

(ii) Bezeichne $cf_{K_\varphi}$ die charakteristische Funktion des Selbstanwendbarkeitsproblem $K_\varphi$. Dann gilt für $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = n + cf_{K_\varphi}(n)$: $\forall n. n \leq g(n) \leq n + 1$, also $O(n) = O(g)$. Wäre $g$ zeitkonstruierbar so wäre $g$ berechenbar und man könnte aus $n$ den Wert $lg(0^{g(n)}) - n = cf_{K_\varphi}(n)$ berechnen. Dies wäre aber ein Widerspruch zu der Nichtentscheidbarkeit von $K_\varphi$.

## Aufgabe 6

Jede NP-vollständige Sprache muss in NP liegen. Es genügt also zu zeigen, dass NP echte Teilmenge von $\mathrm{ZEIT}(n^{n^n})$ ist. Nun gilt zunächst, dass $\mathrm{NP} \subseteq \bigcup_c \mathrm{ZEIT}(2^{c \cdot n^c}) \subseteq \mathrm{ZEIT}(2^{n^{\log n}})$. Da die Funktion $n \mapsto n^{n^n}$ zeitkonstruierbar ist und wegen $\lim_{n\to\infty} n^{\log n} \cdot 2^{n^{\log n}}/n^{n^n} = 0$ auch $n^{n^n} \notin O(n^{\log n} \cdot 2^{n^{\log n}})$ gilt, sind die Voraussetzungen für den Zeithierarchiesatz erfüllt. Es gilt somit $\mathrm{NP} \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^{n^n})$.

## Aufgabe 7

a) $\alpha = ((a(a \cup b)^*)((bb)a))$ leistet das Gewünschte.

b) Sei $A = (\{a,b\}^*, Q := \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, q_0, \{q_5\}, \delta)$ definiert durch

$$\begin{aligned}\delta \ = \{ \ & (q_0,a,q_2),(q_0,b,q_1),(q_1,a,q_1),(q_1,b,q_1),(q_2,a,q_2),(q_2,b,q_3),(q_3,a,q_2),\\ & (q_3,b,q_4),(q_4,a,q_5),(q_4,b,q_4),(q_5,a,q_2),(q_5,b,q_3) \ \}.\end{aligned}$$

Dann gilt $L(A) = L$.

c) Da der Automat $A$ in Teil b) determiniert und vollständig ist, leistet

$$A' = (\{a,b\}^*, Q := \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, q_0, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \delta)$$

das Gewünschte.

d) Sei $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b\}, R, S)$ definiert durch

$$R = \{(S, aA), (A, aA), (A, bA), (A, bB), (B, bC), (C, aD), (D, \varepsilon)\}.$$

Dann ist $G$ in Normalform und es gilt $L(G) = L$.

## Aufgabe 8

(i) Die Grammatik $G = (\{S, Z, A, B, V_0, V_1\}, \{a, b\}, R, S)$ mit der Regelmenge

$$\begin{aligned}R \ = \{ \ & (S,V_0B),(S,V_1A),(S,ZA),(V_0,ZS),(V_1,ZT),(T,V_1Z),\\ & (T,ZZ),(A,a),(B,b),(Z,a),(Z,b) \ \}\end{aligned}$$

leistet das Gewünschte.

(ii) Der folgende Kellerautomat $A$ erkennt die Sprache $L$ mit leerem Keller wie folgt: $A$ legt zunächst für jedes gelesene Eingabezeichen der ersten Hälfte ein Zeichen auf den Keller und entscheidet nichtdeterminiert, ob die Hälfte der Eingabe gelesen wurde. Für die zweite Hälfte der Eingabe wird nun jeweils für jedes Zeichen ein Zeichen gelesen und gleichzeitig im Zustand gespeichert, ob bereits ein $a$ gelesen wurde. Wird das Kellerstartsymbol gelesen, so wird es gelöscht, falls bereits ein $a$ gelesen wurde.

Der Automat $A$ kommt hierbei mit 3 Zuständen $q_0, q_1, q_2$ aus, wobei $q_0$ den Startzustand bezeichne. Das Kelleralphabet besteht aus den Zeichen \$ und $a$. Die Über-

gangsrelation $\delta$ sei durch die folgende Tabelle gegeben:

| $q$ | $z$ | $C$ | $V$ | $Y$ | $q'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $a$ | \$ | $R$ | $a\$$ | $q_0$ |
| $q_0$ | $b$ | \$ | $R$ | $a\$$ | $q_0$ |
| $q_0$ | $a$ | $a$ | $R$ | $aa$ | $q_0$ |
| $q_0$ | $b$ | $a$ | $R$ | $aa$ | $q_0$ |
| $q_0$ | $a$ | \$ | $R$ | $a\$$ | $q_1$ |
| $q_0$ | $b$ | \$ | $R$ | $a\$$ | $q_1$ |
| $q_0$ | $a$ | $a$ | $R$ | $aa$ | $q_1$ |
| $q_0$ | $b$ | $a$ | $R$ | $aa$ | $q_1$ |
| $q_1$ | $a$ | $a$ | $R$ | $\varepsilon$ | $q_2$ |
| $q_1$ | $b$ | $a$ | $R$ | $\varepsilon$ | $q_1$ |
| $q_2$ | $a$ | $a$ | $R$ | $\varepsilon$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $b$ | $a$ | $R$ | $\varepsilon$ | $q_2$ |
| $q_2$ | \$ | \$ | $N$ | $\varepsilon$ | $q_2$ |

(iii) Dies kann z.B. mit Hilfe des Pumping Lemmas gezeigt werden. Wir zeigen diese Aussage über die Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen: Angenommen, $L$ ist regulär. Dann ist auch $L_0 := L \cap L((a^*b^*)) = \{a^n b^m \mid n > m+1, n+m \equiv 0 (\text{mod } 2)\}$ regulär. Dann ist aber auch $L_1 := \{a^n b^m | n > m\} = \{a\} \cup (L_0 \cdot \{b, \varepsilon\})$ und $L_2 := \{a^n b^m \mid n \geq m\} = \{\varepsilon\} \cup (L_1 \cdot \{b, \varepsilon\})$, sowie $L_3 = \{a^n b^m \mid m \geq n\} = L((a^*b^*)) \cap (\{a,b\}^* \setminus L_1)$ regulär. Dann aber wäre auch $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = L_2 \cap L_3$ regulär im Widerspruch zu Korollar 8.4.4.

## Aufgabe 9

Wir zeigen zunächst $L(G) \subseteq L$: Zunächst zeigt man per Induktion nach $n$, der Länge der Ableitungen, die folgende Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \forall \omega \in \{S, a, b, c\}^*. S \xrightarrow{n} \omega \Rightarrow \exists u \in \{a, b\}^*. \omega = uSc^{lg(u)} \vee \omega = uc^{lg(u)+1}$$

Hieraus folgt dann die Inklusion wie folgt: Sei $w \in L(G)$ dann gilt $S \xrightarrow{n} w$ für ein $n$ und somit $w = uSc^{lg(u)}$ oder $w = uc^{lg(u)+1}$. Da $w \in \{a, b, c\}^*$, gilt $w = uc^{lg(u)+1}$ und somit $w \in L$.

Wir zeigen weiter $L \subseteq L(G)$: Hierzu kann man zunächst die folgende Aussage über die Länge von $u$ zeigen:

$$\forall u \in \{a, b\}^*. S \xrightarrow{*} uSc^{lg(u)}$$

Hieraus folgt dann die Inklusion, indem noch ein einzelner Ableitungsschritt $S \to c$ hinzugefügt wird.