Einführung in die Theoretische Informatik B
Lösungsvorschläge zur
Klausur am 18. September 2004
Sommersemester 2004

Aufgabe 1 (von oben nach unten)

a) korrekt, korrekt, korrekt, korrekt, falsch

b) falsch, korrekt, falsch

c) korrekt, korrekt, korrekt, korrekt, falsch

d) korrekt, korrekt, falsch, falsch

e) regulär, nicht regulär, nicht regulär, regulär

f) nicht kf., nicht kf., kf., nicht kf.

g) korrekt, nicht korrekt, nicht korrekt, korrekt, nicht korrekt

Aufgabe 2

(a) Definition 2.2.1

(b) Definition 4.1.2

(c) Definition 4.3.2

(d) Definition 5.3.1

(e) Definition 7.1.6

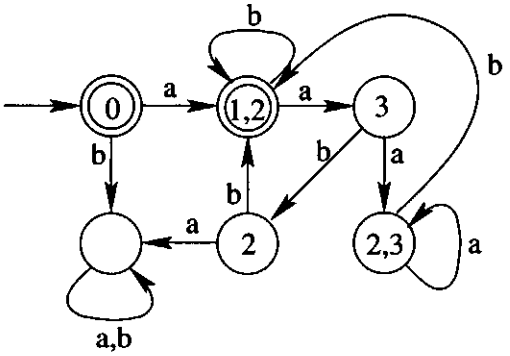
(f) Definition 9.3.2

Aufgabe 3

Aufgabe 3 zu Kurseinheit 3.

Aufgabe 4

	a	b
$\{0\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$
$\{1,2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$
$\{3\}$	$\{2,3\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$
$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

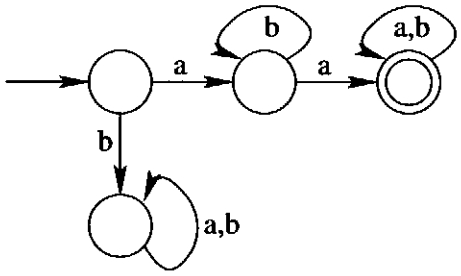


Anfangszustand: $\{0\}$
Endzustandsmenge: $\{0\}, \{1,2\}$

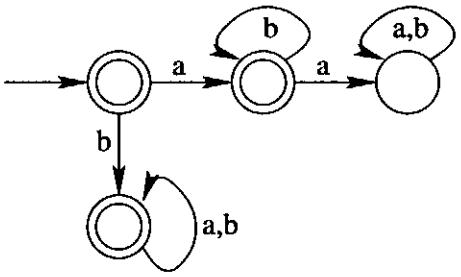
Aufgabe 5

a) $\alpha = a(a \cup b)^* a(a \cup b)^*$ oder $\alpha = ab^* a(a \cup b)^*$

b)



c)



d) $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, R, S)$ mit
$R = \{S \to aA,\ A \to bA|aB,\ B \to aB|bB|\varepsilon\}$.

Aufgabe 6

(a) $G = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$ mit
$R = \{S \to aSa|aSb|ab\}$

(b) $A = (\{a, b\}, \{s, a, b\}, S, \{a\}, a, \emptyset, \delta)$ mit
$\delta = \{((q, a, S), (N, aSa, q)), ((q, b, S), (N, aSa, q)),$
$((q, a, S), (N, aSb, q)), ((q, b, S), (N, aSb, q)),$
$((q, a, S), (N, ab, q)), ((q, b, S), (N, ab, q)),$
$((q, a, a), (R, \varepsilon, q)), ((q, b, b), (R, \varepsilon, q))\}$

(Bem.: Es wurde Lemma 9.5.6 auf a.) angewendet.)

Aufgabe 7

Es gilt:
$\mathrm{NZEIT}(n) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{ZEIT}(c^n)$
nach Korollar 4.2.2.

Da $c^n \in O((\log n)^n)$ für alle $c \in \mathbb{N}$, folgt
$\bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{ZEIT}(c^n) \subseteq \mathrm{ZEIT}((\log n)^n)$

Die Funktion n^n ist zeitkonstruierbar, $n \in O(n^n)$, $(\log n)^n \in O(n^n)$ und $n^n \notin O((\log n)^n \cdot n \log\log n)$.
Somit folgt mit dem Zeithierachiesatz (Satz 3.4.2)

$\mathrm{ZEIT}((\log n)^n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^n)$.

Insgesamt folgt also:
$\mathrm{NZEIT}(n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^n)$.

Aufgabe 8

(a)

$n = 0$: $S \xrightarrow{0} x$ mit $x \in \{S, a, b, c\}^*$. Dann ist $S = x$.
Für $w' = \varepsilon \in \{a, b\}^0$ gilt $x = w'Sc^{\lg(w')} = \varepsilon Sc^0 = S$.
Die Aussage stimmt also für $n = 0$.

$n \to n + 1$: Gelte $S \xrightarrow{n+1} x$ mit $x \in \{S, a, b, c\}^*$. Dann gibt es $\alpha \in \{S, a, b, c\}^*$, so dass $S \xrightarrow{n} \alpha \xrightarrow{1} x$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\exists w' \in \{a, b\}^n. \quad \alpha = w'Sc^{\lg(w')} \vee \alpha = w'c^{\lg(w')}.$$

Da $\alpha \xrightarrow{1} x$ muss gelten:

$$\exists w' \in \{a, b\}^n. \quad \alpha = w'Sc^{\lg(w')}$$

Sei $w' \in \{a, b\}^n$, so dass $\alpha = w'Sc^{\lg(w')}$. Es können auf α vier Regeln angewendet werden:

1.) $S \to aSc$: $\alpha \to w'aScc^{\lg(w')}$
2.) $S \to bSc$: $\alpha \to w'bScc^{\lg(w')}$
3.) $S \to bc$: $\alpha \to w'bcc^{\lg(w')}$
4.) $s \to ac$: $\alpha \to w'acc^{\lg(w')}$

Für alle Fälle gilt:

$$\alpha \to \beta \Rightarrow \exists w \in \{a, b\}^{lg(w')+1}. \quad \beta = wSc^{\lg(w)} \vee \beta = wc^{\lg(w)}$$

(b) Sei $x \in L(G)$. Dann ist $x \in \{a, b, c\}^*$ und es gibt $n \in \mathbb{N}, n > 0$, mit $S \xrightarrow{n} x$. Aus a) folgt $\exists w' \in \{a, b\}^n$. $x = w'c^{\lg(w')}$. Somit $x \in L$.
(Bem: $n = 0$ nicht möglich, da $x \in \{a, b, c\}^*$)

(c) Wir zeigen mit Induktion.
$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in \{S, a, b, c\}^+)\ (S \xrightarrow{n} x \Leftarrow (\exists w' \in \{a, b\}^n. x = w'Sc^{\lg(w')} \vee x = w'c^{\lg(w')})$

$n = 0$: $x = S, S \xrightarrow{0} S$. Die Aussage stimmt für $n = 0$.

$n \to n + 1$: $\exists w' \in \{a, b\}^{n+1}$. $x = w'Sc^{\lg(w')} \vee x = w'c^{\lg(w')}$.
Sei $w' = zw''$ mit $z \in \{a, b\}$.
Fall 1) $x = w'Sc^{\lg(w')}$, $z = a$: $S \to aSc \xrightarrow{n} aw''Sc^{\lg(w')}c = w'Sc^{\lg(w')}$. Hierbei folgt $aSc \xrightarrow{n} aw''Sc^{\lg(w')}c$ mit der Induktionsannahme. Analog folgt der Fall 2) $x = w'Sc^{\lg(w')}$, $z = b$.
Fall 3: $x = w'c^{\lg(w')}$, $z = a : S \to aSc \xrightarrow{n} aw''c^{\lg(w'')}c = w'c^{\lg(w')}$.
Fall 4: $x = w'c^{\lg(w)}$, $z = b$: Analog zu 3)

$L \subseteq L(G)$: $x \in L \Rightarrow \exists w \in \Sigma^n, n > 0$. $x = wc^{\lg(w)} \Rightarrow S \xrightarrow{n} x \Rightarrow x \in L(G)$, da $x \in \{a, b, c\}^*$.

Aufgabe 9

ZZ: ML ist NP-vollständig.

1.) ML $\in$ NP:
Da $L, M \in$ NP, gibt es nichtdeterministische Turingmaschinen G, H, mit $L_G = M$, $L_H = L$, $\tilde{t}_G \in O(n^k)$, $\tilde{t}_H \in O(n^{k'})$ für $k, k' \in \mathbb{N}$.
Betrachte folgende TM G':
Eingabe $z \in \Sigma^*$.

i) Rate $x, y \in \Sigma^*$ mit $z = xy$.

ii) Lasse M mit Eingabe x und H mit Eingabe z laufen. Akzeptiere beiden, dann akzeptiere auch, sonst verwerfe.

Es gilt $z \in L_{G'} \Leftrightarrow (\exists x \in M)(\exists y \in L).\ z = xy$.
Also $L_{G'} = LM$. Außerdem $\tilde{t}_{G'} \in O(n + n^k + n^{k'})$.
Somit LM $\in$ NP.

2.) ML ist NP-vollständig:
Wir zeigen: $L \leq_{pol} ML$
M ist nicht leer, d.h. $\exists y \in M$. Wähle ein $y \in M$ mit lg(y) minimal.

Sei $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$
$x \mapsto yx$

$f \in$ FP ist offensichtlich. $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in$ ML folgt mit Eigenschaft b.) von M:

„ $\Rightarrow$ “ : trivial

„ $\Leftarrow$ “ : Sei $f(x) \in$ ML. Es ist $f(x) = yx$ mit $y \in M$. Angenommen $x \notin L$, d.h. $\exists x' \in L$, $y' \in M$, $x \neq x'$ mit $y'x' = yx$. Dann folgt:

1.) lg(x) = lg(x') $\Rightarrow x = x'$. Widerspruch

2.) lg(x) < lg(x') $\Rightarrow$ lg(y) > lg(y'). Widerspruch

3.) lg(x) > lg(x') $\Rightarrow x = x''x'$, $x'' \in \Sigma^+ \Rightarrow yx = yx''x' = y'x' \Rightarrow y' = yx'' \in M$ im Widerspruch zu b.)

Also $x \in L$.