Aufgabe 1 *(12 Punkte)*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über die O-Notation bzw. über Komplexitätsklassen:

(a) *(2 Punkte)*
Es seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion und $d \geq 1$ eine Konstante aus $\mathbb{N}$. Ferner sei df die durch $df(n) := d \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Funktion. Dann gilt $O(f) = O(df)$.

(b) *(4 Punkte)*
Es seien Σ, Δ Alphabete mit $\Sigma \subseteq \Delta$. Dann gilt $\mathsf{ZEIT}_\Sigma(n) \subseteq \mathsf{ZEIT}_\Delta(n)$.

(c) *(4 Punkte)*
Es seien Σ, Δ Alphabete mit $\Sigma \not\subseteq \Delta$. Dann gilt $\mathsf{ZEIT}_\Sigma(n) \not\subseteq \mathsf{ZEIT}_\Delta(n)$.

(d) *(2 Punkte)*
Es sei $L \in \mathsf{BAND}(n \cdot \log\log n)$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass $L \in \mathsf{ZEIT}\left(k^{n \cdot \log\log n}\right)$ gilt.

Aufgabe 2 *(13 Punkte)*

(a) *(6 Punkte)*
Beweisen Sie, dass für jedes $k \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ die Funktion $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_k(n) := (\log n)^k \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

bandkonstruierbar ist.

(b) *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: $(\log n)^l \notin O\left((\log n)^m\right)$, falls $0 < m < l$ gilt.

(c) *(3 Punkte)*
Zeigen Sie: $\mathsf{BAND}\left((\log n)^m\right)$ ist *echt* enthalten in $\mathsf{BAND}\left((\log n)^l\right)$, falls $0 < m < l$ gilt.

Aufgabe 3 *(11 Punkte)*

Es sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Für $w \in \Sigma^*$ bezeichne $\lg(w)$ die Länge des Wortes w. Dann sei $L \subseteq \Sigma^*$ die folgende Sprache:

$$L := \{w \mid \exists u \in \Sigma^* . uu \text{ Teilwort von } w \text{ und } \lg(u) \geq \lfloor \frac{1}{4} \cdot \lg(w) \rfloor\}.$$

Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Kontrollturingmaschine und einer entsprechenden Zeitbedarfsabschätzung: $L \in \mathsf{NZEIT}(n)$.

Aufgabe 4 *(7 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Geben Sie bei den falschen Aussagen jeweils eine korrigierte Version an.

(a) Die Komplexitätsklasse $\mathsf{NZEIT}(f)$ ist nur für totale Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert.

(b) Die Komplexitätsklasse NP ist die Vereinigung aller $\mathsf{NZEIT}(f)$, wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total ist.

(c) Es sei Σ ein Alphabet, und $L, M \subseteq \Sigma^*$ seien Sprachen. Genau dann ist L polynomiell reduzierbar auf M ($L \leq_{pol} M$), wenn es eine Funktion $f \in \mathsf{FP}$ gibt, die jedes Element aus L in M abbildet.

(d) Ist eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ NP–vollständig, dann ist sie auch NP–hart.

Aufgabe 5 *(12 Punkte)*

Es sei ν_G die Standardnotation für gerichtete Graphen. Ein Weg $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ in einem gerichteten Graphen (V, E) heißt genau dann ein *Kreis*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gibt, so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt, die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind und $v_{n+1} = v_1$ ist. Es sei dann

$$\text{DOUBLE-HC} := \left\{ x \in \{0,1\}^* \mid \left[\begin{array}{l} \nu_G(x) \text{ besitzt zwei Kreise mit} \\ \text{disjunkten Knotenmengen } V_1 \\ \text{und } V_2, \text{ so dass } V = V_1 \cup V_2 \end{array} \right] \right\}.$$

Beweisen Sie die NP-Härte von DOUBLE-HC unter Verwendung derjenigen von HC.

Aufgabe 6 *(22 Punkte)*

Es seien $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $\Pi := \{\mathtt{S}, \mathtt{T}\}$ Alphabete, und es sei $\Delta := \Sigma \cup \Pi$. Die Regelmenge einer Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathtt{S} &\to \mathtt{bSb} \mid \mathtt{T} \\ \mathtt{T} &\to \mathtt{aT} \mid \varepsilon\,. \end{aligned}$$

(a) *(7 Punkte)*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach k, dass für alle $w \in \Delta^*$ Folgendes gilt: Wenn $\mathtt{S} \xrightarrow[G]{k} w$, dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}$, so dass einer der nachstehenden Fälle zutrifft:

(1) $w = \mathtt{b}^m\mathtt{Sb}^m$

(2) $w = \mathtt{b}^m\mathtt{a}^n\mathtt{Tb}^m$

(3) $w = \mathtt{b}^m\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m$.

(b) *(5 Punkte)*

Leiten Sie aus (a) eine Beschreibung der von G erzeugten Sprache (in der Form $L = \{w \in \Sigma^* \mid \cdots\}$) ab und zeigen Sie, dass tatsächlich $L(G) = L$ gilt. Den Beweis für die Inklusion '$L \subseteq L(G)$' brauchen Sie dabei nur zu skizzieren.

(c) *(9 Punkte)*

Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{\mathtt{b}^n\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

(d) *(1 Punkte)*

Begründen Sie, dass die Sprache L (aus Aufgabenteil (c)) kontextfrei ist.

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Es sei $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{a}^n \mid n, m \in \mathbb{N};\ n, m \geq 1\} \subseteq \Sigma^*$ deterministisch kontextfrei ist. Korrektheitsbeweise für die von Ihnen verwendeten Tools können dabei weggelassen werden.

Aufgabe 8 *(13 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

(Bei dieser Aufgabe erhalten Sie für jede richtige Antwort (entweder „richtig“ oder „falsch“) einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen

ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann pro Aufgabenteil keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

(a) (1) Jede reguläre Menge ist eine kontextsensitive Sprache.

(2) Die Sprache $L = \{\mathtt{b}^n\mathtt{a}^m\mathtt{b}^l \mid n, m, l \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ist eine Typ-3-Sprache.

(3) Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

(4) Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

(b) (1) Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform, so dass $L(G) = L(G') \setminus \{\varepsilon\}$ gilt.

(2) Gibt es zu einer Sprache L ein $p \in \mathbb{N}$, so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $\lg(z) \geq p$ so in Teilworte u, v, w, x, y zerlegen kann, dass (i) $z = uvwxy$, (ii) $vx \neq \varepsilon$, (iii) $\lg(vwx) \leq p$ und (iv) $\forall i \geq 0.\, uv^iwx^iy \in L$ gilt, dann ist L kontextfrei.

(3) Die kontextfreien Sprachen sind unter Durchschnittsbildung abgeschlossen.

(4) Das Endlichkeitsproblem für kontextfreie Sprachen ist unentscheidbar.

(5) Das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen ist unentscheidbar.

(c) (1) GAP ist eine kontextsensitive Sprache.

(2) Jede kontextsensitive Sprache ist entscheidbar.

(3) Jede Typ-0-Sprache ist rekursiv-aufzählbar.

(4) Die Typ-0-Sprachen sind unter Durchschnittsbildung abgeschlossen.

Anhang

Definition 3.3.1 *(bandkonstruierbar)*
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt *bandkonstruierbar,* falls es eine TM M gibt, so dass

1. $\forall n.\ f_M(0^n) = 0^{f(n)}$ und
2. $\bar{s}_M \in O(f)$ gilt.

Satz 3.4.5 *(Bandhierarchiesatz)*
Sei $\log \in O(g)$, g bandkonstruierbar, $f \in O(g)$, $g \notin O(f)$. Dann ist

$$\mathsf{BAND}(f) \subsetneq \mathsf{BAND}(g).$$

Notation für gerichtete Graphen: Die Knotenmenge V wird zu $\{1, ..., n\}$ mit $n = \#V$ normiert. Dann lässt sich $G = (V, E)$ durch die Adjazenzmatrix A_G beschreiben. A_G ist eine $n \times n$-Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Matrix lässt sich zeilenweise als $a_{11} \cdots a_{1n} a_{21} \cdots a_{nn} \in \{0,1\}^{n^2}$ notieren. Wir erhalten also die folgende Standardnotation für gerichtete Graphen (V, E) mit $V = \{1, ..., \#V\}$:

$$\nu_G(a_1 \cdots a_m) = (V, E),$$

wobei $V = \{1, ..., \lfloor\sqrt{m}\rfloor\}$ und $(i,j) \in E \iff a_{(i-1)\lfloor\sqrt{m}\rfloor + j} = 1$. Bezüglich dieser Standardnotation ist das *Hamiltonkreis-Problem* wie folgt formalisiert:

$$\mathrm{HC} := \{x \in \{0,1\}^* \mid \nu_G(x) \text{ besitzt einen Hamiltonkreis}\}.$$

Satz 8.4.3 *(Pumping-Lemma für reguläre Mengen)*
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $\lg(z) = n$ gilt:

$$\exists u, v, w \in \Sigma^*.\ (z = uvw \ \text{ und } \ v \neq \varepsilon \ \text{ und } \ \forall i \geq 0.\ tuv^iw\bar{t} \in L).$$