01654 Einführung in die Theoretische Informatik B
Klausur vom 17. September 2011

Es müssen Ihnen acht Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- vier Blätter mit 7 Aufgaben,
- eine Seite Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie drei Stunden Zeit. Die Klausur gilt als bestanden, wenn Sie mindestens 40 der möglichen 100 Punkte erreichen.

Die Benutzung von **Hilfsmitteln** (z. B. Kurstext) ist **nicht** erlaubt!

Füllen Sie zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus und, falls gewünscht, die Bescheinigung für das Finanzamt. Schreiben Sie später auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte – beginnend mit dem Deckblatt und möglichst nach Aufgaben sortiert – zusammen.

Schreiben Sie Ihre Lösungen bitte **nicht mit Bleistift** auf!

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.

Wir senden Ihnen die korrigierten Klausuren so rasch wie möglich zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(11 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)*
Es seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Ferner sei $f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$(f + g)(n) := f(n) + g(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

und $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$h(n) := \max\{f(n), g(n)\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass dann $O(f + g) = O(h)$ gilt.

(b) *(6 Punkte)*
Zeigen Sie: $n \cdot \log n \cdot \log\log n \notin O(n \cdot \log n)$.

Aufgabe 2 *(18 Punkte)*

(a) *(7 Punkte)*
Beweisen Sie, dass die durch

$$f(n) := n \cdot \log n \cdot \log\log n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zeitkonstruierbar ist.

(b) *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, dass $\mathsf{ZEIT}(n)$ eine echte Teilmenge von $\mathsf{ZEIT}(n \cdot \log n \cdot \log\log n)$ ist.

(c) *(6 Punkte)*
Gibt es eine Sprache $L \in \mathsf{BAND}(n \cdot \log n \cdot \log\log n)$, die nicht in der Komplexitätsklasse $\mathsf{BAND}(n \cdot \log n)$ liegt? – Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 *(12 Punkte)*

Es sei im Folgenden Σ ein Alphabet, und $L, M \subseteq \Sigma^*$ seien Sprachen. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

(Bei dieser Aufgabe erhalten Sie für jede korrekte Antwort (entweder „richtig“ oder „falsch“) einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann pro Aufgabenteil keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

(a) (1) Die Komplexitätsklasse $\mathsf{NZEIT}(f)$ ist nur für berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert.

(2) Jede Kontrollturingmaschine kann durch eine nichtdeterministische Turingmaschine ohne wesentlichen Mehrbedarf an Zeit und Band simuliert werden.

(3) Für jedes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ besteht $\mathsf{NZEIT}(f)$ nur aus entscheidbaren Sprachen.

(b) (1) Die Komplexitätsklasse NP ist die Vereinigung aller $\mathsf{NZEIT}(f)$, wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total ist.

(2) Die Menge Σ^* ist ein Element von NP.

(3) L ist polynomiell reduzierbar auf M ($L \leq_{pol} M$), wenn es eine Funktion $f \in \mathsf{FP}$ gibt, die genau die Elemente aus L nach M abbildet.

(4) Wenn $L \leq_{pol} M$ und $L \in \mathsf{NP}$ gilt, dann ist $M \in \mathsf{NP}$.

(5) Ist L NP-hart und gilt $L \in \mathsf{P}$, dann ist L NP-vollständig.

(6) RUCKSACK ist polynomiell reduzierbar auf SAT.

(c) (1) $\mathsf{NBAND}(n)$ besteht nur aus rekursiv-aufzählbaren Sprachen.

(2) Es gilt $\mathsf{PSPACE} = \mathsf{NPSPACE}$.

(3) Jede Sprache aus $\mathsf{NLOGSPACE}$ ist polynomiell reduzierbar auf GAP.

Aufgabe 4 *(17 Punkte)*

Im Folgenden bezeichne $d(k)$ die Dualzahldarstellung der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$. – Es sei REISE-RUCKSACK (abgekürzt RR) die folgende Menge:

$$\{d(N)\#d(k_1)\#\cdots\#d(k_n) \mid \begin{array}{l} N, n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N},\ n \geq 1, \\ \exists\, M \subseteq \{1, \ldots, n\} \,.\, \sum_{i \in M} k_i = 2 \cdot N\}. \end{array}$$

(a) *(8 Punkte)*

Zeigen Sie RR $\in \mathsf{NP}$, indem Sie die Arbeitsweise einer geeigneten Kontrollturingmaschine beschreiben und eine Zeitbedarfsabschätzung vornehmen.

(b) *(9 Punkte)*

Man kann zeigen, dass RR sogar NP-vollständig ist. Beweisen Sie unter Benutzung dieser Tatsache die NP-Vollständigkeit von RUCKSACK (s. Anhang).

Aufgabe 5 *(18 Punkte)*
Es seien $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $\Pi := \{\mathtt{S}\}$ Alphabete, und es sei $\Delta := \Sigma \cup \Pi$. Die Regelmenge einer Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ sei gegeben durch

$$\mathtt{S} \to \mathtt{bSaS} \mid \mathtt{aSbS} \mid \varepsilon.$$

Schließlich sei $L := \{w \in \Sigma^* \mid \#_{\mathtt{a}}(w) = \#_{\mathtt{b}}(w)\}$ (wobei $\#_{\mathtt{a}}(w)$ die Anzahl der a's in w bezeichnet; entsprechend für b). Dann gilt folgende Eigenschaft, die Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe ohne Beweis benutzen dürfen: Ist $w \in L \setminus \{\varepsilon\}$, dann gibt es $u, v \in L$, so dass $w = \mathtt{a}u\mathtt{b}v$ oder $w = \mathtt{b}u\mathtt{a}v$ gilt.

(a) *(6 Punkte)*
Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach k, dass für alle $w \in \Delta^*$ Folgendes gilt: Wenn $\mathtt{S} \xrightarrow[G]{k} w$, dann ist $\#_{\mathtt{a}}(w) = \#_{\mathtt{b}}(w)$.

(b) *(2 Punkte)*
Folgern Sie aus (a), dass $L(G) \subseteq L$ gilt.

(c) *(7 Punkte)*
Zeigen Sie ebenfalls durch vollständige Induktion nach k, dass für alle $w \in L$ die Eigenschaft

$$\lg(w) \leq k \Rightarrow w \in L(G)$$

zutrifft.

(d) *(2 Punkte)*
Folgern Sie aus (c), dass auch die Inklusion $L \subseteq L(G)$ gilt.

(e) *(1 Punkte)*
Begründen Sie, dass die Sprache L kontextfrei ist.

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*
Beweisen Sie, dass die Sprache L aus Aufgabe 5 nicht regulär ist.

Aufgabe 7 *(14 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

(Bei dieser Aufgabe erhalten Sie wiederum für jede richtige Antwort (entweder „richtig“ oder „falsch“) einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann pro Aufgabenteil keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

Im Folgenden sei Σ stets ein Alphabet.

(a) (1) Jede reguläre Menge über Σ ist eine Typ-0-Sprache.

(2) Die Sprache $L = \{\mathsf{a}^l\mathsf{b}^m\mathsf{a}^n \mid l, m, n \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\Gamma := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ ist eine Typ-3-Sprache.

(3) Die endlichen Sprachen über Σ sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

(4) Die Typ-3-Sprachen über Σ sind unter Vereinigungsbildung abgeschlossen.

(5) Das Äquivalenzproblem für reguläre Mengen über Σ ist unentscheidbar.

(b) (1) Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L(G')$.

(2) Gibt es zu einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ein $p \in \mathbb{N}$, so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $\lg(z) \geq p$ so in Teilworte u, v, w, x, y zerlegen kann, dass (i) $z = uvwxy$, (ii) $vx \neq \varepsilon$, (iii) $\lg(vwx) \leq p$ und (iv) $\forall i \geq 0.\, uv^iwx^iy \in L$ gilt, dann ist L kontextfrei.

(3) Jede Sprache, die von einem determinierten Kellerautomaten erkannt wird, ist kontextfrei.

(4) Die deterministisch kontextfreien Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

(5) Das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen ist unentscheidbar.

(c) (1) GAP ist eine Typ-1-Sprache.

(2) Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextsensitive Sprache. Dann ist ihr Komplement $\Sigma^* \setminus L$ eine entscheidbare Menge.

(3) Jede rekursiv-aufzählbare Menge $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine Typ-0-Sprache.

(4) Das Wortproblem für Typ-0-Sprachen ist entscheidbar.

Anhang

Definition 3.3.1 *(zeitkonstruierbar)*
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt *zeitkonstruierbar,* falls es eine TM M gibt, so dass

1. $\forall n.\ f_M(0^n) = 0^{f(n)}$ und
2. $\tilde{t}_M \in O(f)$.

Satz 3.4.5 *(Bandhierarchiesatz)*
Sei $\log \in O(g)$, g bandkonstruierbar, $f \in O(g)$, $g \notin O(f)$. Dann ist

$$\mathsf{BAND}(f) \subsetneq \mathsf{BAND}(g).$$

Definition. Es ist RUCKSACK die folgende Menge:

$$\{d(N)\#d(k_1)\#\cdots\#d(k_n) \mid \begin{array}{l} n \geq 1,\ N, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}, \\ \exists\, M \subseteq \{1, \ldots, n\} \,.\, \sum_{i \in M} k_i = N\}. \end{array}$$

Satz 8.4.3 *(Pumping-Lemma für reguläre Mengen)*
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $\lg(z) = n$ gilt:

$$\exists u, v, w \in \Sigma^* \,.\, (z = uvw \ \text{ und } \ v \neq \varepsilon \ \text{ und } \ \forall\, i \geq 0 \,.\, tuv^iw\bar{t} \in L).$$