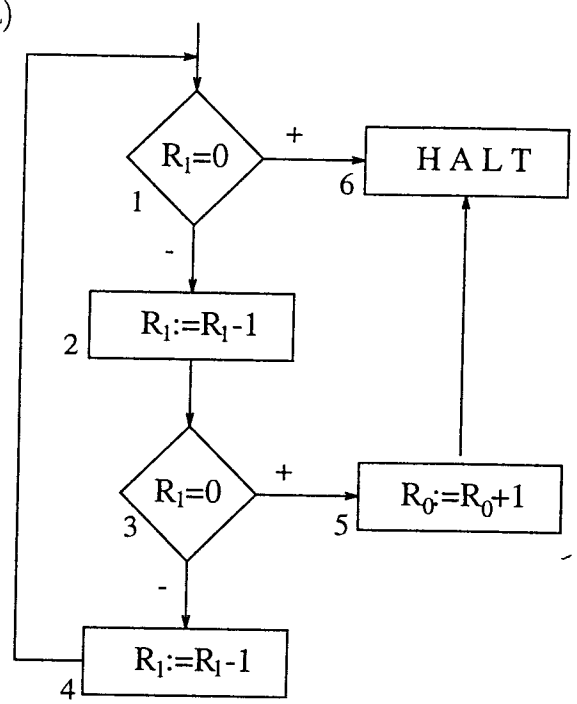
Grundlagen der Theoretischen Informatik
Lösungshinweise zur Nachklausur am 04.03.2000

Aufgabe 1

a)



b) Induktionsbehauptung:

$\forall i, x. 2i \leq x \Rightarrow ES^{4i}(1, (0, x, 0, ...)) = (1, (0, x - 2i, 0, ...))$

Beweis durch Induktion nach i:

$i = 0$: offensichtlich.

Sei $2(i+1) \leq x$. Dann gilt auch $2i \leq x - 2$.

$ES^{4(i+1)}(1, (0, x, 0, ...))$

$= ES^{4i}(1, (0, x - 2, 0, ...))$ (ein Schleifendurchlauf)

$= (1, (0, x - 2 - 2i, 0, ...))$ (Die Induktionshypothese gilt für alle $x \geq 2i$, somit auch für $x - 2$.)

$= (1, (0, x - 2(i+1), 0, ...))$, q.e.d.

Die Korrektheit von M ergibt sich daraus wie folgt:

Ist x gerade, so $ES^{2x}(1,(0,x,0,...)) = (1,(0,...))$, und in einem weiteren Schritt hält M, wobei noch $R_0 = 0$ gilt.

Ist x ungerade, genauer $x = 2i+1$, so

$$ES^{4i}(1,(0,x,0,...)) = (1,(0,1,0,...)).$$

In 4 weiteren Schritten wird die HALT-Marke via Marke 2,3,5 erreicht und somit $R_0 = 1$ gesetzt.

Aufgabe 2

a) Es sind berechenbare Funktionen f, g anzugeben mit $\tau = \pi^{-1}f$ und $\pi^{-1} = \tau g$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \tau(n) &= (\tau_1(n), \tau_2(n)) \\ &= \pi^{-1}(\pi(\tau_1(n), \tau_2(n))). \end{aligned}$$

Also setzen wir $f(n) := \pi(\tau_1(n), \tau_2(n))$. Die vorkommenden Funktionen sind bekanntermaßen bzw. laut Voraussetzung berechenbar, folglich auch f.

Es gilt

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(n) &= (\pi_1(n), \pi_2(n)) \\ &= \tau(\tau^{-1}(\pi_1(n), \pi_2(n))). \end{aligned}$$

Also setzen wir $g(n) := \tau^{-1}(\pi_1(n), \pi_2(n))$. Wie oben ist g berechenbar.

b) Ja. Zum Beweis gibt man eine berechenbare Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, so dass $V \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ h$. Es gilt $V \circ \pi^{-1}(n) = V(\pi_1(n), \pi_2(n)) = (\pi_2(n), \pi_1(n))$. Setzt man $h(n) := \pi(\pi_2(n), \pi_1(n))$, so gilt $\pi^{-1} \circ h(n) = (\pi_2(n), \pi_1(n))$.

Aufgabe 3

a) Die gesuchte Maschine muss aus einer Programm-Nummer i eine Nummer der Rechenzeitfunktion Φ_i berechnen. Gesucht ist also ein total-berechenbares r, so dass $\varphi_{r(i)}(x) = \Phi_i(x)$. Ein solches r existiert nach dem Übersetzungslemma, denn die Funktion g mit $g(i,x) = \Phi_i(x)$ ist berechenbar, wie man unmittelbar aus dem Rechenzeitsatz folgert.

b) Nein, denn sonst wäre das Äquivalenzproblem entscheidbar: Um $\varphi_i = \varphi_j$ zu testen, müsste man nur $f(i)$ mit $f(j)$ vergleichen.

Aufgabe 4

a) Nein. $\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n \log n} > 0$.

b) Nein. $\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n \cdot \log(n \log n)}{n(\log n)^2}$
$\geq \lim_{n\to\infty} \frac{n \log n \cdot \log n}{n(\log n)^2} > 0$.

c) Ja. Man kann zeigen, dass $ZEIT(n) \subsetneq ZEIT(n(\log n)^2)$.

Folglich muss auch mindestens eine der Inklusionen in a), b) echt sein. (Auch wenn man nicht weiß, welche!)

Der Zeithierarchiesatz ist hier anwendbar, denn:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n(\log n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$.
- Die Funktion t mit $t(n) = n(\log n)^2$ ist zeitkonstruierbar. Man zeigt dies z.B., indem man das unär gegebene n in Binärdarstellung umwandelt, $\log n$ in $O(\log n)$ Zeit berechnet, die Multiplikationen in $O((\log n)^2)$ Zeit ausführt, und das Ergebnis wieder unär ausgibt.

Aufgabe 5

Es genügt zu zeigen, dass das Mosaikproblem NP-hart ist. Man kann 2D-DOMINO auf unser Problem reduzieren. Die Mosaiksteine erhalten eine quadratische „Grundform". Man muss im wesentlichen nur sicherstellen, dass zwei Mosaiksteine an den Rändern genau dann zusammen passen, wenn die entsprechenden Dominosteine zusammen passen.

Dazu ersetzt man die Symbole auf den Dominosteinen durch „Kerben" und „Ausbuchtungen" an den Rändern.

Nähere Details waren nicht gefordert.

Aufgabe 6

a) Ja. Sei $T = L(\alpha)$. Dann gilt $R = L(\alpha^*) = (L(\alpha))^* = T^*$.

   Worte $u, v \in R$ sind also Konkatenationen von (beliebig vielen) Worten aus T. Dies gilt dann offensichtlich auch für uv, also $uv \in T^* = R$.

b) Ja. Ein Wort gehört zu $R = L(A)$ genau dann, wenn es q_0 wieder in q_0 überführt. Wenn zwei Worte u, v diese Eigenschaft haben, dann auch uv.

c) Nein. Zum Beispiel ist jede endliche Sprache regulär, aber jede unter Konkatenation abgeschlossene Sprache, die mindestens zwei nichtleere Wörter enthält, ist unendlich.

Aufgabe 7

Nein. Angenommen, es gäbe solch ein L. Sei p (abhängig von L) die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Da L unendlich ist, existiert in L ein Wort mit einer Länge $n^2 > p^2 \geq p$. Darin gibt es eine „Pumpstelle" mit einer Länge k ($1 \leq k \leq p$), und das mit $i = 2$ „aufgepumpte" Wort hat die Länge $n^2 + k > n^2$. Die nächste Quadratzahl ist $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2p + 1 > n^2 + k$.

Also liegt dieses Wort nicht in L, womit L das Pumping-Lemma verletzt.