Grundlagen der Theoretischen Informatik
Lösungshinweise zur Klausur vom 02.03.2002

Aufgabe 1

a) Sei die Bandmaschine M durch das folgende Flußdiagramm gegeben (0 sei die Anfangsmarke, $\Gamma = \{B, U\}$ und die folgende Notation „$q : \Delta, (q_1)$" bzw. „$q : \Delta, (q_1)(q_2)$" ist zu lesen als „in Marke q führe den Befehl Δ aus und gehe zu Marke q_1" bzw. „... und gehe zu Marke q_1, falls der Test Δ positiv endet, sonst gehe zu Marke q_2"):

0	:	R,	(1)		laufe nach rechts, bis zur ersten 1 oder B
1	:	t^B,	(7)	(2)	
2	:	t^1,	(3)	(0)	
3	:	f^0,	(4)		überschreibe die 1 mit einer 0
4	:	R,	(5)		suche die zweite 1 oder das Ende der Eingabe
5	:	t^B,	(10)	(6)	
6	:	t^1,	(7)	(4)	
7	:	f^U,	(8)		leere Ausgabe
8	:	R,	(9)		
9	:	HALT			
10	:	L,	(9)		nimm die letzte 0 weg

b) Wir benutzen im Folgenden die abkürzende Schreibweise (w, i) (mit $w \in \Gamma^*$, $i \in \mathbb{N}$) für Tupel $(w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n)$ mit $w = w_0 w_1 \ldots w_n$, $w_j \in \Gamma$ für $0 \leq j \leq n$ (insbesondere fordern wir hier $w \neq \varepsilon$).

Zunächst beweisen wir folgende Behauptungen per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}. \forall w \in \Gamma^*. \ \exists t \in \mathbb{N}. \ ES^t(0, (B0^n w, 0)) = (0, (B0^n w, n))$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \ \forall w, v \in \Gamma^*. \ \exists t \in \mathbb{N}. \ ES^t(4, (w0^n v, \lg(w)) = (4, (w0^n v, \lg(w) + n - 1))$ **zu (i):**
IA $(n = 0)$: $t = 0$ leistet offensichtlich das Gewünschte.
IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: Nach Induktionsannahme existiert ein $t' \in \mathbb{N}$ mit

$$ES^{t'}(0, (B0^n 0w, 0)) = (0, (B0^n 0w, n)).$$

Mit $t = t' + 3$ gilt dann

$$ES^t(0, (B0^{n+1}w, 0)) = ES^3(0, (B0^n0w, n)) = (0, (B0^{n+1}w, n+1))$$

□ **zu (ii):**

IA ($n = 0$): Hier ist nichts zu zeigen.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Falls $n = 0$ so leistet $t = 3$ das Gewünschte für $n+1 = 1$. Sei also nun $n \geq 1$. Nach Induktionsannahme existiert ein $t' \in \mathbb{N}$ mit

$$ES^{t'}(4, (w, 0^n0v, \lg(w) \dot{-} 1)) = (4, (w0^n0v, \lg(w) + n - 1))$$

Mit $t = t' + 3$ folgt

$$\begin{aligned} ES^t(4, (w0^n0v, \lg(w) - 1)) &= ES^3(4, (w0^n0v, \lg(w) + n - 1)) \\ &= (4, (w0^n0v, \lg(w) + n)) \end{aligned}$$

□

Nun sind wir in der Lage, die Korrektheit von M zu zeigen. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle:

<u>Fall 1:</u> Die Eingabe $\alpha \in \Sigma^*$ ist von der Form $x = 0^m10^n$. Dann gilt nach (i) für ein geeignetes $t_1 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} ES^{t_1}(0, EC(x)) &= ES^{t_1}(0, (B0^m10^nB, 0)) \\ &= (0, (B0^m10^nB, m)) \end{aligned}$$

Weiter gilt nach (ii) für ein geeignetes $t_2 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} ES^{3+t_2+3}(0, (B0^m10^nB, m)) &= ES^{t^2+3}(4, (B0^m00^nB, m+1)) \\ &= ES^3(4, B0^m00^nB, m+1+n)) \\ &= (9, (B0^m00^nB, m+n+1)). \end{aligned}$$

Mit $AC(B0^m00^nB, m+n+1) = 0^{m+n}$ folgt die Behauptung.

<u>Fall 2:</u> x ist nicht von der Form 0^m10^n.
Fall 2.1: $x \in \{0\}^*$. Dann gibt es nach (i) ein $t \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} ES^t(0, EC(x)) &= ES^t(0, (B0^mB, 0)) \\ &= (0, (B0^mB, m)), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} ES^{t+4}(0, EC(x)) &= ES^4(0, (B0^mB, m+1)) \\ &= (9, (B0^mUB, m+2)), \end{aligned}$$

Mit $AC(B0^mUB, m+2) = \varepsilon$ folgt die Behauptung.

Fall 2.2: x ist von der Form $x = 0^m 1 0^n 1 v$ mit $v \in \Sigma^*$. Wie im Fall 1 kann man nun zunächst die Existenz von $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ zeigen, so daß

$$ES^{6+t_1+t_2}(0, EC(x)) = (4, (B0^m 00^n 1vB, m+n+1)),$$

also

$$ES^{3+t_1+t_2+5}(0, EC(x)) = (9, (B0^m 00^n UvB, m+n+3)).$$

Die Behauptung folgt nun aus $AC(B0^m 00^n UvB, m+n+3) = \varepsilon$.

Aufgabe 2

a) Diese Aussage ist nicht korrekt: Angenommen $C(K, \mathbb{N})$ ist rekursiv aufzählbar. Dann gilt $f(C(K, \mathbb{N})) = (\mathbb{N} \setminus K) \cup \{0\}$ für die berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f\langle y_1, z_1, y_2, z_2\rangle &= (1 \dot{-} (1 \dot{-} z_1))y_1 \\ &= \begin{cases} y_1, & \text{falls } z_1 \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(für alle $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{N}$). Mit $C(K, \mathbb{N})$ wäre also auch $(\mathbb{N} \setminus K) \cup \{0\}$ und somit auch $\mathbb{N} \setminus K$ rekursiv aufzählbar, im Widerspruch zu Satz 6.2.5.

b) Diese Aussage trifft zu: Seien A, B rekursive Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann sind nach Definition die Funktionen $cf_A, cf_B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$cf_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$cf_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar. Somit ist also auch die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$\begin{aligned} g\langle y_1, z_1, y_2, z_2\rangle &:= (1 \dot{-} z_1) \cdot cf_A(y_1) \cdot cf_B(y_2) \cdot (1 \dot{-} z_2) \\ &+ (1 \dot{-} z_1) \cdot cf_A(y_1) \cdot (1 \dot{-} cf_B(y_2)) \cdot (1 \dot{-} (1 \dot{-} z_2)) \\ &+ (1 \dot{-} (1 \dot{-} z_1)) \cdot (1 \dot{-} cf_A(y_1)) \cdot (1 \dot{-} cf_B(y_2)) \cdot (1 \dot{-} (1 \dot{-} z_2)) \\ &+ (1 \dot{-} (1 \dot{-} z_1)) \cdot (1 \dot{-} cf_A(y_1)) \cdot cf_B(y_2) \cdot (1 \dot{-} z_2) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \langle y_1, z_1, y_2, z_2\rangle \in C(A, B) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

berechenbar und somit $C(A, B)$ rekursiv.

Aufgabe 3

a) L_2 ist rekursiv, L_1, L_3 und L_5 rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv und L_4 ist nicht rekursiv aufzählbar.

b) (i) <u>L_1 ist rekursiv aufzählbar</u>: L_1 ist Definitionsbereich der berechenbaren Funktion

$$\langle i,j\rangle \mapsto \mu_t((u_\varphi(i,i) \dot{-} j) + (j \dot{-} u_\varphi(i,i))) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi_i(i) = j \\ \uparrow, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>L_1 ist nicht rekursiv</u>: Sei $f_1 :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_1(i,j) = u_\varphi(i,i) \dot{-} u_\varphi(i,i)$$

für alle $i,j \in \mathbb{N}$. Nach dem utm-Theorem ist f_1 berechenbar, also existiert nach dem smn-Theorem ein berechenbares $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f_1(i,j) = \varphi_{r(i)}(j) \qquad (i,j \in \mathbb{N}).$$

Mit L_1 wäre auch $g_1^{-1}(L_1)$ rekursiv, wobei die berechenbare Funktion $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert sei durch $g_1(i) = \langle r(i), 0\rangle$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} g_1^{-1}(L_1) &= \{i \mid \langle r(i), 0\rangle \in L_1\} \\ &= \{i \mid \varphi_{r(i)}(i) = 0\} \\ &= \{i \mid u_\varphi(i,i) \dot{-} u_\varphi(i,i) = 0\} \\ &= K. \end{aligned}$$

(ii) <u>L_2 ist rekursiv</u>: Nach Satz 6.1.4 ist die Menge $\bar{L}_2 = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) \leq t\}$ rekursiv. Die charakteristische Funktion $cf_{\bar{L}_2}$ ist also berechenbar. Dann ist aber auch die Funktion $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_2\langle i,j\rangle = cf_{\bar{L}_2}(i,i,j) \dot{-} j \cdot cf_{\bar{L}_2}(i,i,j \dot{-} 1)$$

berechenbar. Da $f_2 = cf_{L_2}$ folgt hieraus die Behauptung.

(iii) <u>L_3 ist rekursiv aufzählbar</u>: Sei $\bar{L}_2$ wie unter (ii) definiert. Mit $cf_{\bar{L}_2}$ ist dann auch $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f_3\langle i,j,t\rangle = cf_{\bar{L}_2}(i,j,t) \dot{-} t \cdot cf_{\bar{L}_2}(i,j,t \dot{-} 1)$$

berechenbar. Weiter ist auch die Funktion $f_3 :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$g_3\langle i,j,k\rangle = \mu_t((1 \dot{-} f_3\langle i,j,t\rangle) + (1 \dot{-} f_3\langle k,j,t\rangle)),$$

berechenbar. Man weist nun leicht $L_3 = Def(g_3)$ nach.

<u>L_3 ist nicht rekursiv</u>: Sei $h_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $h_3(i) = \langle i,i,i\rangle$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist h_3 offensichtlich berechenbar und mit L_3 wäre auch

$$K = \{i \mid \Phi_i(i) \in \mathbb{N}\} = \{i \mid \Phi_i(i) = \Phi_i(i) \in \mathbb{N}\} = h_3^{-1}(L_3)$$

rekursiv. Widerspruch.

(iv) L_4 ist nicht rekursiv aufzählbar: Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass φ_{k_0} die nirgends definierte Funktion ist. Sei weiter $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie in Teil (i) definiert, d.h. für beliebige $i, j \in \mathbb{N}$ gelte

$$\varphi_{r(i)}(j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \in K \\ \uparrow, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit r ist auch die Funktion $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_4(i) = \langle r(i), 0, k_0 \rangle$ berechenbar. Nehmen wir nun an, L_4 sei rekursiv aufzählbar. Dann ist auch

$$\begin{aligned} f_4^{-1}(L_4) &= \{i \mid \varphi_{r(i)}(0) = \varphi_{k_0} = 0\} \\ &= \{i \mid \varphi_{r(i)}(0) = \uparrow\} = \{i \mid \varphi_i(i) = \uparrow\} \\ &= \mathbb{N} \setminus K \end{aligned}$$

rekursiv aufzählbar. Widerspruch.

(v) L_5 ist rekursiv aufzählbar: Sei f_3 wie in (iii) definiert, d.h. für alle i, j, t gelte

$$f_3 \langle i, j, t \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } \Phi_i(j) = t \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei weiter $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_5 \langle i, j, t \rangle = (u_\varphi(i, j) \dot{-} t) + (t \dot{-} u_\varphi(i, j))$$

Mit f_3 und f_5 ist dann auch $g_5 :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$g_5 \langle i, j, k \rangle = \mu_t(f_5 \langle i, j, t \rangle + (1 \dot{-} f_3 \langle j, k, t \rangle))$$

berechenbar. Man weist leicht $L_5 = Def(g_5)$ nach.

L_5 ist nicht rekursiv: Sei k_1 so gewählt, dass φ_{k_1} überall definiert ist. Mit cf_{L_2} ist dann auch die Funktion $h_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$h_5(j) = \Phi_{k_1}(j) = \mu_t(1 \dot{-} cf_{L_2} \langle k_1, j, t \rangle),$$

berechenbar. Sei nun $p_5 :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$p_5(i, j) = (u_\varphi(i, j) \dot{-} u_\varphi(i, j)) + h_5(j).$$

Dann ist nach dem utm-Theorem p_5 ebenfalls berechenbar. Weiter existiert nach dem smn-Theorem ein berechenbares $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi_{s(i)}(j) = p_5(i, j)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Sei weiter $q_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $q_5(i) = \langle s(i), i, k_1 \rangle$. Offensichtlich ist q_5 berechenbar. Mit L_5 wäre nun auch

$$\begin{aligned} q_5^{-1}(L_5) &= \{i \mid \varphi_{s(i)}(i) = \Phi_{k_1}(i) \in \mathbb{N}\} \\ &= \{i \mid h_5(i) = \Phi_{k_1}(i) \wedge i \in K\} \\ &= K \end{aligned}$$

rekursiv. Widerspruch.

Aufgabe 4

Zunächst weist man leicht nach, dass $CLIQUE_{=\frac{1}{2}} \leq_{pol} CLIQUE_{\leq\frac{1}{2}} \leq_{pol} CLIQUE$, also sowohl $CLIQUE_{=\frac{1}{2}}$ als auch $CLIQUE_{\leq\frac{1}{2}}$ in NP enthalten sind.

a) Wir zeigen $CLIQUE \leq_{pol} CLIQUE_{\leq\frac{1}{2}}$ mittels des folgenden Algorithmus:

(1) Auf Eingabe y wird zunächst überprüft, ob y von der Form $y = x\sharp^k$ ist und ein Graph (V, E) existiert mit $\nu_G(x) = (V, E)$.

(2) Falls $k \leq \left\lfloor \frac{\sharp V}{2} \right\rfloor$ so wird $y = x\sharp^k$ ausgegeben und angehalten, sonst wird nach (3) verzweigt.

(3) Der Graph (V, E) wird zu $(V' \cup V, E)$ mit $\sharp(V' \cup V) = 2k$ vergrößert (indem die Adjazenzmatrix entsprechend mit Nullen aufgefüllt wird).

(4) Es wird ein x' mit $\nu_G(x') = (V' \cup V, E)$ konstruiert und $y' = x'\sharp^k$ ausgegeben.

Zunächst verifiziert man leicht, dass der obige Algorithmus tatsächlich in polynomieller Zeit ausgeführt werden kann. Ferner gilt, dass eine Clique in $(V' \cup V, E)$ auch eine Clique in (V, E) ist und umgekehrt. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

b) Wir zeigen nun $CLIQUE_{\leq\frac{1}{2}} \leq_{pol} CLIQUE_{=\frac{1}{2}}$: Sei hierzu eine Reduktion durch den folgenden Algorithmus definiert:

(1) Auf Eingabe y wird zunächst überprüft, ob y von der Form $y = x\sharp^k$ ist und ein Graph (V, E) existiert mit $\nu_G(x) = (V, E)$ und $k \leq \left\lfloor \frac{\sharp V}{2} \right\rfloor$.

(2) Falls $k = \left\lfloor \frac{\sharp V}{2} \right\rfloor$ so wird $y = x\sharp^k$ ausgegeben und angehalten, sonst wird nach (3) verzweigt.

(3) Der Graph (V, E) wird zu $(V' \cup V, E \cup E')$ mit $\sharp(V' \cup V) = 2\sharp V - 2k$ und $E' = (V' \times (V \cup V')) \cup ((V \cup V') \times V')$ vergrößert (indem die Adjazenzmatrix entsprechend mit Einsen aufgefüllt wird).

(4) Es wird ein x' mit $\nu_G(x') = (V' \cup V, E \cup E')$ konstruiert und $y' = x'\sharp^{k+\sharp V'}$ ausgegeben.

Auch dieser Algorithmus kann in polynomieller Zei ausgeführt werden. Die Korrektheit sieht man wie folgt. Bei Erreichen von (3) gilt $k < \left\lfloor \frac{\sharp V}{2} \right\rfloor$. Es existiert nun eine Clique der Größe k in (V, E) gdw. eine Clique der Größe $k + \sharp V'$ in $(V' \cup V, E \cup E')$ existiert. Wegen $2k + 2\sharp V' = \sharp V + \sharp V'$ folgt somit auch in diesem Fall die Behauptung.

Aufgabe 5

a) Sei G festgelegt durch

$$\begin{array}{llllll} R = \{ & S \to S_1, & S \to S_2, & S_1 \to AB, & A \to \varepsilon, & A \to aAb, \\ & B \to \varepsilon, & B \to cBd, & S_2 \to aS_2d, & S_2 \to C, & C \to bC, \\ & C \to D, & D \to Dc, & D \to \varepsilon & \} & \end{array}$$

(Diese Grammatik könnte man noch weiter vereinfachen, um aber ausführliche Lösungsansätze (insbesondere für Teil c)) anzugeben, zeigen wir b) und c) für diese Grammatik.)

b) Zunächst zerlegen wir G in $G_1 = (\Pi_1, \{a,b,c,d\}, R_1, S_1)$ mit $\Pi_1 = \{S_1, A, B\}$ und $G_2 = (\Pi_2, \{a,b,c,d\}, R_2, S_2)$ mit $\Pi_2 = \{S_2, C, D\}$, wobei $R_i = R \cap \Pi_i \times (\Pi_i \cup \{a,b,c,d\})^*$. Aus der Konstruktion von R folgt sofort $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

Wir zeigen zunächst $\underline{L(G) \subseteq L}$ in zwei Schritten (i) und (ii):

(i) Wir zeigen $\underline{L(G_1) \subseteq L_1 = \{a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}d^{n_4} \mid n_1 = n_2 \wedge n_3 = n_4\}}$ mittels folgender Behauptung:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}. \forall w \in (\Pi_1 \cup \{a,b,c,d\})^*. S_1 \xrightarrow{n} w$
$\Rightarrow \exists r, s \in \mathbb{N}. \exists c_A, c_B \in \{0,1\}. w = S_1 \vee w = a^r A^{c_A} b^r c^s B^{c_B} d^s.$

Beweis:
IA ($n = 0$) hier gilt $w = S_1$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$) Es gelte $S_1 \xrightarrow{n+1} w$. Dann existiert ein w' mit $S_1 \xrightarrow{n} w'$ und $w' \to w$. Nach Induktionsannahme gilt einer der folgenden Fälle:
Fall 1: $w' = S_1$. Dann gilt $w = AB$, d.h. mit $r = s = 0$ hat w die angegebene Form.
Fall 2: $w' = a^r A^{c_A} b^r c^s B^{c_B} d^s$ für geeignete r, s, c_A, c_B. Dann gilt $w = a^{r+1} A^{c_A} b^{r+1} c^s B^{c_B} d^s$, $w = a^r A^{c_A - 1} b^r c^s B^{c_B} d^s$, $w = a^r A^{c_A} b^r c^{s+1} B^{c_B} d^{s+1}$ oder $w = a^r A^{c_A} b^r c^s B^{c_B - 1} d^s$. In all diesen Fällen hat w die korrekte Form.
Aus (1) folgt nun direkt $L(G_1) \subseteq L_1$. Weiter zeigen wir jetzt

(ii) $\underline{L(G_2) \subseteq L_2 := \{a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}d^{n_4} \mid n_1 = n_4\}}$ mittels

(2) $\forall n \in \mathbb{N}. \forall w \in (\Pi_2 \cup \{a,b,c,d\})^*. S_1 \xrightarrow{n} w$
$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}.\ w = a^r S_2 d^r \vee \exists r, s \in \mathbb{N}.\ w = a^r b^s C d^r$
$\vee \exists r, s, t \in \mathbb{N}.\ \exists c_D \in \{0,1\}.\ w = a^r b^s D^{c_D} c^t d^r.$

Beweis:
IA ($n = 0$): wähle $r = 0$. $w = S_2$ hat die korrekte Form.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$)): Da $S_2 \xrightarrow{n+1} w$ existiert ein w' mit

$$S_2 \xrightarrow{n} w' \to w.$$

Fall 1: $\exists r.\ w' = a^r S_2 d^r$. Dann gilt entweder $w = a^{r+1} S_2 d_2^{r+1}$ oder $w = a^r C d^r$. In beiden Fällen hat w die korrekte Form.
Fall 2: $\exists r, s.\ w' = a^r b^s C d^r$. Dann gilt entweder $w = a^r b^{s+1} C d^r$ oder $w = a^r b^s D d^r$. Wiederum hat w die korrekte Form.
Fall 3: $\exists r, s, t \in \mathbb{N}.\ \exists c_D \in \{0,1\}.\ w' = a^r b^s D^{c_D} c^t d^r$. Dann gilt entweder $w = a^r b^s D^{c_D} c^{t+1} d^r$ oder $w = a^r b^s D^{c_D+1} c^t d^r$. Wiederum hat w die angegebene Form.
Aus (2) folgt unmittelbar $L(G_2) \subseteq L_2$, insgesamt also

$$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) \subseteq L_1 \cup L_2 = L$$

Wir zeigen nun weiter

(iii) $L_1 \subseteq L(G_1)$ mittels

(3) $\quad \forall r, s \in \mathbb{N}. \exists n \in \mathbb{N}. S_1 \xrightarrow{n} a^r A b^r c^s B d^s.$

Beweis (per Induktion nach $r + s$):
IA ($r + s = 0$). Dann gilt $r = 0, s = 0$ und die Behauptung folgt mit $S s_1 \to AB \in R_1$.
IS ($r + s \rightsquigarrow r + s + 1$). Seien $r, s \geq 0$ gegeben. Sei zunächst $r > 0$. Dann existiert nach Induktionsannahme ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$S_1 \xrightarrow{n} a^{r-1} A b^{r-1} c^s B d^s.$$

Somit gilt auch

$$S_1 \xrightarrow{n+1} a^r A b^r c^s B d^s.$$

Analog zeigt man die Behauptung auch für $r = 0$ und $s > 0$.
Aus (3) folgt aber direkt $L_1 \subseteq L(G_1)$, wenn man abschließend mit den Regeln $A \to \varepsilon$ und $B \to \varepsilon$ ableitet.

(iv) $L_2 \subseteq L(G_2)$. Wir zeigen zunächst

(4) $\quad \forall r \in \mathbb{N}. \exists n \in \mathbb{N}. S_2 \xrightarrow{n} a^r S_2 d^r.$

Beweis:
IA ($r = 0$). Wähle $n = 0$.
IS ($r \rightsquigarrow r + 1$). Nach Induktionsannahme existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $S_2 \xrightarrow{n} a^r S_2 d^r$. Nun gilt also $S_2 \xrightarrow{n} a^r S_2 d^r \to a^{r+1} S_2 d^{r+1}$.
Weiter zeigen wir nun

(5) $\quad \forall r \in \mathbb{N}. C \xrightarrow{*} b^r C \wedge D \xrightarrow{*} D c^r.$

Beweis:
IA ($r = 0$). Es gilt $C \xrightarrow{0} C$ und $D \xrightarrow{0} D$.
IS ($r \rightsquigarrow r + 1$). Nach Induktionsannahme und wegen $D \to Dc$, $C \to bC \in R_2$ gilt

$$C \xrightarrow{*} b^r C \to b^{r+1} C \quad \text{und} \quad D \xrightarrow{*} D c^r \to D c^{r+1}.$$

Sei nun ein Wert $w \in L_2$ gegeben. Dann existieren $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ mit $w = a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_1}$ und die Behauptung (iv) folgt aus (4) und (5):

$$\begin{aligned} S_2 \xrightarrow{*} a^{n_1} S_2 d^{n_1} &\rightarrow a^{n_1} C d^{n_1} \xrightarrow{*} a^{n_1} b^{n_2} C d^{n_1} \\ &\rightarrow a^{n_1} b^{n_2} D d^{n_1} \xrightarrow{*} a^{n_1} b^{n_2} D c^{n_3} d^{n_1} \rightarrow w. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also $L = L_1 \cup L_2 \subseteq L(G_1) \cup L(G_2) = L(G)$.

c) (i) Eliminieren der ε-Regeln:
Sei $G_a = (\Pi, \{a, b, c, d\}, R_a, S)$ definiert durch

$$\begin{aligned} R_a = \{ & S \rightarrow S_1,\ S \rightarrow S_2,\ S_1 \rightarrow AB,\ S_1 \rightarrow B,\ S_1 \rightarrow A, \\ & A \rightarrow aAb,\ A \rightarrow ab,\ B \rightarrow cBd,\ B \rightarrow cd, \\ & S_2 \rightarrow aS_2d,\ S_2 \rightarrow ad,\ S_2 \rightarrow C,\ C \rightarrow bC,\ C \rightarrow b, \\ & C \rightarrow D,\ D \rightarrow Dc,\ D \rightarrow c\} \end{aligned}$$

(ii) ET:
Sei $G_b = (\Pi_b, \{a, b, c, d\}, R_b, S\}$ definiert durch $\Pi_b = \Pi \cup \{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ und

$$\begin{aligned} R_b = \{ & S \rightarrow S_1,\ S \rightarrow S_2,\ S_1 \rightarrow AB,\ S_1 \rightarrow B,\ S_1 \rightarrow A, \\ & A \rightarrow \overline{A}A\overline{B},\ A \rightarrow \overline{A}\,\overline{B},\ B \rightarrow \overline{C}\,B\,\overline{D},\ B \rightarrow \overline{C}\,\overline{D}, \\ & S_2 \rightarrow \overline{A}S_2\overline{D},\ S_2 \rightarrow \overline{A}\,\overline{D},\ S_2 \rightarrow C,\ C \rightarrow \overline{B}\,C,\ C \rightarrow \overline{B}, \\ & C \rightarrow D,\ D \rightarrow D\overline{C},\ D \rightarrow \overline{C},\ \overline{A} \rightarrow a,\ \overline{B} \rightarrow b,\ \overline{C} \rightarrow c, \\ & \overline{D} \rightarrow d\} \end{aligned}$$

(iii) VR:
Sei $G_c = (\Pi_c, \{a, b, c, d\}, R_c, S)$ definiert durch $\Pi_c = \Pi_b \cup \{E, F, G\}$ und

$$\begin{aligned} R_c = \{ & S \rightarrow S_1,\ S \rightarrow S_2,\ S_1 \rightarrow AB,\ S_1 \rightarrow B,\ S_1 \rightarrow A, \\ & A \rightarrow \overline{A}E,\ E \rightarrow A\overline{B},\ A \rightarrow \overline{A}\,\overline{B},\ B \rightarrow \overline{C}F,\ F \rightarrow B\overline{D}, \\ & B \rightarrow \overline{C}\,\overline{D},\ S_2 \rightarrow \overline{A}G,\ G \rightarrow S_2\overline{D},\ S_2 \rightarrow \overline{A}\,\overline{D},\ S_2 \rightarrow C, \\ & C \rightarrow \overline{B}C,\ C \rightarrow \overline{B},\ C \rightarrow D,\ D \rightarrow D\overline{C},\ D \rightarrow \overline{C},\ \overline{A} \rightarrow a, \\ & \overline{B} \rightarrow b,\ \overline{C} \rightarrow c,\ \overline{D} \rightarrow d\} \end{aligned}$$

(iv) Eliminieren längentreuer Regeln:
Sei $G_d = (\Pi_c, \{a, b, c, d\}, R_d, S)$ definiert durch

$$\begin{aligned} R_d = \{ & S \rightarrow AB,\ S \rightarrow \overline{C}F,\ S \rightarrow \overline{C}\,\overline{D},\ S \rightarrow \overline{A}E,\ S \rightarrow \overline{A}\,\overline{B}, \\ & S \rightarrow \overline{A}G,\ S \rightarrow \overline{A}\,\overline{D},\ S \rightarrow \overline{B}C,\ S \rightarrow b,\ S \rightarrow D\overline{C},\ S \rightarrow c, \\ & S_1 \rightarrow AB,\ S_1 \rightarrow \overline{C}F,\ S_1 \rightarrow \overline{C}\,\overline{D},\ S_1 \rightarrow \overline{A}E,\ S_1 \rightarrow \overline{A}\,\overline{B}, \\ & A \rightarrow \overline{A}E,\ E \rightarrow A\overline{B},\ A \rightarrow \overline{A}\,\overline{B},\ B \rightarrow \overline{C}F,\ F \rightarrow B\overline{D}, \\ & B \rightarrow \overline{C}\,\overline{D},\ S_2 \rightarrow \overline{A}G,\ G \rightarrow S_2\overline{D},\ S_2 \rightarrow \overline{A}\,\overline{D},\ S_2 \rightarrow \overline{B}C, \\ & S_2 \rightarrow b,\ S_2 \rightarrow D\overline{C},\ S_2 \rightarrow C,\ C \rightarrow \overline{B}C,\ C \rightarrow b,\ C \rightarrow D\overline{C}, \\ & C \rightarrow c,\ D \rightarrow D\overline{C},\ D \rightarrow C,\ \overline{A} \rightarrow a,\ \overline{B} \rightarrow b,\ \overline{C} \rightarrow c,\ \overline{D} \rightarrow d\}. \end{aligned}$$

Nach Satz 12.3.4 und zugehörigem Beweis gilt nun $L(G_d) = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Ferner ist $L(G_d)$ in Chomski-Normalform.

Aufgabe 6

a) L_1 und L_4 sind nicht kontextfrei, L_3 ist kontextfrei, aber nicht regulär und L_2 ist regulär.

b) <u>L_1 ist nicht kontextfrei:</u> Angenommen, L_1 sei kontextfrei. Dann existiert nach Satz 12.4.3 ein n_1, so dass zu jedem Wort $z \in L_1$ mit $\lg(z) \geq n_1$ Teilworte u, v, w, x, y existieren mit $z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$, $\lg(vwx) \leq n_1$ und $uv^iwx^iy \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei p die kleinste Primzahl $p \geq n_1$. Dann existiert also ein $m_1 > 0$ mit $a^{p+i\cdot m_1} \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Setzt man hierin $i = p$ so erhält man

$$a^{p+p\cdot m_1} = a^{(m+1)p} \in L_1,$$

aber $(m+1)p$ ist offensichtlich keine Primzahl. Widerspruch.

<u>L_2 ist regulär:</u> Wir geben eine rechtslineare Normalformgrammatik $G = (\Pi, \{a\}, R, S_0)$ mit $L(G) = L_2$ an: Sei $\Pi = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ und $R = \{S_i \to aS_{i+1} \mid i = 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{S_5 \to aS_0, S_1 \to \varepsilon, S_5 \to \varepsilon\}$. Wir zeigen nun zunächst die folgende Behauptung

(1) $\quad S_0 \xrightarrow{n} w \Leftrightarrow (\exists i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. w = a^n S_i \wedge i \equiv n \pmod 6)$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $w \in (\{a\} \cup \Pi)^* \setminus \{a\}^*$ gilt.

IA: Für $n = 0$ gilt $S_0 \xrightarrow{0} w \Leftrightarrow w = S_0$.
IS: Sei zunächst $w \in (\{a\} \cup \Pi)^* \setminus \{a\}^*$ mit $S_0 \xrightarrow{n+1} w$ gegeben. Dann existiert ein $w' \in (\{a\} \cup \Pi)^* \setminus \{a\}^*$ mit $S_0 \xrightarrow{n} w' \xrightarrow{1} w$. Nach IA gilt $w' = a^n S_i$ für ein $i \in \{0, ..., 5\}$ mit $i \equiv n \pmod 6$. Man verifiziert nun leicht, dass dann auch w die angegebene Form hat.
Sei nun umgekehrt ein $i \in \{0, ..., 5\}$ mit $n + 1 \equiv i \pmod 6$ gegeben. Dann existiert nach IA ein $j \in \{0, ..., 5\}$ mit $n \equiv j \pmod 6$ und $S_0 \xrightarrow{n} a^n S_j$. Dann gilt aber auch $S_0 \xrightarrow{n} a^n S_j \xrightarrow{1} a^{n+1} S_i$.

Aus (1) folgt nun direkt die Behauptung wenn man beachtet, dass n genau dann weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist, wenn $n \equiv 1 \pmod 6$ oder $n \equiv 5 \pmod 6$.

<u>L_3 ist kontextfrei:</u> Sei $G = (\Pi, \{a, b, c\}, R, S)$ gegeben durch $\Pi = \{S, A\}$ und $R = \{S \to aSc, S \to A, A \to bAc, A \to \varepsilon\}$. Wir zeigen nun $L(G) = L_3$ mittels der folgenden Aussage

(2) $\quad S \xrightarrow{n} w \Leftrightarrow (w = a^n S c^n \vee (\exists r, s \in \mathbb{N}. r + s = n - 1 \wedge w = a^r b^s A c^{n-1}))$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $w \in (\{a,b,c\} \cup \Pi)^* \setminus \{a,b,c\}^*$.

IA: Für $n = 0$ gilt $S \xrightarrow{0} w \Leftrightarrow w = S$.
IS: Sei zunächst $w \in (\{a,b,c\} \cup \Pi)^* \setminus \{a,b,c\}^*$ mit $S \xrightarrow{n+1} w$ gegeben. Dann existiert ein $w' \in (\{a,b,c\} \cup \Pi)^* \setminus \{a,b,c\}^*$ mit $S \xrightarrow{n} w' \xrightarrow{1} w$. Nach IA gilt $w' = a^n S c^n$ oder $w' = a^r b^s A c^{n-1}$ für geeigneter r, s mit $r + s = n - 1$. Man verifiziert nun leicht, dass dann auch w die angegebene Form hat (Je nachdem welche Regel man anwendet erhält man einen der beiden Fälle).
Sei umgekehrt r, s mit $r + s = n$ gegeben. Falls $s = 0$ so gilt

$$S \xrightarrow{n} a^r S c^r \xrightarrow{1} a^r A c^r,$$

andernfalls gilt

$$S \xrightarrow{n} a^r b^{s-1} A c^{n-1} \xrightarrow{1} a^r b^s A c^n.$$

Ferner gilt

$$S \xrightarrow{n} a^n S c^n \xrightarrow{1} a^{n+1} S c^{n+1}.$$

Aus (2) folgt nun direkt die Behauptung.

<u>L_3 ist nicht regulär:</u> Angenommen L_3 sei regulär und n_3 sei die Konstante aus dem Pumping-Lemma. Betrachten wir nun das Wort $y = a^{n_3} b c^{n_3+1} \in L_3$ und die Zerlegung $y = tw\bar{t}$ mit $t = \varepsilon$, $w = a^{n_3}$ und $\bar{t} = bc^{n_3+1}$, so ergibt sich aus dem Pumping-Lemma die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k \leq n_3$ und $a^{n_3-k} b c^{n_3+1} \in L_3$. Widerspruch.

<u>L_4 ist nicht kontextfrei:</u> Angenommen, L_4 ist kontextfrei. Sei dann n_4 die Konstante aus dem Pumping-Lemma und $uvwxy = a^{n_3} b^{n_3^2}$ eine entsprechende Zerlegung mit $vx \neq \varepsilon$, $\lg(vwx) \leq n_3$ und $uv^iwx^iy \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Falls $vx \in \{a\}^* \cup \{b\}^*$ so erhalten wir einen Widerspruch mit $i = 0$. Falls v oder x sowohl a's und b's enthält, so erhalten wir einen Widerspruch mit $i = 2$ da dann ein a nach einem b in uv^2wx^2y folgt. Somit muss also $v \in \{a\}^*$ und $x \in \{b\}^*$ gelten. Mithin existieren k, k' mit $0 < k, k' \leq n_3$ so dass $a^{n_3+i\cdot k} b^{n_3^2+i\cdot k'} \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit $i = n_3$ folgt hieraus $(n_3 + k \cdot n_3)^2 = n_3^2 + k' \cdot n_3$ im Widerspruch zu $(n_3 + k \cdot n_3)^2 \geq 4n_3^2 > 2n_3^2 \geq n_3^2 + k' \cdot n_3$.