Kurs 01655

Lösungshinweise zur Klausur vom 19. 03. 2005

Aufgabe 1

(a)

(i) Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}$.

<u>Induktionsanfang $k = 0$:</u>

Offensichtlich gilt

$$\mathrm{ES}^{3\cdot 0}(2, (1, n, 0, ...)) = (2, (2^0, n - 0, 0, ...)).$$

<u>Induktionsschritt $k \to k + 1$:</u>

Sei $k + 1 \leq n$, dann gilt insbesondere $k \leq n$ und wir dürfen die Induktionsannahme verwenden:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{ES}^{3(k+1)}(2, (1, n, 0, ...)) \\
= \; & \mathrm{ES}^{3}(2, (2^k, n - k, 0, ...)) && \text{(Ind.-annahme)} \\
= \; & \mathrm{ES}^{2}(3, (2^k, n - k, 0, ...)) && n - k \geq 1 > 0 \\
= \; & \mathrm{ES}(4, (2^k \cdot 2, n - k, 0, ...)) \\
= \; & (2, (2^k \cdot 2, n - k - 1, 0, ...)) \\
= \; & (2, (2^{k+1}, n - (k + 1), 0, ...))
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathrm{ES}^{3\cdot n+2}(1, (0, n, 0, 0, ...)) \\
= \; & \mathrm{ES}^{3\cdot n+1}(2, (1, n, 0, 0, ...)) \\
= \; & \mathrm{ES}(2, (2^n, n - n, 0, ...)) && \text{(nach Teil (a))} \\
= \; & (5, (2^n, 0, 0, ...))
\end{aligned}$$

Da die letztgenannte Konfiguration eine Endkonfiguration ist, ergibt sich daraus

$$\mathrm{GS}(1, (0, n, 0, 0, ...)) = (5, (2^n, 0, 0, ...)).$$

Mit dem Flussdiagramm F aus der Aufgabenstellung erhalten wir also

$$\begin{aligned} f_M(n) &= \mathrm{AC} \circ f_F \circ \mathrm{EC}^{(1)}(n) \\ &= \mathrm{AC} \circ f_F(0, n, 0, 0, \ldots) \\ &= \mathrm{AC}(2^n, 0, 0, \ldots) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 0 \\ f(x, y+1) &= \sum_{i=0}^{y+1} i^{x+2} \\ &= \sum_{i=0}^{y} i^{x+2} + (y+1)^{x+2} \\ &= f(x, y) + (y+1)^{x+2} \end{aligned}$$

Wir definieren nun $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$g(a) := 0$$

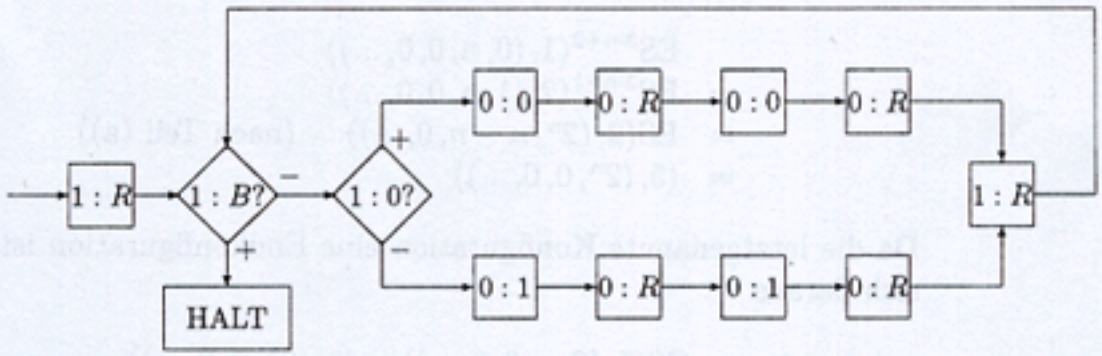
und $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ durch

$$h(a, b, c) := c + (b+1)^{a+2}.$$

Dann ist $f(x, 0) = g(x)$ und $f(x, y+1) = h(x, y, f(x, y))$, also entsteht f durch primitive Rekursion aus g und h.

Aufgabe 2

(a) Die Turingmaschine mit Ein-/Ausgabealphabet $\Sigma := \{0, 1\}$ und dem folgenden Flussdiagramm (versehen mit entsprechenden Marken)



berechnet die gesuchte Wortfunktion f.

(b) Wir definieren $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$F(\langle m, n, k\rangle) := \langle 3m + 5k + 5, 3n, 5k + 4\rangle$$

für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$. Dann ist F berechenbar, und es gilt

$$\begin{aligned} & f(\nu_{\mathbb{Q}}\langle m, n, k\rangle) \\ = & \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{m-n}{k+1} + 1 \\ = & \tfrac{3m-3n}{5k+5} + \tfrac{5k+5}{5k+5} \\ = & \tfrac{(3m+5k+5)-3n}{5k+4+1} \\ = & \nu_{\mathbb{Q}}(F(\langle m, n, k\rangle)) \end{aligned}$$

Also ist f eine $(\nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$–berechenbare Funktion.

Aufgabe 3

(a) Die Funktion $u_\varphi :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, die definiert ist durch $u_\varphi(i, n) := \varphi_i(n)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$, ist eine berechenbare Zahlenfunktion.

(b) Wir definieren eine Zahlenfunktion $h :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$h(i, n) := \varphi_i(n) \cdot \varphi_i(n)$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Die Funktion h ist berechenbar, da man sie durch Substitution aus berechenbaren Funktionen erhält:

$$h(i, n) = u_\varphi(i, n) \cdot u_\varphi(i, n).$$

Nach dem smn–Theorem existiert eine totale berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass

$$h(i, n) = \varphi_{r(i)}(n)$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}$ gilt. Das bedeutet, dass für alle $i, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{r(i)}(n) &= h(i, n) \\ &= u_\varphi(i, n) \cdot u_\varphi(i, n) \\ &= \varphi_i(n) \cdot \varphi_i(n) \\ &= H(\varphi_i)(n). \end{aligned}$$

Also ist $\varphi_{r(i)} = H(\varphi_i)$ und r ist eine (φ, φ)–Realisierung von H. Daher ist H eine (φ, φ)–berechenbare Funktion.

(c) (i) Die leere Menge ist rekursiv aufzählbar, da $\emptyset = \mathrm{Def}(f)$ mit

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ definiert durch } f(n) := \uparrow$$

für alle n und f ist berechenbar. Das Flussdiagramm der Registermaschine, die f berechnet, besteht nur aus einer Endlosschleife.

(ii) Die Aussage ist richtig! Wenn A rekursiv ist, ist die charakteristische Funktion

$$\mathrm{cf}_A(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \in A \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine totale berechenbare Funktion und es gilt insbesondere

$$n \in A \Leftrightarrow \mathrm{cf}_A(n) \in \{0\}.$$

Also ist A reduzierbar auf $\{0\}$.

(iii) Die Aussage ist falsch! Ein Gegenbeispiel ist

$$A := \mathbb{N} \text{ und } B := \mathbb{N} \setminus K.$$

(B ist das Komplement des Selbstanwendbarkeitsproblems.) Dann ist A rekursiv aufzählbar, denn

$$\mathbb{N} = \mathrm{Def}(f) \text{ mit } f(n) := n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und f ist berechenbar. Aber $B \subseteq \mathbb{N}$ ist nicht rekursiv aufzählbar: angenommen $\mathbb{N}^k \setminus K$ wäre rekursiv aufzählbar. Da K ebenfalls rekursiv aufzählbar ist, folgt K rekursiv. Dies steht im Widerspruch zu den im Kurstext gezeigten Eigenschaften von K. Also ist $B \subseteq \mathbb{N}$ nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4

Wir geben zu den Antworten jeweils kurze Begründungen an.

(a) Richtig. Gilt nach Satz 9.2.4 (2).

(b) Falsch. $\mathrm{Def}(s_M) \subseteq \Sigma^*$, aber $\mathrm{Def}(\tilde{s}_M) \subseteq \mathbb{N}$.

(c) Falsch. Ein Gegenbeispiel findet sich in 7.4.2 (5).

(d) Richtig.

(e) Richtig. Gilt nach Satz 7.6.3.

(f) Falsch. Im Abschnitt 8.4 des Kurses ist ein Gegenbeispiel genannt.

(g) Richtig. Folgt mit dem Zeithierarchiesatz (s. 8.5.2).

(h) Falsch. Folgt mit dem Bandhierarchiesatz.

(i) Richtig. Folgt aus Definition 9.4.1 und Satz 9.4.3 (2).

(j) Richtig. 2D-DOMINO$\in$ NP und SAT ist NP–vollständig.

Aufgabe 5

Wir beschreiben die Arbeitsweise einer geeigneten 2-Band-Turingmaschine M bei Eingabe von 0^n :

(1) Initialisiere Band 2 und Band 3 mit „0".

(2) Berechne (durch duales Inkrementieren) $a = d(n)$ auf Band 2 und Band 3.

(3) Überschreibe jedes Symbol $\neq$ B auf Band 2 mit „0".

(4) Positioniere den Kopf von Band 3 auf das (von links) erste Symbol.

(5) WHILE *aktuelles Symbol auf Band* 3 $\neq$ B DO
kopiere den Inhalt von Band 2 auf das Ausgabeband;
gehe auf Band 3 einen Schritt nach rechts.

Die Korrektheit der Maschine brauchte nicht bewiesen zu werden. Zur Abschätzung des Bandbedarfs geben wir für jedes Band ein entsprechendes „$O(\cdots)$" an:

2: $O(\log n)$;

3: $O(\log n)$.

Man beachte, dass nur die Arbeitsbänder zur Bandkomplexität beitragen. Es folgt, dass die Maschine sogar mit weniger als dem zulässigen Speicherplatz auskommt: $\tilde{s}_M \in O(\log n)$. Damit ist f bandkonstruierbar.

Aufgabe 6

(a) Wir verwenden das im Beweis von Lemma 11.2.6 beschriebene Verfahren um eine rechtslineare Normalformgrammatik G' mit $L(G') = L(G)$ zu finden.

(1) Normieren der Terminalregeln:

Die beiden Terminalregeln $\mathtt{T} \to \mathtt{aa}$ und $\mathtt{U} \to \mathtt{bb}$ werden ersetzt durch die Regeln $\mathtt{T} \to \mathtt{aaE}$, $\mathtt{U} \to \mathtt{bbE}$ und $\mathtt{E} \to \varepsilon$.

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \to & \mathtt{aaT} \mid \mathtt{bbU} \mid \mathtt{V} \\ \mathtt{T} & \to & \mathtt{bT} \mid \mathtt{aaE} \\ \mathtt{U} & \to & \mathtt{aU} \mid \mathtt{bbE} \\ \mathtt{V} & \to & \mathtt{bV} \mid \varepsilon \\ \mathtt{E} & \to & \varepsilon . \end{array}$$

(2) Verkürzung der Regellängen:

Es sind die Regeln $\mathtt{S} \to \mathtt{aaT}$, $\mathtt{S} \to \mathtt{bbU}$, $\mathtt{T} \to \mathtt{aaE}$ und $\mathtt{U} \to \mathtt{bbE}$ zu verkürzen. Wir führen X, Y, A und B als neue Nichterminalsymbole ein und ersetzen jede zu verkürzende Regel durch neue Regeln, in denen jeweils nur noch ein Terminalsymbol vorkommt.

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \to & \mathtt{aX} \mid \mathtt{bY} \mid \mathtt{V} \\ \mathtt{T} & \to & \mathtt{bT} \mid \mathtt{aA} \\ \mathtt{U} & \to & \mathtt{aU} \mid \mathtt{bB} \\ \mathtt{V} & \to & \mathtt{bV} \mid \varepsilon \\ \mathtt{X} & \to & \mathtt{aT} \\ \mathtt{Y} & \to & \mathtt{bU} \\ \mathtt{A} & \to & \mathtt{aE} \\ \mathtt{B} & \to & \mathtt{bE} \\ \mathtt{E} & \to & \varepsilon . \end{array}$$

(3) Eliminieren längentreuer Regeln:

Die einzige längentreue Regel $\mathtt{S} \to \mathtt{V}$ ersetzen wir durch alle Regeln der Form $\mathtt{S} \to w$, für die $\mathtt{V} \to w$ eine Regel ist.

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \to & \mathtt{aX} \mid \mathtt{bY} \mid \mathtt{bV} \mid \varepsilon \\ \mathtt{T} & \to & \mathtt{bT} \mid \mathtt{aA} \\ \mathtt{U} & \to & \mathtt{aU} \mid \mathtt{bB} \\ \mathtt{V} & \to & \mathtt{bV} \mid \varepsilon \\ \mathtt{X} & \to & \mathtt{aT} \\ \mathtt{Y} & \to & \mathtt{bU} \\ \mathtt{A} & \to & \mathtt{aE} \\ \mathtt{B} & \to & \mathtt{bE} \\ \mathtt{E} & \to & \varepsilon . \end{array}$$

Die Grammatik $G' = (\Pi', \Sigma, R', S)$ mit dem neuen Nichtterminalalphabet $\Pi' := \{\mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{U}, \mathtt{V}, \mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{E}\}$ und der oben angegebenen Regelmenge R' ist nun eine rechtslineare Normalformgrammatik, für die $L(G') = L(G)$ gilt.

(b) Wir wollen zeigen, dass die Sprache $L := \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{a}^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Angenommen, die Sprache L wäre regulär. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, die den im Pumping–Lemma 11.4.3 genannten Bedingungen genügt:

Für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $\lg(z) = n$ gibt es $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $z = uvw$, $v \neq \varepsilon$ und $tuv^iw\bar{t} \in L$ für alle $i \geq 0$.

Nun erfüllen die Wörter $t := \mathtt{a}^n\mathtt{b}$, $z := \mathtt{a}^n$ und $\bar{t} := \varepsilon$ die Voraussetzungen $tz\bar{t} = \mathtt{a}^n\mathtt{b}\mathtt{a}^n \in L$ und $\lg(z) = n$ aus dem Pumping-Lemma, daher müsste es Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ geben mit $z = uvw$, $v \neq \varepsilon$ und $tuv^iw\bar{t} \in L$ für alle $i \geq 0$. Speziell für $i = 0$ hätten wir dann

$$tuv^0w\bar{t} = tuw\bar{t} = \mathtt{a}^n\mathtt{b}\mathtt{a}^{n-\lg(v)},$$

mit $n - \lg(v) < n$, da $\lg(v) > 0$ wegen $v \neq \varepsilon$, also $tuv^0w\bar{t} \notin L$ in Widerspruch zum Ergebnis des Pumping–Lemmas.

Somit war unsere Annahme falsch, und die Sprache L ist demnach nicht regulär.

Aufgabe 7

Hier werden kurze Begründungen gegeben (bei der Bearbeitung der Klausur sind diese *nicht* erforderlich).

(a) Diese Aussage ist *richtig*, denn nach Satz 11.1.4 (2) ist jede endliche Menge M von Wörtern regulär, so dass M nach Satz 11.3.14 von einer rechtslinearen (und damit auch kontextfreien) Grammatik erzeugt wird.

(b) Diese Aussage ist *falsch*, denn wäre jede rekursiv aufzählbare Menge kontextfrei, so wäre jede Typ-0-Sprache auch eine Typ-2-Sprache (vgl. Definition 10.3.1). Nach Satz 12.4.8 sind die Typ-0-Sprachen jedoch eine echte Obermenge der Typ-2-Sprachen.

(c) Diese Aussage ist *richtig* gemäß Beispiel 12.1.1.

(d) Diese Aussage ist *falsch* gemäß Lemma 12.4.5.

(e) Diese Aussage ist *falsch*, denn würde jede kontextfreie Sprache von einer rechtslinearen Grammatik erzeugt, so wäre jede Typ-2-Sprache auch eine Typ-3-Sprache (Definition 10.3.1). Gemäß Satz 12.4.8 sind die Typ-2-Sprachen jedoch eine echte Obermenge der Typ-3-Sprachen.

(f) Diese Aussage ist *richtig* gemäß Satz 12.3.4.

(g) Diese Aussage ist *falsch*, denn würde jede kontextfreie Sprache von einem endlichen Automaten erkannt, so wäre jede kontextfreie Sprache nach Satz 11.3.14 rechtslinear, das heißt jede Typ-2-Sprache wäre auch eine Typ-3-Sprache (Definition 10.3.1). Gemäß Satz 12.4.8 sind die Typ-2-Sprachen jedoch eine echte Obermenge der Typ-3-Sprachen.

(h) Diese Aussage ist *richtig*, denn nach Satz 11.3.14 gibt es eine rechtslineare (und damit auch kontextfreie) Grammatik G mit $L(G) = L(A)$.

(i) Diese Aussage ist *richtig*, denn nach Satz 12.4.8 bilden die kontextfreien Sprachen (Typ-2-Sprachen) eine echte Obermenge der Menge aller rechtslinearen Sprachen (Typ-3-Sprachen), die nach Satz 11.3.14 mit der Menge aller regulären Sprachen übereinstimmt.

(j) Diese Aussage ist *falsch*, da die kontextfreien Sprachen (Typ-2-Sprachen) gemäß Satz 12.4.8 eine echte Obermenge der kontextsensitiven Sprachen (Typ-1-Sprachen) bilden, also keine echte Teilmenge.