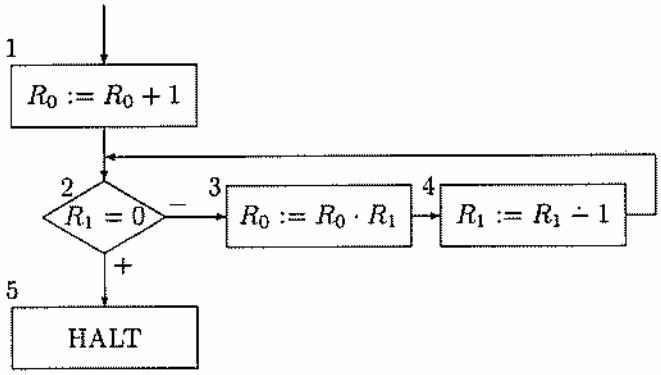
Kurs 1655 – Grundlagen der Theoretischen Informatik

(Wintersemester 2005/2006)

– Aufgaben zu den Studientagen –

Aufgabe I.1

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine sei durch das folgende Flussdiagramm F gegeben:



(a) Welche der folgenden Behauptungen über F treffen zu? Beachten Sie, dass man üblicherweise definiert: $0! = 1$ und $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ für alle $n \geq 0$.

(1) $\forall x \in \mathbb{N}.\ \exists t \in \mathbb{N}.\quad \mathrm{ES}^t(1, (0, x, 0, \ldots)) = (5, (x!, 0, 0, \ldots))$

(2) $\forall x \in \mathbb{N}.\quad \mathrm{ES}^{3x}(2, (1, x, 0, \ldots)) = (2, (x!, 0, 0, \ldots))$

(3) $\forall x \in \mathbb{N}.\ \forall y \in \mathbb{N}.\ \exists t \in \mathbb{N}.\quad \mathrm{ES}^t(2, (y, x, 0, \ldots)) = (2, (y \cdot x!, 0, 0, \ldots))$

(4) $\forall x \in \mathbb{N}.\ \forall y, z \in \mathbb{N}.$

$$\mathrm{ES}^{3x}(2, (y, z, 0, \ldots)) = (2, (y \cdot \prod_{i=1}^{x} (z \dot{-} (i-1)), z \dot{-} x, 0, \ldots))$$

(b) Welche der Behauptungen (1) – (4) lassen sich als Induktionsbehauptung durch vollständige Induktion nach x beweisen?

(c) Führen Sie einen der Induktionsbeweise komplett aus.

(d) Geben Sie f_M mit Hilfe eines einfachen arithmetischen Ausdrucks an und folgern Sie Ihre Behauptung aus der in (c) bewiesenen Aussage.

Aufgabe I.2

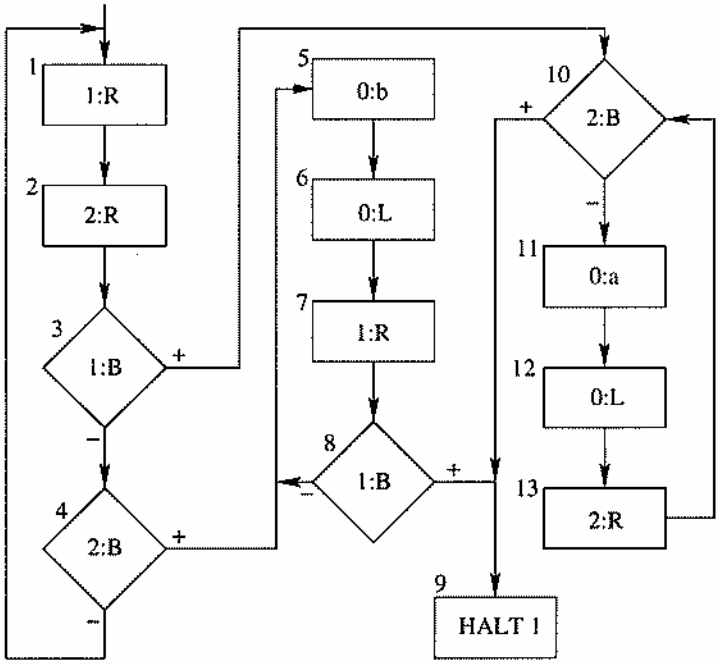
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $f\langle x, \langle y, z\rangle, w\rangle := \langle x + y, \langle 4 \dot{-} w, zy\rangle, x, z\rangle$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie eine explizite Definition von f mittels der Cantorschen Tupelfunktionen und der Projektionen ihrer Umkehrfunktionen in der Form "$f(n) := \ldots \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$" an, ohne andere Variablen als n zu benutzen.

(b) Ist f berechenbar? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Aufgabe II.1

Eine 2-stellige Turingmaschine M über $\Sigma := \{a, b\}$ mit dem Arbeitsalphabet $\Gamma := \{a, b, B\}$ sei gegeben durch das folgende Flussdiagramm F:



(a) Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(1) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u, v \in \Sigma^n)(\forall x, y \in \Gamma^*)(\forall c, d \in \Gamma)(\exists t \in \mathbb{N})$
$ES^t((1, ((\varepsilon, B, \varepsilon), (\varepsilon, B, ucx), (\varepsilon, B, vdy), (\varepsilon, B, \varepsilon), \ldots)))$
$= (3, ((\varepsilon, B, \varepsilon), (Bu, c, x), (Bv, d, y), (\varepsilon, B, \varepsilon), \ldots))$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \Sigma^n)(\forall \alpha, \beta \in \Gamma^*)(\forall c \in \Gamma)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists t \in \mathbb{N})$
$ES^t((5, ((\varepsilon, B, b^k), (\alpha, c, xB), (\beta, B, \varepsilon), (\varepsilon, B, \varepsilon), \ldots)))$
$= (8, ((\varepsilon, B, b^{k+n+1}), (\alpha cx, B, \varepsilon), (\beta, B, \varepsilon), (\varepsilon, B, \varepsilon), \ldots))$

(3) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall y \in \Sigma^n)(\forall \alpha, \beta \in \Gamma^*)(\forall d \in \Gamma)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists t \in \mathbb{N})$
$ES^t((11, ((\varepsilon, B, a^k), (\alpha, B, \varepsilon), (\beta, d, yB), (\varepsilon, B, \varepsilon), \ldots)))$
$= (10, ((\varepsilon, B, a^{k+n+1}), (\alpha, B, \varepsilon), (\beta dy, B, \varepsilon), (\varepsilon, B, \varepsilon), \ldots))$

(b) Beweisen Sie mit den Behauptungen aus (a), dass gilt:

$$\begin{array}{rcl} f_M : \ \Sigma^* \times \Sigma^* & \longrightarrow & \Sigma^* \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} b^{lg(x)-lg(y)} & , \text{ falls } lg(x) > lg(y) \\ a^{lg(y)-lg(x)} & , \text{ sonst.} \end{cases} \end{array}$$

Aufgabe II.2

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x, y) := x - y$ für alle $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}$ eine $(\nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$–berechenbare Funktion ist.

Aufgabe III.1

(a) Seien $f \in P^{(1)}$ und $g \in R^{(1)}$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in R^{(1)}$ gibt mit $\varphi_{r(n)}(x) = g(2) \cdot f(x)^2$ für alle $x, n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Funktion $r \in R^{(2)}$ gibt mit

$$\varphi_{r(i,j)}(x) = \begin{cases} 1 & , \ \varphi_i(x) \text{ und } \varphi_j(x) \text{ existieren und } \varphi_i(x) < \varphi_j(x) \\ 0 & , \ \varphi_i(x) \text{ und } \varphi_j(x) \text{ existieren und } \varphi_i(x) \geq \varphi_j(x) \\ \perp & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe III.2

Die Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$A := \{i \in \mathbb{N} \mid \{i\} \subseteq \mathrm{Def}(\varphi_i) \text{ und } \varphi_i(i) = 2\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge A rekursiv–aufzählbar ist.

(b) Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass die Menge A nicht rekursiv ist.

Aufgabe III.3

Welche der folgenden Mengen ist/sind rekursiv/rekursiv aufzählbar aber nicht rekursiv/nicht rekursiv-aufzählbar?

rekursiv	rek. aufzählbar aber nicht rek.	nicht rekursiv-aufzählbar	
[ ]	[ ]	[ ]	$\{p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{p \mid p \text{ ist keine Primzahl}\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{p \mid \varphi_p(p) \text{ ist Primzahl}\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{\langle p, k\rangle \mid \text{es gibt genau } k \text{ Primzahlen in } \mathrm{Bild}(\varphi_p)\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{\langle p, k\rangle \mid \text{es gibt genau } k \text{ Primzahlen} \leq p\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{p \mid \Phi_p(p) \text{ ist Primzahl}\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{p \mid \Phi_p(p) \text{ ist definiert und } \Phi_p(p) \leq p^p\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{p \mid \Phi_p(p) \text{ ist definiert und } \Phi_p(p) \geq p^p\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{p \mid \mathrm{Bild}(\varphi_p) \text{ enthält eine Primzahl}\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{p \mid \mathrm{Bild}(\varphi_p) \text{ enthält nur Primzahlen}\}$

Aufgabe IV.1

(a) Welche der folgenden Aussagen sind falsch und welche sind richtig? Geben sie eine kurze Begründung.

(0) $\forall k \in \mathbb{N}.\ kn^3 \in O(n^3)$

(1) $\forall k \in \mathbb{N}.\ 2^{kn} \in O(2^n)$

(2) $\log n! \in O(n \log n)$

(b) Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}.\ n^k \in o(n^{k+1})$.

(c) Zeigen Sie: Aus $f \in o(g)$ folgt $O(f) \subsetneq O(g)$. Sie können die Bemerkungen 7.4.2(3) und 7.4.2(4) verwenden.

(d) Zeigen Sie, dass für drei Funktionen $f, g, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt:
Wenn $f \in O(t)$ und $g \in O(t)$, dann ist $f + g \in O(t)$.

Aufgabe IV.2

(a) Seien $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass die durch

$$g(n) := an + b$$

definierte Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bandkonstruierbar ist.

Hinweis: Falls Sie zur Lösung eine Turingmaschine angeben: Eine textuelle Beschreibung der Arbeitsweise ist ausreichend.

(b) Zeigen Sie:

$$\mathrm{BAND}(\log n) \subsetneq \mathrm{BAND}(4n + 2).$$

(c) Zeigen Sie:

$$\forall k \in \mathbb{N}.\ \mathrm{BAND}((\log n)^k) \subsetneq \bigcup_{c>0} \mathrm{ZEIT}(2^{cn}).$$

Aufgabe V.1

(a) Beschreiben Sie (kurz), wie man die **NP**–Vollständigkeit einer Sprache zeigen kann.

(b) Zeigen Sie:

Wenn es eine **NP**–harte Sprache L gibt, die in **P** liegt, ist $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Aufgabe V.2

Unter einem einfachen Kreis der Länge n in einem Graphen (V, E) verstehen wir ein Tupel $(v_0, v_1, ..., v_n)$ mit

1. $v_0 = v_n$,
2. $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}.\ (v_i, v_{i+1}) \in E$,
3. $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}.\ v_i \notin \{v_0, v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_{n-1}\}$.

Zeigen Sie: Die Menge

$$\mathrm{SC} := \{x\#^k \mid x \in \{0,1\}^* \text{ und es gibt einen einfachen Kreis der Länge } k \text{ in } \nu_G(x)\}$$

ist **NP**–vollständig.

(Hinweis: Sie können verwenden, dass das Hamiltonkreisproblem, d.h. die Menge HC, ein **NP**–vollständiges Problem ist.)

Aufgabe VI.1

Sei $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält abba als Teilwort } \}$ und $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \in L \Rightarrow w \text{ endet mit einem } b\}$. Geben Sie

(a) einen endlichen Automaten A mit $L(A) = L$,

(b) einen determinierten endlichen Automaten A' mit $L(A') = L$,

(c) einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$,

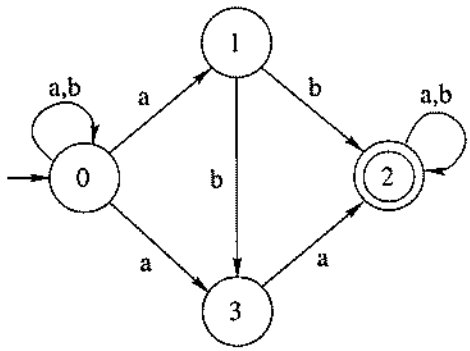
(d) eine rechtslineare Grammatik G mit $L(G) = L$ und

(e) einen determinierten endlichen Automaten A_1 mit $L(A_1) = L_1$ an.

Hinweis: Beweise brauchen nicht geführt werden!

Aufgabe VI.2

Ein endlicher Automat A sei durch folgenden Graphen gegeben:



(a) Konstruieren Sie unter Verwendung des im Kurs angegebenen Verfahrens den vereinfachten Potenzautomaten zu A. Geben Sie seinen Anfangszustand und seine Endzustandsmenge an.

(b) Stellen Sie den im ersten Teil konstruierten vereinfachten Potenzautomaten graphisch dar.

(c) Geben Sie einen vollständigen determinierten Automaten $\overline{A}$ an mit

$$L(\overline{A}) = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \setminus L(A).$$

Aufgabe VI.3

Sei $\Sigma := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und $L := \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^*.\ w = x\mathsf{b}^{\#_{\mathsf{a}}(x)}\}$. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe VII.1

Sei $\Sigma := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und

$$L := \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^*.\ w = x\mathsf{b}^{\#_{\mathsf{a}}(x)}\}.$$

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L = L(G)$ an, deren Nichtterminalalphabet nur ein Symbol enthält und deren Regelmenge nur drei Regeln enthält.

(b) Beweisen Sie $L(G) = L$ mit Hilfe geeigneter Induktionen.

Tipp: Beweisen Sie zum Nachweis von $L(G) \subseteq L$ die Induktionsbehauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}. \forall w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, S\}^* \setminus \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^*. \left(S \xrightarrow{n} w \Rightarrow \left(\exists x \in \Sigma^*.\ \ w = xS\mathsf{b}^{\#_{\mathsf{a}}(x)}\right)\right).$$

Aufgabe VII.2

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache

$$L := \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^m\mathsf{a}^n \mid n, m \in \mathbb{N};\ 2m < n\}$$

nicht kontextfrei ist.

Aufgabe Extra.1

(a) Welche der folgenden Aussagen über reguläre Mengen ist/sind korrekt? Dabei sind L und M reguläre Mengen.

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$L \cup M$ und $L \cap M$ sind reguläre Mengen.
[ ]	[ ]	L^* und $\Sigma^* \backslash L$ sind reguläre Mengen.
[ ]	[ ]	Für alle L ist entscheidbar, ob $\#L < \infty$ gilt.
[ ]	[ ]	$\{a^n bbc^m \mid m > n > 3\}$ ist eine reguläre Menge.
[ ]	[ ]	$\{a^n bbc^m \mid m > 7, n > 3\}$ ist eine reguläre Menge.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für alle Sprachen L und M korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Wenn $L \in$ NP und $L \leq_{pol} M$ gilt, so gilt auch $M \in$ NP.
[ ]	[ ]	Wenn $L \leq_{pol} M$ und $M \leq_{pol} L$ gilt, dann gilt auch $L = M$.
[ ]	[ ]	Wenn $L \in$ NP gilt, dann gilt auch $L \leq_{pol}$ 3SAT.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$(\log n)^2 + 3 \log n \in O(n \log n)$
[ ]	[ ]	$3n \log n$ ist zeit- und bandkonstruierbar.
[ ]	[ ]	Für alle $c > 0$ gilt $2^{cn} \in O(2^n)$.

(d) Welche der folgenden Sprachen ist/sind kontextfrei (kf.)?

kf.	nicht kf.	
[ ]	[ ]	$\{a^n wwb^n \mid n > 1,\ w \in \{aa, ab, bb\}\}$
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m c^k b^m a^n \mid m, n, k > 0\}$
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m a^n b^m \mid n, m > 0\}$

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Wenn 2D-Domino$\in$ P, dann gilt P$\neq$NP.
[ ]	[ ]	CLIQUE $\leq_{pol}$ 3SAT und 3SAT $\leq_{pol}$ CLIQUE.
[ ]	[ ]	Wenn P=NP, dann gilt 2D-Domino $\in$ P.