01658 — Grundlagen der Theoretischen Informatik B

Aufgaben zu den Studientagen
Sommersemester 2012

Kurseinheit 1 - 4: Komplexitätstheorie

Aufgabe I.1[1]

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und sei $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ definiert durch:

$$f(v) \;=\; 0^{|\#_0(v) - \#_1(v)|}$$

(Hierbei bezeichnet $\#_a(v)$ die Häufigkeit des Vorkommens von a in v.)

(a) Konstruieren Sie eine Turingmaschine M mit $f = f_M$.

(b) Geben Sie die Rechenzeit und den Bandbedarf von M an. Benutzen Sie dazu die O-Notation.

(*) Ist es möglich eine Turingmaschine M mit $f = f_M$, $\tilde{s}_M \in O(\log n)$ und $\tilde{t}_M \in O(n)$ anzugeben? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe I.2

(a) Zeigen Sie, dass für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt:

$$f \in O(g) \iff \big(\exists c_1.\ \exists c_2.\ \forall n \geq c_1.\ \ f(n) \leq c_2 \cdot g(n) + c_2\big).$$

t $\Rightarrow$ (b) Sei $(f \cdot g)(n) := f(n) \cdot g(n)$. Zeigen Sie, dass für drei Funktionen $f, g, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt: wenn $f \in O(t)$ und $g \in O(t)$, dann ist $f \cdot g \in O(t^2)$.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist falsch und welche ist richtig? Geben Sie eine kurze Begründung.

(1)	$\forall k \in \mathbb{N}.(\log n)^k \in o(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)$	(2)	$\forall k \in \mathbb{N}.2^{k+n} \in O(2^n)$
(3)	$2^{2n} \in O(2^n)$	(4)	$\forall k \in \mathbb{N}.k^n \in O(2^n)$
(5)	$2^n \in O(n^{\log n})$	(6)	$\lfloor\log_b n\rfloor \in o(\lfloor\log_{10} n\rfloor)$
(7)	$\forall k \in \mathbb{N}.n^k \in o(2^n)$	(8)	$\log\log n \in o(\lfloor\sqrt{\log n}\rfloor)$

(Hierbei ist $\log n$ wie im Kurs die Länge der Dualdarstellung der Zahl n.)

[1] * kennzeichnet optionale Aufgaben bzw. Aufgabenteile

Aufgabe I.3

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die durch $g_1(n) := n \cdot \log\log n$ definiert ist, zeitkonstruierbar ist.

(b) Sei $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_k(n) = n^k$ zeitkonstruierbar ist.

(c) Ist die Funktion $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_2(n) :=\lfloor \sqrt{\log n} \rfloor$ zeitkonstruierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Sei $k \geq 1$. Zeigen Sie

$$\mathrm{ZEIT}(n^k) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^{k+1}).$$

Aufgabe I.4

(a) Ist die Funktion g_1 aus Aufgabe I.3 auch bandkonstruierbar? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Geben Sie die Inklusionsrelationen zwischen den folgenden Komplexitätsklassen vollständig an. Begründen Sie Ihre Antwort.

- $\mathrm{BAND}(n^2 \cdot \log n)$,
- $\mathrm{BAND}(n)$,
- $\mathrm{BAND}(n \cdot \log\log n)$.

Aufgabe I.5

Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt und welche ist/sind falsch? Geben Sie eine kurze Begründung.

(a) Für eine 0-Band TM M gilt $\tilde{s}_M(n) = 0$ für alle $n \in Def(\tilde{s}_M)$.

(b) Sei $f(n) = n^2$ für alle geraden Zahlen und $f(n) = 42 * 10^{42}$ für alle ungeraden Zahlen. Es gilt $f \notin O(n^2)$.

(c) Jede konstruierbare Funktion ist total.

Aufgabe I.6

Es sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $TWP \subseteq \Sigma^*$ sei definiert durch

$$TWP \;:=\; \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*. v = v^R,\ 2 \cdot lg(v) \geq lg(w) \text{ und } v \text{ ist Teilwort von } w\}$$

Zeigen Sie: $TWP \in \text{NZEIT}(n)$. Erläutern Sie dazu die Arbeitsweise einer geeigneten nichtdeterminierten Turingmaschine bzw. Kontrollturingmaschine und machen Sie eine Zeitabschätzung.

(*) Aufgabe I.7

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ ein Alphabet und $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\forall w \in \Sigma^*.\ lg(f(w)) \geq lg(w)$, die in Polynomzeit berechenbar sei, d.h. $f \in \text{FZEIT}(n^k)$ für eine Zahl $k \geq 1$. Zeigen Sie:

$$Bild(f) \in \text{NZEIT}(n^k).$$

Erläutern Sie dazu die Arbeitsweise einer geeigneten Turingmaschine bzw. Kontrollturingmaschine und machen Sie eine Zeitabschätzung.

Aufgabe I.8

(a) Beschreiben Sie (kurz), wie man die **NP**–Vollständigkeit einer Sprache zeigen kann.

(b) Zeigen Sie: Wenn es eine **NP**–harte Sprache L gibt, die in **P** liegt, ist **P** = **NP**.

Aufgabe I.9

Unter einem einfachen Kreis der Länge l in einem gerichteten Graphen (V, E) verstehen wir ein Tupel $(v_0, v_1, ..., v_l)$ mit

1. $v_0 = v_l$,
2. $\forall i \in \{0, \ldots, l-1\}.\ (v_i, v_{i+1}) \in E$,
3. $\forall i \in \{0, \ldots, l-1\}.\ v_i \notin \{v_0, v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_{l-1}\}$.

Zeigen Sie:

$$A := \{x\#^k \mid \text{ es gibt einen einfachen Kreis der Länge } k \text{ in } \nu_G(x)\}$$

ist **NP**-vollständig.

(Hinweis: Verwenden Sie HC)

(*) Aufgabe I.10

Gegeben ist ein faltbarer Zollstock und eine Schachtel der Länge l. Der Zollstock soll so gefaltet werden, dass er in die Schachtel paßt. Unglücklicherweise sind die einzelnen Glieder des Zollstocks unterschiedlich lang. Die Frage ist nun: Kann man den Zollstock so falten, dass er in die Schachtel paßt?
Wir formulieren dieses Problem als die Sprache ZOLLSTOCK. Sie ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\text{ZOLLSTOCK}:=\{&d(a_1)\#\ldots\#d(a_n)\#d(l) \mid n, l \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \text{ und} \\ &\exists x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\} \text{ so dass } \max_{0\le k\le n} \textstyle\sum_{i=1}^{k} x_i a_i - \min_{0\le k\le n} \sum_{i=1}^{k} x_i a_i \le l\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ZOLLSTOCK **NP**-vollständig ist. Benutzen Sie dazu eine Reduktion von PARTITION auf ZOLLSTOCK.

Hinweis: Der Zollstock zu $d(a_1)\sharp\ldots\sharp d(a_n) \in$ PARTITION beginnt mit einem Stück der Länge $l := 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$ und einem Stück der Länge $\frac{1}{2}l$.

Aufgabe I.11

Geben Sie die bekannten Inklusionsrelationen zwischen der Komplexitätsklasse

$$\text{NBAND}(n \cdot \log\log n)$$

und den Komplexitätsklassen aus Aufgabe I.4 (b) an. Von welchen dieser Inklusionen ist bekannt, dass sie echt sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe I.12

Die Klasse **co–NP** sei definiert durch

$$\textbf{co–NP} \;:=\; \{\Sigma^* \setminus L \mid \Sigma \text{ endl. Alphabet und } L \in \textbf{NP}\}$$

Beweisen Sie:

(a) Wenn **NP** $\neq$ **co–NP**, dann ist **P** $\neq$ **NP**.

(b) Zeigen Sie: L **NP** –vollständig $\Leftrightarrow$ $\Sigma^* \setminus L$ **co-NP** vollständig.
(Sei A eine Klasse von Sprachen. Eine Sprache heißt genau dann A-vollständig wenn $L \in A$ und $L' \le_{pol} L$ für alle $L' \in A$.)

Aufgabe I.13

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	nicht korrekt	
[ ]	[ ]	$\log\ n^3 + (\log\ n)^2\ \in O(\log\ n)$
[ ]	[ ]	$\log\ n$ ist zeitkonstruierbar
[ ]	[ ]	$\log\ n$ ist bandkonstuierbar
[ ]	[ ]	$n^n \in O(2^n)$
[ ]	[ ]	$\mathrm{BAND}(\log\ n) \subsetneq \mathrm{BAND}((\log\ \log\ n) \cdot \log\ n)$
[ ]	[ ]	$\mathrm{ZEIT}(n\ \log\ n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^2)$

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für alle Sprachen L, M mit $\emptyset \subsetneq L \subsetneq \Sigma^*$ und $\emptyset \subsetneq M \subsetneq \Sigma^*$ korrekt?

korrekt	nicht korrekt	
[ ]	[ ]	Wenn $L \leq_{pol} \{0,1\}$ gilt, dann gilt $L \in \mathrm{P}$?
[ ]	[ ]	Wenn $\{0,1\} \leq_{pol} L$ gilt, dann gilt $L \in \mathrm{P}$?
[ ]	[ ]	Wenn $L \in \mathrm{NP}$ und $M \leq_{pol} L$ gilt, so gilt auch $M \in \mathrm{NP}$.
[ ]	[ ]	$L \cup M \in \mathrm{P} \Rightarrow L \in \mathrm{P}$ und $M \in \mathrm{P}$
[ ]	[ ]	$L \in \mathrm{P} \wedge M \in \mathrm{P} \Rightarrow\ L \cup M \in \mathrm{P}$

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für alle Sprachen L und M korrekt?

korrekt	nicht korrekt	
[ ]	[ ]	Wenn $L \in \mathrm{NP}$ und $L \leq_{pol} M$ gilt, so gilt auch $M \in \mathrm{NP}$.
[ ]	[ ]	Wenn $L \leq_{pol} M$ und $M \leq_{pol} L$ gilt, dann gilt auch $L = M$.
[ ]	[ ]	Wenn $L \in \mathrm{NP}$ gilt, dann gilt auch $L \leq_{pol}$ 3SAT.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	nicht korrekt	
[ ]	[ ]	$(\log n)^2 + 3\log n \in O(n \log n)$
[ ]	[ ]	$3n \log n$ ist zeit- und bandkonstruierbar.
[ ]	[ ]	Für alle $c > 0$ gilt $2^{cn} \in O(2^n)$.

Aufgabe II.1

(i) Geben Sie für die Sprache

$$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid \ w \text{ enthält abba als Teilwort}\}$$

a) einen endlichen Automaten A an mit $L(A) = L_1$,

b) eine rechtslineare Grammatik G an mit $L(G) = L_1$.

c) einen regulären Ausdruck α an mit $L(\alpha) = L_1$.

(ii) Geben Sie für die Sprache

$$L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid \ \text{der vorletzte Buchstabe in } w \text{ ist ein } b\}$$

einen <u>determinierten</u> endlichen Automaten A an mit $L(A) = L_2$.

Hinweis: Beweise, dass Ihr Automat/Ihre Grammatik/Ihr regulärer Ausdruck die jeweilige Sprache akzeptiert/erzeugt/erzeugt, brauchen nicht geführt werden!

Aufgabe II.2

Sei $\Sigma = \{a,b\}, \Pi = \{S,T,U\}$ und G die durch die folgende Regelmenge gegebene rechtslineare Grammatik:

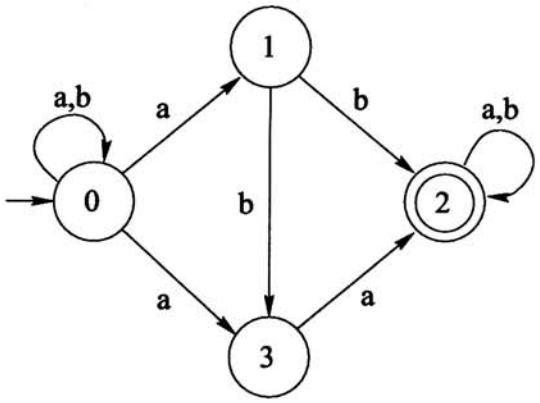
$$\begin{aligned} S &\rightarrow bbT \\ T &\rightarrow bT \mid aT \mid U \\ U &\rightarrow aa \end{aligned}$$

(a) Welche Sprache wird von G erzeugt? (Ohne Beweis!)

(b) Transformieren Sie G in eine rechtslineare Normalformgrammatik.

Aufgabe II.3

Ein endlicher Automat A sei durch folgenden Graphen gegeben:



(a) Konstruieren Sie den vereinfachten Potenzautomaten zu A. Geben Sie seinen Anfangszustand und seine Endzustandsmenge an und stellen Sie seine Übergangsrelation in Tabellenform dar.

(b) Stellen Sie den im ersten Teil konstruierten vereinfachten Potenzautomaten graphisch dar.

(c) Geben Sie einen vollständigen determinierten Automaten $\overline{A}$ an mit

$$L(\overline{A}) = \{a, b\}^* \setminus L(A).$$

Aufgabe II.4

Es sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) \text{ ist ungerade}\}$.

(a) Geben Sie einen determinierten endlichen Automaten A mit $L(A) = L$ an, der nur zwei Zustände enthält.

(b) Beweisen Sie $L = L(A)$ für den von Ihnen angegebenen Automaten. Charakterisieren Sie dazu zunächst für jeden Zustand q des Automaten die Menge der Worte w, die den Anfangszustand q_0 in den Zustand q überführen und beweisen Sie die resultierende Behauptung durch Induktion über die Wortlänge. Leiten Sie damit anschließend $L = L(A)$ her.

Aufgabe II.5

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^*.\ w = x1^{\#_0(x)}\}.$$

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe II.6

Wie in Aufgabe II.5 sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^*.\ w = x1^{\#_0(x)}\}.$$

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L = L(G)$ an, deren Nichtterminalalphabet nur das Symbol S enthält und deren Regelmenge nur drei Regeln enthält.

(b) Beweisen Sie $L(G) = L$ ausführlich mit Hilfe geeigneter Induktionen.

Tipp: Beweisen Sie zum Nachweis von $L(G) \subseteq L$ die Induktionsbehauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}. \forall w \in \{0, 1, S\}^* \setminus \{0, 1\}^*. \left(S \xrightarrow{n} w \Rightarrow \left(\exists x \in \Sigma^*.\ \ w = xS1^{\#_0(x)}\right)\right)$$

Aufgabe II.7

Sei $L := \{a^n b^m \mid n > m\}$.
Geben Sie einen determinierten Kellerautomaten A mit $L(A) = L$ an.

Aufgabe II.8

(a) Welche der folgenden Aussagen über kontextfreie Mengen L, M ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Für alle L und M gilt: $L \cup M$ und $L \cap M$ sind kontextfrei.
[ ]	[ ]	Für alle L ist das Wortproblem entscheidbar.
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m a b^{2m} a^{2n} \mid n, m \geq 0\}$ ist kontextfrei.
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m a^{2n} b^{2m} \mid n, m \geq 0\}$ ist kontextfrei.
[ ]	[ ]	L wird von einem Kellerautomaten mittels Endzustand erkannt.
[ ]	[ ]	Für alle L gilt: Es existiert eine eindeutige kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Alle regulären Mengen sind endlich.
[ ]	[ ]	Jede rechtslineare Grammatik ist eine eindeutige kontextfreie Grammatik.
[ ]	[ ]	Jede reguläre Menge ist eine eindeutige kontextfreie Sprache.
[ ]	[ ]	Jede Typ-1-Grammatik ist auch eine Typ-2-Grammatik.

(c) Welche der folgenden Aussagen über reguläre Mengen ist/sind korrekt? Dabei sind L und M reguläre Mengen.

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$L \cup M$ und $L \cap M$ sind reguläre Mengen.
[ ]	[ ]	L^* und $\Sigma^* \backslash L$ sind reguläre Mengen.
[ ]	[ ]	Für alle L ist entscheidbar, ob $\#L < \infty$ gilt.
[ ]	[ ]	$\{a^n bbc^m \mid m > n > 3\}$ ist eine reguläre Menge.
[ ]	[ ]	$\{a^n bbc^m \mid m > 7, n > 3\}$ ist eine reguläre Menge.

(d) Welche der folgenden Sprachen ist/sind kontextfrei (kf.)?

kf.	nicht kf.	
[ ]	[ ]	$\{a^n w w b^n \mid n > 1,\ w \in \{aa, ab, bb\}\}$
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m c^k b^m a^n \mid m, n, k > 0\}$
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m a^n b^m \mid n, m > 0\}$