

Prüfungsprotokoll 01681

Datum: April 2006  
Prüfer: Prof. Weihrauch  
Dauer : ca. 30 Min

### **Welche Probleme gibt es bei der Berechenbarkeit von reellen Zahlen im Vergleich zu den natürlichen Zahlen?**

Natürlichen Zahlen sind abzählbar unendlich. Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

### **Wie lösen wir dieses Problem?**

Wir verwenden Darstellungen, also surjektive Abbildungen von unendlichen Zeichenketten auf die reellen Zahlen. Die Verwendung von Notationen reicht nicht mehr aus.

### **Wie machen wir das?**

Die Turingmaschine reicht dafür nicht mehr aus, diese kann nur endliche Wortfolgen bearbeiten. Wir nutzen jetzt die sog. Typ-2-Maschinen. Diese sind Turingmaschinen, bei denen für den Ein- und Ausgaberaum getrennt festgelegt wird, ob  $\Sigma^*$  oder  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ . Ein- und Ausgaberaum können separat spezifiziert werden, z.B. kann die Eingabe eine unendliche Zeichenfolge sein, die Ausgabe nur eine endliche Zeichenfolge.

### **Wann ist eine Typ-2-Maschine definiert?**

Bei endlichem Ausgaberaum muss sie nach endlicher Zeit halten, bei unendlichem Ausgaberaum darf sie unendlich rechnen, aber sie muss auch unendlich viele Zeichen auf dem Ausgabeband ausgeben.

### **Welche Operationen sind auf dem Ausgabeband erlaubt? Warum?**

Ausgabe muss unveränderlich sein, sprich wir wollen die Ausgabe als physikalische Ausgabe sehen. Für temporäre Ausgaben haben wir schließlich die Arbeitsbänder. Ein einmal ausgegebenes Ergebnis kann somit nicht mehr verschlechtert werden. Daher sind nur die Operationen schreiben und gehe rechts auf Ausgabeband erlaubt.

### **Ist es gut die reellen Zahlen in der Dezimaldarstellung darzustellen?**

Dezimaldarstellung ist das Naheliegendste für den Menschen aber für das Rechnen nicht geeignet.

### **Warum ist die Dezimaldarstellung nicht geeignet?**

Z.B. bereitet die Multiplikation mit 3 Probleme.  $3 \cdot \frac{1}{3}$  kann als 0,9999... oder 1,0000.... dargestellt werden. Ist jedoch 0,333333... nicht periodisch, so kann das ausgegebene Ergebnis falsch sein, da die Maschine ja auch bei unendlicher Eingabe nach endlicher Zeit etwas auf das Ausgabeband schreiben muß und ggf. mit dem Falschen Zeichen (0 oder 1) anfängt.

### **Welche Darstellung eignet sich besser für das Rechnen mit reellen Zahlen?**

Die Cauchy Darstellung. Gilt  $\rho(q) = x$ , so ist  $q$  der  $[\text{ny}(Q)]^{\mathbb{N}}$  Name einer Folge von rationalen Zahlen  $p_i$ , deren Limes die Zahl  $x$  ist und deren Folgenglieder das Cauchy Kriterium erfüllen:  $|p_i - p_j| \leq 2^{-i}$  für alle  $j > i$ .

### **Wieso ist das Cauchy Kriterium so wichtig?**

Damit kann man bereits nach einer endlicher Anzahl gelesener Folgenglieder ausreichend Informationen zu der Zahl erhalten. Es handelt sich um eine schnell konvergierende Folge.

### **Welche Funktionen sind mit dieser Darstellung auf $\mathbb{R}$ bb?**

Add, Mult, Div, Sub, additive und multiplikative Inversion, Betrag, min, max, Projektion, Polynome mit bb Koeffizienten, Potenzreihen und damit auch sin, cos, exp und log.

### **Wann ist eine reelle Zahl bb?**

Wenn es ein Typ 2 Maschine ohne Eingabeband (nullstellig) gibt, die einen rho\_c Namen für diese Zahl ausgibt.

### **Sind denn alle reellen Zahlen bb?**

Nein, denn es gibt nur abzählbare viele Turingmaschinen aber überabzählbar viele reelle Zahlen.

### **Wie konstruiert man denn eine nicht bb-Zahl?**

Die Zahl  $2^{-A}$  ist genau dann bb, wenn die Menge A eine rekursive Menge ist. Wenn nun A nicht rekursiv ist, so ist  $2^{-A}$  nicht bb. Z.B.  $A = K_{\text{phi}}$ .

### **Wie stellen wir denn Mengen dar?**

Entweder als Auflistung der offenen **rationalen** Kugeln, die die Menge schneiden ( $\alpha_{<}$ ) oder als Liste der abgeschlossenen **rationalen** Kugeln, die die Menge nicht schneiden ( $\alpha_{>}$ ).

### **Warum Einschränkung auf abgeschlossene Mengen?**

Wenn wir alle Mengen aus  $\mathbb{R}^n$  zulassen, dann werden es zu viele und wir finden keine Darstellung mehr dafür. Daher Einschränkung auf mathematisch interessante Mengen, nämlich die abgeschlossenen.

### **Wann ist eine abgeschlossene Menge bb?**

$\alpha_{<}(p, q) = A$  genau dann, wenn  $\alpha_{<}(p) = \alpha_{>}(q) = A$

Die Menge kann also sowohl durch die offenen als auch durch die abgeschlossenen rationalen Kugeln dargestellt werden. A ist dann rekursiv.

Alternativ: Die Menge ist leer oder ihre Abstandsfunktion ist berechenbar.

### **Kann man denn dann auch die Vereinigung zweier Mengen berechnen?**

Ja man muß die Listen der Kugeln durchlaufen, die die Mengen beschreiben.

Übereinstimmungen ergeben eine neue Liste, die dann die Vereinigungsmenge beschreibt.

### **Wie haben wir die Funktionen dargestellt?**

Die  $\delta^A$  Darstellung. Das Urbild jeder offenen rationalen Kugel wird als Vereinigung von offenen rationalen Kugeln im Definitionsraum dargestellt. Der Funktionsname ist dann eine Liste von Kugeln, so dass eben zum Urbild jeder Kugel die zugehörigen, überdeckenden Kugeln aufgelistet werden.

### **Warum Einschränkung auf $C(A, \mathbb{R})$ ?**

Auch wieder die Mächtigkeit der Menge. Daher Einschränkung auf stetige Funktionen.

### **Sind stetige Funktionen immer berechenbar?**

Z.B. konstante Funktionen mit nicht bb Funktionswert sind zwar stetig, aber nicht berechenbar.

### **Was kann man mit $\delta^A$ tun?**

Man kann bei gegebenem Namen von Zahl und Funktionsnamen die Funktionswerte ausrechnen. Auch die Komposition sowie Zusammensetzung unter bestimmten Operationen wie z.B. Addition ( $f+g$ ) und Multiplikation sind bb.

### **Wie verhalten sich andere Darstellungen zu $\delta^A$ ?**

$\Delta^A$  ist maximal, so dass alle anderen Darstellungen sich auf  $\Delta^A$  reduzieren lassen.

**Kann man Nullstellen immer berechnen?**

Die Existenz von Nullstellen ist nicht entscheidbar. Die Nullstellen sind nicht immer berechenbar.

**Aber etwas kann man doch machen?**

Man kann Nullstellen berechnen, wenn eine Funktion im Intervall  $[0,1]$  genau eine Nullstelle hat.

**Ja, das ist aber noch nicht alles?**

Für Funktionen mit Definitionsbereich  $[0,1]$ , die kein „Nullstellenintervall“ haben kann aus dem Funktionsnamen eine Nullstelle berechnet werden. Bei verschiedenen Funktionsnamen der selben Funktion werden verschiedene Nullstellen berechnet.

Wie alle anderen kann auch ich Prof. Weihrauch nur als Prüfer empfehlen.

Viel Glück für eure Prüfung und danke an alle für eure Prüfungsprotokolle.

Prüfungsprotokoll Diplomprüfung Theoretische Informatik:

## **Kurs 1681 "Einführung in die berechenbare Analysis"**

Prüfer: Prof. Weihrauch

Datum: 21.02.2003

Dauer: ca. 30 min

Welche Probleme gibt es bei der Darstellungen reeller Zahlen?  
(Überabzählbarkeit der reellen Zahlen)

Wie löst man die Probleme?  
(...durch geeignete Darstellungen, Rechnen auf Zeichenketten)

Das Typ-2-Maschinenmodell ist zu erläutern?

Wieso muss die Ausgabe unveränderlich sein?

Welche Darstellungen reeller Zahlen gibt es?  
Es soll anhand eines Beispiel (Beweis mit  $3 \cdot \frac{1}{3}$  siehe Kurs) gezeigt werden, wieso es bei der Dezimaldarstellung Probleme mit dem im Kurs verwendeten Berechenbarkeitsmodell gibt.

Welche Funktionen bzw. Operationen sind mit der Cauchy-Darstellung berechenbar?

Wenn ich zwei berechenbare Funktionen habe, ist ihre Kombination auch berechenbar?

Wieso ist das Cauchy-Kriterium in der Cauchy-Darstellung wichtig?

Wie ist die relative Berechenbarkeit definiert?

Wann ist eine Menge rekursiv?

Wann ist eine Menge rekursiv-aufzählbar?

Was bedeutet, dass eine Menge semi-berechenbar von oben ist?

Wann ist eine Menge co-rekursiv-aufzählbar?

Wie sieht die Mengendarstellung aus?

Wann ist eine Funktion berechenbar?

Wie beweist man, dass eine Funktion die berechenbar ist, auch stetig sein muss?

Wie definiert man Stetigkeit?

Sind alle stetigen Funktionen berechenbar?

Welche nicht berechenbaren Funktionen gibt es?  
( $2^{\aleph}$  phi)

Wie zeigt man, dass Funktionen nicht berechenbar sind?

Wann ist eine Funktion ( $\rho$  C,  $\rho$  C)-berechenbar?

Wie sieht die Funktionsdarstellung aus?

Für welche Funktionen wird die Funktionsdarstellung  $\Delta^A$  angewandt?  
(stetige Funktionen mit festem Definitionsbereich)

Wieso wird die Funktionsdarstellung  $\Delta^A$  nur für stetige Funktionen definiert?  
(sonst zu viele, stetige Funktionen sind allgemein wichtig)

Was für eine besondere Eigenschaft hat die Funktionsdarstellung  $\Delta^A$ ?  
(Maximalitätseigenschaft)

Was kann man mit der Funktionsdarstellung anfangen?  
(Eval-Funktion)

Prof. Weihrauch habe ich als wohlwollenden Prüfer erlebt, der durch sein Auftreten für eine lockere und positive Prüfungsatmosphäre gesorgt hat. Seine Fragen waren zwar nicht in jedem Fall eindeutig (z.B. Was für eine besondere Eigenschaft hat die Funktionsdarstellung  $\Delta^A$ ?), aber wenn ich nicht sofort Antwort wusste, hat er versucht durch Präzisierungen Brücken zu bauen, ohne in sinnloses Beharren auf Fragen zu verfallen.

Als für mich nützlich fand ich es, die wichtigen Definitionen und Sätze (siehe hierzu auch die anderen Prüfungsprotokolle) auswendig zu wissen. Wobei Prof. Weihrauch manchmal die mündliche informelle Version und ein anderes Mal die präzise schriftliche Version haben wollte. Es ist außerdem sehr wichtig, die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Sätzen und Definitionen zu kennen, sowie es nützlich ist die Gründe und Auswirkungen der verschiedenen Sätze und Definitionen zu kennen. So ein Wissen kommt dem Prüfungsstil Prof. Weihrauch entgegen, der oft von wichtigen Tatsachen (Definitionen und Sätzen oder auch Problemstellungen) ausgehend, diese erstmal konkret und präzise wissen will, um dann darauf aufbauend weitergehende Fragen zu stellen.

Hilfreich fand ich für mich die Teilnahme an den Studientagen. Man sollte auch nicht davor zurück scheuen sich mit Fragen, die man allein nicht ausreichend klären kann, an das Lehrgebiet zu wenden. Dort hat meine Mails sehr entgegenkommend Herr Brattka beantwortet, der auch einer der Co-Autoren des Kurses ist. Bei den darzustellenden Beweisen wurden nur Beweisskizzen verlangt.

**Prüfungsprotokoll (gemeinsames Protokoll von 2 Prüfungen)**  
**Diplomprüfung Theoretische Informatik**  
**Kurs 1681 - Grundlagen der berechenbaren Analysis**

Prüfer: Prof. Weihrauch  
Datum: 19.12.2002  
Dauer: jeweils ca. 25 min

1. Welche Probleme tauchen beim Rechnen mit reellen Zahlen auf?  
Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R}$   
Anstatt einer Notation wird eine Darstellung (unendliche Zeichenreihen) benötigt.
2. Ist eine Darstellung ausreichend?  
Ja, da eine Darstellung eine surjektive Funktion ist.  
(Die Antwort war aber nicht ganz falsch, aber auch nicht ganz richtig.)
3. Die Dezimaldarstellung bietet sich als naheliegende Darstellung an. Ist sie sinnvoll?  
Nein. Am Beispiel  $3 \cdot \frac{1}{3}$  erläutert.
4. Welche Darstellung ist sinnvoll?  
Cauchy-Darstellung als schnell konvergierende Folge rationaler Zahlen. Genaue Definition 3.4.6 genannt.
5. Welche Darstellungen gibt es noch?  
Sign-Digit  
 $\hat{a}_>$  und  $\hat{a}_<$ , Def 4.6
6. Wie wird überhaupt auf Darstellungen gerechnet?  
Typ-2-Maschine mit ihren Besonderheiten gegenüber Turing-Maschine erklärt
7. Warum ist es wichtig, dass die Ausgabe unveränderlich ist?  
Damit man nach endlicher Zeit eine Näherung des Ergebnisses auf dem Ausgabeband lesen kann, die aber nicht mehr verschlechtert wird.
8. Wann ist eine Zeichenfolge berechenbar?  
Wenn es eine Typ-2-Maschine ohne Eingabeband gibt, die die Zeichenfolge auf ihrem Ausgabeband ausgibt. (Def 2.20)
9. Was bedeutet ( $\hat{\mathcal{Q}}$ -Berechenbarkeit?  
Def 3.5
10. Welche Funktionen sind berechenbar?  
Addition und ihre Inversion  
Multiplikation und ihre Inversion  
Polynom-Funktionen, soweit die Koeffizienten berechenbar sind.
11. Kennen Sie nicht berechenbare Funktionen?  
Die nicht stetigen Funktionen
12. Kennen Sie eine nicht  $\hat{a}$ -berechenbare Zahl?  
 $\{2^{-a} \mid a \in A\}$ , wenn  $A$  nicht rekursiv, aber rekursiv aufzählbar ist. Dann ist die Zahl linksberechenbar.

13. Welche Teilmengen von  $\mathbb{P}$  sind entscheidbar?  
 $\mathbb{P}$  und die leere Menge  
 Begründung: die charakteristische Funktion jeder echten Teilmenge von  $\mathbb{P}$  ist nicht stetig und damit nicht berechenbar.
14. Definition der rekursiven Teilmenge von  $\mathbb{P}$ .  
 Def. 6.3  
 Wichtig: die Beschränkung auf abgeschlossene Mengen
15. Definition der r. a. und co-r.a. Mengen von  $\mathbb{P}$   
 Def. 6.15
16. Definition für semiberechenbar von oben.  
 Def. 6.17
17. Beispiele für rekursive Mengen  
 Lemma 6.10  
 $\mathbb{P}$  und die leere Menge  
 Kugeln, soweit Mittelpunkt und Radius berechenbar.
18. Welche Funktionen kann man darstellen?  
 stetige Funktionen
19. Definition der Funktionsdarstellung  $\hat{Q}$   
 Def. 7.1  
 Maximalität dieser Darstellung:  
 Satz 7.11
20. Was kann man mit dieser Darstellung machen?  
 Auswertefunktion eval (Satz 7.5)  
 Addition, Multiplikation, Komposition (Satz 7.20 und Korollar 7.21)
21. Welche Definition der Stetigkeit wird zugrunde gelegt?  
 Topologie:  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}')$ -Stetigkeit nach Def. 5.47
22. Nullstellenberechnung  
 Es gibt keine Funktion, die berechnet, ob eine Funktion überhaupt eine Nullstelle hat.  
 (Satz 7.24)  
 Für Funktionen, für die der Zwischenwertsatz gilt, ist die Nullstelle nicht berechenbar.  
 (Satz 7.25)  
 Für Funktionen mit mehreren Nullstellen, die aber keinen konstanten Intervall haben,  
 kann eine Nullstelle berechnet werden. Aber: Abhängig vom Namen der Funktion kann  
 jeweils eine andere Nullstelle berechnet werden. (Satz 7.30)  
 Für Funktionen, die genau eine Nullstelle haben, gibt es eine Funktion, die diese  
 berechnet. (Satz 7.37)

Prüfungsprotokoll der Diplomprüfung "Einführung in die berechenbare Analysis" am  
23.8.2001

Prüfer: Prof. Weihrauch

Beisitzer: Herr Schröder

Prüfungsdauer: ca. 20 min

Prüfungsfragen:

- ⚡ Warum ist die Dezimaldarstellung für das Rechnen mit reellen Zahlen ungeeignet?  
Am Beispiel der Multiplikation  $1/3 * 3$  erläutert
- ⚡ Wie rechne ich überhaupt auf unendlichen Zeichenfolgen - Typ-2-Turingmaschine erklärt
- ⚡ Warum ist es wichtig, daß die Ausgabe unveränderlich ist - damit nach einer endlichen Zeit ein Anfangsstück der Berechnung feststeht
- ⚡ Wann nenne ich eine Funktion ( $\gamma_1, \gamma_2$ )-berechenbar? - als Formel aufgeschrieben
- ⚡ Nennen sie einige berechenbaren Funktionen! - Addition, Multiplikation, Polynomfunktion mit berechenbaren (!) (dieses Detail hatte ich mal wieder vergessen, kam von ihm) Koeffizienten, Exponentialfunktion, Sinus, Cosinus
- ⚡ Wie stelle ich reelle Zahlen dar? - Cauchy-Darstellung erläutert
- ⚡ Kann ich auch Folgen reeller Zahlen darstellen? - Ja, kurz verbal die Kodierung einer unendlichen Folge von Zeichenketten in einer Zeichenkette erläutert
- ⚡ Wann heißt eine Folge reeller Zahlen berechenbar? - Wenn es eine Typ-2-Turingmaschine gibt, die die Folge hinschreibt
- ⚡ Wenn die Folge berechenbar ist, ist dann auch jedes einzelne Folgenglied berechenbar? - Ja, wg. der berechenbaren Projektion der Darstellung auf ein Folgenglied
- ⚡ Wenn die Folge berechenbar ist, ist dann auch ihr Grenzwert berechenbar? Nein, nur wenn die Folge konvergiert und die Konvergenzgeschwindigkeit bekannt ist
- ⚡ Gibt es Zahlen, die nur linksberechenbar, aber nicht berechenbar sind? Ja, z. B.  $2^{(-K)}$
- ⚡ Wann heißt eine Teilmenge der reellen Zahlen rekursiv-aufzählbar? - Hier kam ich zum ziemlich ins Schwimmen, wichtig ist, daß die Maschine hält und daß die Menge aus  $\Sigma^N$  mit dem Definitionsbereich der Cauchy-Darstellung geschnitten wird
- ⚡ Ein bißchen Topologie: Was ist ein metrischer Raum, was ist ein topologischer Raum, wann heißt eine Funktion zwischen zwei topologischen Räumen stetig?
- ⚡ Eine Teilmenge der natürlichen Zahlen heißt rekursiv, wenn ihre charakteristische Funktion berechenbar ist. Kann ich die rekursiven Teilmengen reeller Zahlen genauso definieren? - Ja, das Ergebnis ist aber langweilig, nur  $\mathbb{R}$  und  $\{\}$  wären rekursiv. Statt dessen heißen Mengen rekursiv, wenn die Abstandsfunktion berechenbar ist.
- ⚡ Nennen sie ein paar Beispiele für rekursive Mengen!
- ⚡ Dann habe ich noch die Definitionen für rekursiv-aufzählbar abgeschlossene Mengen und co-rekursiv-aufzählbare abgeschlossene Mengen genannt, mir fällt nicht mehr ein, wie er die Frage dazu gestellt hatte
- ⚡ Wie sind die Abschlußeigenschaften der rekursiv-aufzählbar abgeschlossenen



Mengen? Nur die Vereinigung ist wieder r. a., da ihre Abstandsfunktion das Minimum der beiden anderen ist, der Durchschnitt nicht

- ⚡ Welche Funktionen kann ich darstellen? Nur die stetigen, der Definitionsbereich muß für eine Darstellung festgelegt sein
- ⚡ Wie stelle ich die Funktionen dar? - Nur inhaltlich erläutert, analog zu der Definition der stetigen Funktionen gebe ich für eine Basis des Bildraumes die jeweiligen Urbilder als Vereinigung offener Mengen an
- ⚡ Welche Operationen sind auf der Funktionsdarstellung berechenbar? - Auswertung, Komposition, Addition, Multiplikation etc.

Gesamteindruck:

Absolut positiv. Ich war eine halbe Stunde vor dem vereinbarten Termin da. Frau Lenski war gerade nicht am Platz, als Prof. Weihrauch herauskam, mich sah und fragte, ob ich dann schon gleich anfangen möchte, er müsse dann nur noch einen Beisitzer finden. Zwei kurze, freundliche Sätze Smalltalk von ihm, dann ging's los. Er bestätigt zwischendurch, wenn etwas richtig war, sagt bei der Frage, ob er die Antwort formal sauber oder nur kurz inhaltlich erläutert haben möchte.

Anschließend eine nur kurze Wartezeit auf das Beratungsergebnis und eine sehr wohlwollende Benotung.

Der Kurs ist sicherlich nicht leicht, schließlich ist es ein Theo-Kurs, aber auch nicht übermäßig schwer, und als Prüfer kann ich Prof. Weihrauch nur uneingeschränkt weiter empfehlen.

# Prüfungsprotokoll Diplomprüfung Berechenbare Analysis

**Prüfer:** Prof.Dr. Weihrauch

**Beisitzer:** Dr. Hertling

**Datum:** 09.08.2001

**Dauer:** 40 min (vierzig in Buchstabennotation)

**Note:** 1.3

**Ausdehnung des Berechenbarkeitsbegriffs auf reelle Zahlen. Welche Probleme tauchen auf?**

abzählbare Mengen ( $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ ) und überabzählbare Mengen ( $\mathbb{R}$ )

**Mit endlichen Zeichenreihen kommt man nicht weit. Deshalb unendliche Zeichenketten, Erweiterung der Turing Maschine zur Typ 2 Maschine Darstellungen? Was sind sie?**

Surjektive Funktionen unendlicher Zeichenketten auf  $\mathbb{R}$

**Welche Berechenbarkeit ist möglich? Addition und Multiplikation mit der Dezimaldarstellung möglich?**

Nein, mit Begründung. Das Präfix des Ergebnis ist durch weit rechts liegende Dezimalstellen nicht bestimmt. Deshalb andere Darstellungen (Naive Cauchy,  $\text{Rho } <$ ,  $\text{Rho } >$ ,  $\text{Rho Cauchy}$ ) Die naive Cauchy ist unbrauchbar, weil keine Konvergenzgeschwindigkeit existiert.

Cauchydarstellung deshalb weil das Cauchykonvergenzkriterium benutzt wird. Näherung durch Approximation durch rationale Zahlen

**Potenzreihen? Wann sind sie berechenbar?**

Nicht jede ist bb.

Definition einer Potenzreihe

Voraussetzung für Berechenbarkeit: Konvergenzradius  $\limsup$

$(\sqrt[n]{|a_n|})$ , bb. Koeffizienten, Konstante  $M$

**Funktionendarstellung**

Voraussetzung für die Funktionendarstellung ist, die abzählbare dichte Basis von  $\mathbb{R}$  aus rationalen Kugeln Paare offener Kugeln.  $f^{-1}(I(w)) = \text{Def}(f)$  geschnitten mit der Vereinigung von  $f(v_i)$  wenn  $w_i = v_i$  und die Kugelpaare sind. (Definition auf der 1. Seite von KE 6)

**Was kann man denn machen mit der Funktionendarstellung Delta?**

Auswerten der Funktion mit einem  $x$  aus dem Definitionsbereich.  
Die Verknüpfung von 2 Funktionen ist (Delta, Delta, Delta) bb.

### **Mengen in $\mathbb{R}^n$ ? Welche Mengen sind entscheidbar in $\mathbb{R}^n$ ?**

nur 2

### **Warum nur 2?**

Rekursiv aufzählbare Mengen sind offen. Damit eine Menge entscheidbar ist, muß auch ihr Komplement offen sein, die Menge selbst also offen und abgeschlossen, entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\{\}$ .

### **Was kann man tun dagegen?**

Definition der rekursiven Menge für eine abgeschlossenen Menge, die entweder leer ist, oder über die Abstandsfunktion  $d_A(x) = \inf d(a,x)$  für alle  $x$  aus  $A$

### **Rekursiv aufzählbare, Co-rekursiv aufzählbare Mengen?**

Definition für abgeschlossene Mengen Rechts und Linksberechenbarkeit der Abstandsfunktion. ( $\rho <$ ,  $\rho >$ )

### **Ist die $x$ -Achse in $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ rekursiv?**

Ja (Abstandsfunktion ist der Betrag von  $y$ )

### **Wie werden Mengen reeller Zahlen dargestellt?**

Wieder über eine abzählbare Basis. Zeichnung von rekursiven aufzählbaren Mengen und co-r.a. Mengen geschlossene Kugeln überdecken das Komplement der co-r.a. Menge ( $\alpha >$ ) offene Kugeln schneiden die r.a. Menge ( $\alpha <$ ) Rekursive Menge über  $\langle p, q \rangle$  wobei  $p$  ein  $\alpha <$  und  $q$  ein  $\alpha >$  Name ist.

### **Nullstellen. Sind die berechenbar aus der Funktionsdarstellung?**

Nicht isolierte Nullstellen sind nicht bb. Beinahe Nullstellen können, falls sie existieren, beliebig angenähert werden. Trisektionsverfahren. Funktioniert über Dreiteilung eines geschlossenen Intervalls mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Voraussetzung: Streng monoton, stetig auf dem gesamten Funktionsbereich und nur eine Nullstelle

---

### **Anmerkung**

Nach nur vierzig Minuten war die Prüfung schon wieder vorbei. Das Skript von Dr. Hertling (Studententage 1681 21./22. Juli 2001) ist hilfreich zur Veranschaulichung. Der wichtigste Satz steht auf der ersten Seite, nämlich daß es sich um einen informellen Überblick

handelt. Aber die Mathematik ist auch an formale Definitionen und Sätze gebunden. Darauf legt Prof. Weihrauch auch Wert. Er legt sich aber nicht zu sehr auf die formalen Dinge fest. Die Berechenbare Analysis wurde in 2 Kurse gespalten (1681 und 1838). Prof. Weihrauch hat während der Prüfung in den Kurseinheiten geblättert und Fragen aus dem Skript gestellt. Zusatzinfos aus anderen Kursen oder Büchern wurden nicht geprüft. Prüfungsatmosphäre relativ entspannt. Benotung sehr fair.

Stefan

Prüfung: Hauptdiplom Berechenbare Analysis 1681  
Prüfer: Prof. Dr. Weihrauch  
Termin: 23.08.2001  
Note: 1.7

Die Prüfung dauerte ca. eine halbe Stunde. Trotz einiger Lücken meinerseits war die Note zufriedenstellend. Da das Fach noch nicht lange so gelehrt wird, war es schwer, zu entscheiden, was wichtig ist und was nicht. Leider habe ich bei der Auswahl dann ein paar Mal daneben gegriffen. Prof. Weihrauch legt bei Definitionen etc. auch Wert auf Details (wann genau gilt das? Oder : wo genau verlangen wir das?). Die Fragen erfolgen ziemlich genau in der Reihenfolge der Kurseinheiten.

Was braucht man für ein neues Konzept, und warum?  
-  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar, daher unendliche Zeichenreihen  
Genügen die dann?  
- Ja, wie die Darstellungen  $\tilde{\pi}(B, 10)$  oder  $\tilde{\pi}(C)$  zeigen

Typ-2-Maschine (Syntax und Semantik), Zusammenhang mit Berechenbarkeit von Funktionen  
Relative Berechenbarkeit  
Reduzierbarkeit und Äquivalenz  
Bezeichnungssysteme für kartesische Produkte (Kreuzprodukt)

Nachteile der  $\tilde{\pi}(B, 10)$ -Darstellung  
Definition Cauchydarstellung  
Welche Funktionen sind  $\tilde{\pi}(C)$ -berechenbar?  
Wann genau heißt eine Folge berechenbar?  
Welche Zahl ist linksberechenbar, aber nicht berechenbar? Warum?  
Berechenbarkeit des Grenzwertes

Definition metrischer Raum und topologischer Raum  
Metrik des Cantor-Raumes  
Definition Kugel  
Kugeln im Cantor-Raum

Definition rekursive Menge  
Wie ist die Abstandsfunktion definiert?  
Definition rekursiv-aufzählbar, co-rekursiv-aufzählbar  
Was heißt semi-berechenbar?  
Abschlusseigenschaften dieser Mengen  
Rekursive Mengen im  $\mathbb{R}^2$   
Ist jede Kreisscheibe rekursiv? (nein: nur, wenn Mittelpunkt und Radius berechenbar sind)

Darstellung von Funktionen  
Warum nur für stetige Funktionen? (weil es sonst zu viele wären)  
Definition  $\tilde{A}$ -Darstellung plus Erläuterung  
Wofür kann man das anwenden? (Komposition von Funktionen, Operationen siehe Korollar 7.21)

## Prüfungsprotokoll

### Kurs 1681 Berechenbare Analysis

25.4. und 28.4.2000

Prof. Weihrauch

Beisitzer Herr Schröder

Dieser Kurs wurde im letzten Semester zum 1. Mal angeboten, deshalb gab es bisher keine Prüfungsprotokolle. Wir haben uns deshalb hauptsächlich anhand der Vortragsfolien des Studientages (die von den Kursautoren persönlich erstellt wurden - und die müssen ja wissen, was wichtig ist) vorbereitet. Das hat auch gereicht: zweimal 1.0

Fragen umfassen beide Prüfungen, das meiste überlappte aber:

Typ-2-Maschine def. + Erläuterung

wann ist eine Funktion berechenbar?

Komposition berechenbarer Funktionen

def. Bezeichnungssysteme

Def. Cauchy-Darstellung der reellen Zahlen

Vergleich Cauchy- und Dezimaldarstellung :welche Funktionen sind nicht  $(\rho, b, 10)$ -berechenbar

def.  $\rho <$ ,  $\rho >$

Ich habe dann noch die signed - digit Darstellung erwähnt, darauf wollte Prof. Weihrauch wissen, wie die sich zur Cauchy-Darstellung verhält (äquivalent) und wie "äquivalent" definiert ist.

Rel. Berechenbarkeit

Reduzierbarkeit

Beispiel einer Zahl, die  $\rho <$ , aber nicht  $\rho \in \mathbb{C}$  berechenbar ist.  $2^{(-K)}$

Welche Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  sind entscheidbar?

Wie kann man trotzdem 'entscheiden' ob ein Punkt in einer Menge liegt?

Abstandsfunktion

def. Rekursive Menge

Beispiele rekursiver, abgeschlossener Mengen

Ist eine abgeschlossene Kreisscheibe rekursiv? Ja

Ist eine Kreislinie rekursiv? Ja

def. r.a. abgeschl. Menge, def co-r.a. abgeschl. Menge

Eigenschaften, Charakterisierung

Def. delta a-Darstellung und Erklärung, warum damit stetige Funktionen dargestellt werden.

Nullstellen: wann ist eine Nullstelle berechenbar?

Die Prüfung war sehr sehr angenehm - Prof. Weihrauch geht von vorne nach hinten durch den Kurs. Er gibt die Chance, in einer Antwort zusätzliche Fakten anzubringen und lässt einen ausreden. Er möchte wissen, was der Prüfling kann und nicht, was er nicht kann.