Aufgabe 1: Boolesche Algebra

1.

$$A \ominus (B \ominus C) = 1 \;\Leftrightarrow\; A = 1 \wedge B = C \vee A = 0 \wedge B \neq C$$
$$A = 1 \Leftrightarrow A = 1$$
$$\Rightarrow\; A \ominus (B \ominus C) \neq A$$

2.

$$\begin{aligned} A \wedge (B \ominus C) = 1 &\;\Leftrightarrow\; A = 1 \wedge B = C \\ (A \wedge B) \ominus (A \wedge C) = 1 &\;\Leftrightarrow\; AB = AC \\ &\;\Leftrightarrow\; A = 0 \vee A = 1 \wedge B = C \\ &\;\Rightarrow\; A \wedge (B \ominus C) \neq (A \wedge B) \ominus (A \wedge C) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A \ominus (B \wedge C) = 1 &\;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A = B\ C} \\ (A \ominus B) \wedge (A \ominus C) = 1 &\;\Leftrightarrow\; A = B \wedge A = C \\ &\;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A = B = C} \\ &\;\Rightarrow\; A \ominus (B \wedge C) \neq (A \ominus B) \wedge (A \ominus C) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (A \ominus B) \ominus AB &= (AB \vee \overline{A}\,\overline{B}) \ominus AB \\ &= (AB \vee \overline{A}\,\overline{B})AB \vee \overline{(AB \vee \overline{A}\,\overline{B})}\,\overline{AB} \\ &= AB \vee (\overline{AB} \wedge \overline{\overline{A}\,\overline{B}})(\overline{A} \vee \overline{B}) \\ &= AB \vee (\overline{A} \vee \overline{B})(A \vee B) \\ &= AB \vee \overline{A}B \vee A\overline{B} \\ &= A(\overline{B} \vee B) \vee \overline{A}B \\ &= A \vee \overline{A}B \\ &= A \vee B \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Normalformen

1.

$$\overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0 \vee x_2x_1\overline{x_0} \vee x_2x_1x_0$$

2.

$$(\overline{x_2} \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \overline{x_1} \vee x_0)(x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_0})(x_2 \vee x_1 \vee x_0)$$

3.

$$\begin{aligned}
(x_0x_1 \ominus x_0x_2) \ominus x_1x_2 &= x_0\,[(1x_1 \ominus 1x_2) \ominus x_1x_2] \vee \overline{x_0}\,[(0x_1 \ominus 0x_2) \ominus x_1x_2] \\
&= x_0\,[(x_1 \ominus x_2) \ominus x_1x_2] \vee \overline{x_0}x_1x_2 \\
&= x_0\,[x_1((1 \ominus x_2) \ominus 1x_2) \vee \overline{x_1}((0 \ominus x_2) \ominus 0x_2)] \vee \overline{x_0}x_1x_2 \\
&= x_0\,[x_1 1 \vee \overline{x_1}x_2] \vee \overline{x_0}x_1x_2 \\
&= x_0x_1 \vee x_0\overline{x_1}x_2 \vee \overline{x_0}x_1x_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Optimierung

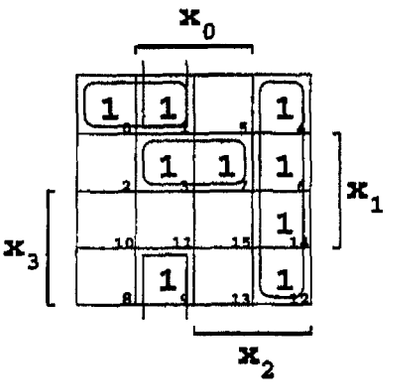
1. Die Funktion f besitzt die folgenden Primterme:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,x_1 \\
P_2 &= \overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0} \\
P_3 &= \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,x_0 \\
P_4 &= \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,x_0 \\
P_5 &= \overline{x_3}\,x_1\,x_0 \\
P_6 &= \overline{x_3}\,x_2\,x_1 \\
P_7 &= x_2\,\overline{x_0}
\end{aligned}$$

2. Die Bestimmung der Primimplikanten erfolgt Mit Hilfe folgender **Tabelle:**

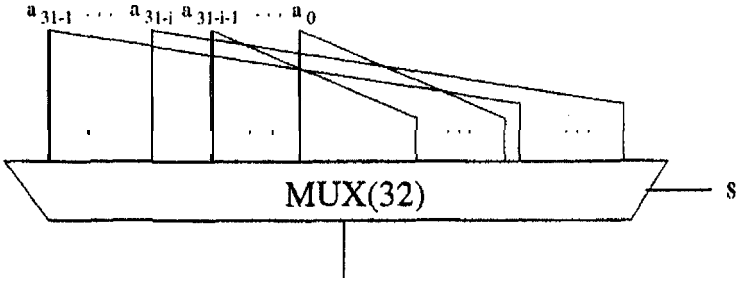
	$\bar{x}_3\,\bar{x}_2\,\bar{x}_1$	$\bar{x}_3\,\bar{x}_1\,\bar{x}_0$	$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,x_0$	$\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,x_0$	$\overline{x_3}\,x_1\,x_0$	$\overline{x_3}\,x_2\,x_1$	$x_2\,\overline{x_0}$
$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	X	×					
$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,x_0$	x		X	X			
$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,x_1\,x_0$			X		X		
$\overline{x_3}\,x_2\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$		X					X
$\overline{x_3}\,x_2\,x_1\,\overline{x_0}$						×	×
$\overline{x_3}\,x_2\,x_1\,x_0$					X	X	
$x_3\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,x_0$				×			
x_3 22 $\overline{x_1}\,\overline{x_0}$							X
$x_3\,x_2\,x_1\,\overline{x_0}$							×
				√			√

3. Eine kürzeste DNF ist dem folgendem Karnaugh-Diagramm zu entnehmen:

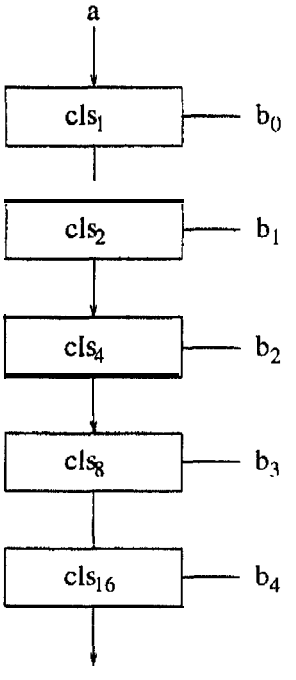


Aufgabe 4: Schaltkreise

1. Der Schaltplan des zyklischen Linksshifters um i Stellen ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



2. Der Schaltplan des Barrel-Shifters ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



Aufgabe 5: Schaltwerke

1. Der Beweis ergibt sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(s) + \langle u \rangle &= \sum_{i=0}^{n-1} s_i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} s_i \cdot 2^i + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \cdot 2^i && \text{da } u_0 = 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} \cdot 2 + s_i) \cdot 2^i && \text{da nach Vereinbarung } u_n = 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \langle u_{i+1}, s_i \rangle \cdot 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + y_i) \cdot 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot 2^i \\
&= \langle x \rangle + (y\}
\end{aligned}
$$

   Der Ausgang u_n ist immer 0, da $u_n = 1 \Leftrightarrow x_{n-1} = y_{n-1} = 1$ und damit (x) + $\langle y \rangle \geq 2^n$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

2. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über t: Der Fall $t = 0$ ist trivial, im allgemeinen Fall folgt (X(t)) + (Y(t)) = $\langle X(t - 1)) + \langle Y(t - 1))$ aus dem Aufhau des von-Neumann Addierers und Teil 1. Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich die Behauptung.

3. Sei $X(t) = (x_{n-1}^t, \ldots, x_0^t)$. Zu zeigen ist $x_i^t = 0 \quad \forall\, 0 \leq i < t$. Dann gilt spätestens mit $t = n$ X(C) = $(0, \ldots, 0)$.

   Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion Uber t. Der Fall $t = 0$ ist trivial, für $t = 1$ ergibt sich die Behauptung aus dem Aufbau des $(n,2,2)$-Addierers.

   Im allgemeinen Fall gilt nach Definition des Halbaddierers HA_i $x_{i+1}^t = x_i^{t-1} \wedge y_i^{t-1}$. Da $x_i^{t-1} = 0 \quad \forall\, 0 \leq i < t - 1$ nach Induktionsvoraussetzung gilt, folgt:

$$x_i^t = 0 \qquad \forall 1 \leq i < t$$

   Mit $x_0^t = 0$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 6: Zustandsautomaten

1. Die Wertetabelle für die Steuersignale der FlipFlops sieht wie folgt aus:

z	$z_2z_1z_0$	x	z'	$z'_2z'_1$	z'_0	y	j_2	k_2	j_1	k_1	j_0	k_0
0	000	0	1	001	1	0	d	0	d	1	d
0	000	1	1	001	0	0	d	0	d	1	d
1	001	0	5	101	1	1	d	0	d	d	0
1	001	1	2	010	0	0	d	1	d	d	1
2	010	0	5	101	1	1	d	d	1	1	d
2	010	1	3	011	1	0	d	d	0	1	d
3	011	0	5	101	1	1	d	d	1	d	0
3	011	1	3	011	1	0	d	d	0	d	0
4	100	0	2	010	0	d	1	1	d	0	d
4	100	1	5	101	1	d	0	0	d	1	d
5	101	0	4	100	0	d	0	0	d	d	1
5	101	1	0	000	1	d	1	0	d	d	1
6	110	0	d	ddd	d	d	d	d	d	d	d
6	110	1	d	ddd	d	d	d	d	d	d	d
7	111	0	d	ddd	d	d	d	d	d	d	d
7	111	1	d	ddd	d	d	d	d	d	d	d

2. Ausgehend von obiger Tabelle erhält man die kürzesten DNFs der einzelnen Steuersignale wie folgt:

$$
\begin{aligned}
y &= \overline{z_2}\,\overline{x} \vee z_2 x \vee z_1 \\
j_2 &= z_1\,\overline{x} \vee z_0\,\overline{x} \\
k_2 &= \overline{z_0}\,\overline{x} \vee z_0\,x \\
j_1 &= z_2\,\overline{z_0}\,\overline{x} \vee \overline{z_2}\,z_0\,x \\
k_1 &= \overline{x} \\
j_0 &= \overline{z_2} \vee x \\
k_0 &= \overline{z_1}\,x \vee z_2
\end{aligned}
$$