Rekursiv // Rekursiv-Aufzählbar

Eine Menge M heißt rekursiv (entscheidbar) genau dann, wenn es eine total berechenbare Funktion gibt für die eine Umkehrfunktion f^-1 existiert, die für {ε} die Menge der x zurück gibt für die f(x) = ε gilt.
Eine Menge M heißt rekursiv-aufzählbar (berechenbar, beweisbar) genau dann, wenn es eine partielle Funktion g gibt mit Def(g)=M.
Rekursive Mengen sind immer auch rekursiv-aufzählbar.

Satz über die strukturelle Induktion formulieren und erläutern? (1.4.4)

Es sei RS=(U,R) eine Relationalstruktur einer Signatur v. Es sei außerdem V Teilmenge des Erzeugnisses der Relationalstruktur RS [Erz (RS)]in RS abgeschlossen ist. Dann gilt V=Erz(RS)
Um also V=Erz(RS) zu beweisen, reicht es für alle i aus I zu zeigen: Falls $u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}$ aus V und $(u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}, u)$ aus Ri, dann gilt u aus V.
Im Falle v(i) = 0 muss dann lediglich (u aus Ri ⇒ u aus V) also Ri Teilmenge V gezeigt werden. Im Spezialfall der vollständigen Induktion sind zwei Fälle zu betrachten, da I zwei Elemente enthält:
Der Fall i=a mit v(a) = 0 [Induktionsverankerung n=0] und der Fall i=b mit v(b) = 1 [Induktionsschluss von n nach n+1]
Beweist man einen Satz der Form: Für alle u aus dem Erzeugnis von RS gilt Q(u) [Wobei V:={u aus Erz(RS)| Q(u)} gilt] durch strukturelle Induktion, so spricht man von „struktureller Induktion über u“.

Was ist eine Relationalstruktur?

Eine Relationalstruktur (RS) einer Signatur v ist ein Paar (U,R), wobei U eine nicht leere Menge (Trägermenge der Relationalstruktur) ist und R eine Abbildung, so dass $R_i := R(i)\ U^{(v(i)+1)}$ für alle i aus I.

Was ist eine Signatur?

Eine Signatur v ist eine Abbildung von einer Indexmenge I in die Menge der natürlichen Zahlen IN.

Was ist eine Ableitung in einer Relationalstruktur?

Für ein u aus der Trägermenge U. Ist eine Ableitung von u in die Relationalstruktur RS eine Folge (u0,u1,…,un) von Elementen aus U mit un=u, so dass für jedes l aus {0,1,2,..,n} gilt: Es gibt einen Index i aus der Indexmenge der Signatur der Relationalstruktur und Zahlen k1,k2,…,$k_{v(i)}$, so dass $(u_{k1}, u_{k2}, \ldots, u_{kv(i)}, u_l)$ aus R_i sind.

Wie ist das Erzeugnis der Relationalstruktur Erz(RS) definiert?

Erz (RS) := { u aus U | es gibt eine Ableitung von u in RS}

Was heißt abgeschlossen in einer Relationalstruktur RS?

Eine Teilmenge V der Trägermenge U heißt abgeschlossen in der Relationalstruktur RS, genau dann, wenn für alle i aus I und alle $u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}$, u aus U gilt:
$(\{u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}\})$ Teilmenge von V und $\{u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}, u)$ aus Ri ⇒ u liegt in V.
D.h. eine Teilmenge V von U ist also abgeschlossen, genau dann, wenn das anwenden von Regeln nicht aus V herausführt. Das Erzeugnis der Relationalstruktur ist die kleinste in der Relationalstruktur abgeschlossene Teilmenge der Trägermenge U. Und Erz(RS) ist Teilmenge von V für jede in RS abgeschlossene Teilmenge V von U.

Wie lautet das Alphabet der Aussagenlogik?

Σ := { A, 0, (,) , ⊤, ⊥, →,¬, ▲,▼}

Was benötigt man weiter zur Syntaxdefinition der Aussagenlogik?

Menge der Aussagensymbole

AS := {$A0^iA$ | i aus IN}

Menge der aussagenlogischen Formeln

AF Teilmenge aus der Menge der Wörter, die aus dem Alphabet der Aussagenlogik gebildet werden können:

- $A0^iA$ sind Element der aussagenlogischen Formeln AF für alle i aus IN
- {⊤, ⊥} ist Teilmenge der aussagenlogischen Formeln.
- Falls a und b Elemente der aussagenlogischen Formeln sind, ist auch { „¬a“, „(a▼b)“, „(a▲b)“, „(a→b)“} Teilmenge der aussagenlogischen Formeln.
- Kein weiteres Element gehört zur Menge der Aussagenlogischen Formeln AF.

Warum brauchen wir denn den abschließenden Teil ‚Keine weiteren Elemente aus Σ* gehören zur Menge der aussagenlogischen Formeln (AF) ?

Damit wird die Menge eindeutig definiert, als die kleinste Menge, die die genannten Klauseln erfüllt.

Genau, denn welche Menge würde diese z.B. auch erfüllen?

Σ^* würde die Klauseln auch erfüllen.

Genaue Erläuterung der Notwendigkeit der Klammerung

Die Klammerung ist erforderlich, damit die Zeichenreihen eine sinnvolle Struktur erhalten, denn aussagenlogische Formeln können von einer kanonischen Peano-Algebra erzeugt werden; damit gibt es zu jeder aussagenlogischen Formeln nur einen Weg der Erzeugung.

Was ist eine Peano-Algebra?

Eine v-Algebra AL = (U,F) heißt Peano-Algebra genau dann wenn 1. und 2. gelten.

1. AL ist minimal, d.h. Erz(AL)=U
2. Für jedes u aus U gibt es genau ein i aus I und eindeutig bestimmte Werte ($u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}$) aus U mit u= $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)})$

Wieso kann die Auswertungsfunktion auf diese Weise rekursiv definiert werden?

Mit der Definition geeigneter Funktionen können die aussagenlogischen Formeln mit Hilfe einer Peano-Algebra erzeugt werden. Damit läßt sich der Rekursionssatz anwenden.

Die aussagenlogischen Formeln sind eindeutig zerlegbar, damit ist die Existenz der Funktion h des Rekursionssatzes für Peano-Algebren intuitiv klar.

Peano-Algebra der aussagenlogischen Formeln?

Es sei I := IN vereinigt mit {$\top$, $\bot$, $\rightarrow$,$\neg$, ▲,▼} eine Indexmenge und v:I->IN eine Signatur definiert durch v(i)=0 für i aus IN und v($\top$) = v($\bot$) := 0 , v($\neg$) = 1 und v(▲) := v(▼):= v($\rightarrow$) :=2. Eine v-Algebra AF-Dach = (AF,f) sei definiert durch:

fi() := „A0^{i}A“

$f_\top() = \top$

$f_\bot() = \bot$

f$\neg$(a) := „$\neg$a“

f▲ (a,b) := „(a▲ b)“

f▼ (a,b) := „(a▼ b)“

f$\rightarrow$ (a,b) := „(a$\rightarrow$ b)“

für alle I aus IN und a,b aus AF.

Dann ist AF-Dach eine Peano-Algebra.

Rekursionssatz für Peano-Algebren? (1.4.9)

Es sei v eine Signatur und AL(U,f) eine Peano-Algebra der Signatur v. Es sei Y eine nicht leere Menge und für jedes i aus I sei

$h_i : U^{v(i)} \times Y^{v(i)} \rightarrow Y$

eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion h:U -> Y mit

$h(f_i(u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}))) = h_i(u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}, h(u_1), h(u_2), \ldots, h(u_{v(i)}))$

für alle I aus I und alle $u_1, u_2, \ldots, u_{v(i)}$ aus U.

Äquivalente Ersetzung von Teiltermen einer kanonischen Peano-Algebra erklären?

Es sei AL0= (Tm, f0) die kanonischen Peano-Algebra der Signatur v. Es sei AL=(U,f) eine v-Algebra und h:Tm->U ein Homomorphismus. Weiter seien a,b,c aus Tm und x,y Worte mit a = xby. Dann gelten:

(1) xcy ist aus Tm

(2) h(xby) = h(xcy) falls h(b) = h(c)

Wie ist die Semantik (Bedeutung) der aussagenlogischen Formeln (Zeichenreihen) definiert?

Belegung

Eine Belegung (der Aussagensymoble) ist eine Abbildung σ: AS -> { 0,1 }. Es sei BEL:={0,1}^{AS} die Menge aller Belegungen.

Auswertungsfunktion

Zu jeder Belegung σ aus BEL sei die Auswertungsfunktion <σ> : AF -> { 0,1 } von den aussagenlogischen Formeln in die Wahrheitswerte rekursiv wie folgt definiert:

<σ> ($\top$) = 1

<σ> ($\bot$) = 0

<σ> (B) = σ(B)

<σ> („(a$\rightarrow$b)“) = 1, gdw. (<σ> (a) = 1 impliziert <σ> (b) = 1)

<σ> („$\neg$a“)= 1, gdw. <σ> (a) = 0

<σ> („(a▲b)“)= 1, gdw. (<σ> (a) = 1 und <σ> (b) = 1)

<σ> („(a▼b)“)= 1, gdw. (<σ> (a) = 1 oder <σ> (b) = 1)

für alle B aus AS und a,b aus AF.

Die Bedeutung einer Formel α (alpha) ist dann die Menge der Belegungen σ (sigma) für die $\sigma(\alpha)=1$ ist.

Wie kann man den nun so eine Formel auswerten?
Wahrheitstafel, d.h. testen aller möglichen Belegungen.

Es gibt unendlich viele Variablen, warum geht das trotzdem mit der Wahrheitstafel?
Man braucht nur die konkret in der Formel vorkommenden Variablen für die Auswertung zu betrachten, da der Wert der Auswertungsfunktion nur von den in der konkreten Formel vorkommenden Variablen abhängt.

Koinzidenzlemma der aussagenlogischen Formeln.
Für alle Formeln a aus der Menge der aussagenlogischen Formeln AF sei AS(a) (Teilmenge der Aussagensymbole) die Menge der in a vorkommenden Aussagensymbole.
[Man kann die Funktion AS rekursiv definieren durch:
$AS(\top) = AS(\bot)=\{\}$, $AS(B) = \{B\}$ für B aus AS, $AS(\neg a) = AS(a)$, $AS(a \blacktriangledown b) = AS(a \blacktriangle b) = AS(a \rightarrow b) = AS(a) \cup AS(b)$]
Nun sei a eine aussagenlogische Formel und σ,σ' Belegungen mit $\sigma(B)= \sigma'(B)$ für alle B aus AS(a), dann gilt $\langle\sigma\rangle(a) = \langle\sigma'\rangle(a)$

Entscheidbarkeit Tautologie (allgemeingültigkeit) oder Erfüllbarkeit Wahrheitstafelmethode?
Tautologie alle Zeilen = 1
Eine aussagenlogische Formel heißt Tautologie genau dann, wenn $\langle\sigma\rangle(\alpha)=1$ für alle σ aus BEL
Erfüllbarkeit mind. eine Zeile = 1
Eine aussagenlogischen Formel heißt Erfüllbar genau dann, wenn es eine Belegung σ in BEL gibt mit $\langle\sigma\rangle(\alpha)=1$
Unerfüllbar (kontraindikatorisch) keine Zeile = 1
Eine aussagenlogische Formel heißt kontradiktorisch genau dann, wenn $\langle\sigma\rangle(\alpha)=0$ für alle σ aus BEL

„Impliziert logisch“ a|=b ?
a impliziert logisch b bzw. b ist eine logische Konsequenz von a a|=b, genau dann, wenn für alle Belegungen σ in BEL gilt: $\langle\sigma\rangle(a)=1$ impliziert $\langle\sigma\rangle(b)=1$

„logisch äquivalent“ a≡b ?
a ist logisch äquivalent zu b a≡b genau dann, wenn für alle Belegungen $\langle\sigma\rangle(a)=\langle\sigma\rangle(b)$ gilt.

Es sei X Teilmenge der aussagenlogischen Formeln und b eine aussagenlogische Formel. Wie ist X |= b definiert?
Für alle Belegungen σ aus BEL gilt: Wenn die Auswertungsfunktion für alle Formeln der Formelmenge X den Wahrheitswert 1 annimmt, impliziert dies logisch den Wahrheitswert 1 für die Formel b.

Welchen Aufwand beansprucht dies? (Komplexität der Wahrheitstafelberechung)
Für n Aussagensymbole gibt es 2^n mögliche Belegungen und n-1 Junktoren. man braucht mindestens $(n-1) * 2^n$ Elementaroperationen, um die Wahrheitstafel vollständig zu berechnen.
Der Aufwand ist also exponentiell abhängig von der Anzahl der Aussagensymbole
=>Das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln liegt in NP ob es auch in P liegt, weiß man nicht, da das Problem P=NP nicht geklärt ist. Man nimmt heute aber P<>NP an.

Gibt es schnellere Verfahren?
Wahrscheinlich nicht, da das Entscheiden der Menge der Tautologien NP-vollständig ist.

Was heißt NP-vollständig?
P ist die Klasse aller Sprachen, die sich in polynominaler Zeit entscheiden lassen. NP ist die Klasse aller Sprachen, für die ein Beweisverfahren mit polynominaler Rechenzeit existiert. Man weiß bis heute nicht, ob P = NP, aber man glaubt es nicht. Ist das Wahrheitstafelproblem in P, so gilt P = NP

Es gibt doch unendlich viele Belegungen. Wieso ist die Entscheidung endlich lösbar?
Weil nach dem Konizidenzlemma der Aussagenlogik die Betrachtung einer endlichen Teilmenge der benutzten Variablen und ihrer Belegungen ausreicht.

Wie steht es mit der (Nicht-)Erfüllbarkeit einer (unendlichen) Menge X von Formeln? Kann man ja für unendliche X nicht alle durchprobieren…

Nach dem Kompaktheitssatz ist X nicht erfüllbar, genau dann wenn eine endliche Teilmenge Y von X existiert, die nicht erfüllbar ist.(negative Version) bzw. ist X erfüllbar, genau dann wenn eine endliche Teilmenge Y von X erfüllbar ist. (positive Version)
Def. 2.4.8.1. wird im Beweis der Aufzählbarkeit von allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln angewandt.

Wie ist die Erfüllbarkeit auf Mengen aussagenlogischer Formeln definiert? Definition von Erf(X)?
Sei X Teilmenge der aussagenlogischen Formeln und a eine aussagenlogischen Formel, dann ist:
Erfüllungsmenge von X: Erf(X) := { σ aus BEL| <σ>(b)=1 für alle Formeln b aus X}
X heißt erfüllbar, genau dann, wenn Erf(X)<>{}.
X heißt endlich erfüllbar, genau dann, wenn Erf(Y)<>{} für jede endliche Teilmenge Y von X.
Wir sagen X impliziert logisch a bzw. a ist logische Konsequenz aus X X |= a, genau dann, wenn Erf(X) Teilmenge der Erf(a)

Wie lautet der Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz) der Aussagenlogik?
Sei X eine Teilmenge der aussagenlogischen Formeln und a eine aussagenlogische Formel, dann gilt:
(1) Erf(X) = {} genau dann, wenn Erf(Y) = {} für eine endliche Teilmenge Y von X
(2) Erf(X) <> {} genau dann, wenn X endlich erfüllbar.
(3) X |= a genau dann, wenn für eine endliche Teilmenge Y von X Y|=a gilt.

Was benötigt man für die Prädikatenlogik?
Syntax (strukturierte aber Bedeutungslose Zeichenreihen):
Alphabet
Σp:= {x;0;(;);,; ⊤; ⊥; →;¬; ▲;▼;∀;∃;R;f}
Menge der Individuenvariablen kurz Variablen
Var := {x0^nx| n Element IN}
Menge der Funktionsbezeichner der Prädikatenlogik
Funk := { f0^nf0^mf | n,m Element IN}
Menge der Prädikatsbezeichner der Prädikatenlogik
Präd := { R0^nR0^mR | n,m Element IN}
Ein Prädikat wird in der Prädikatenlogik als Relation zwischen Objekten aufgefasst.
Stellenzahlfunktion
μ : Präd U Funk -> IN mit μ(b0^nb0^mb) für b aus {f,R} und m= μ(b0^nb0^mb) Stelligkeit des Prädikats- bzw. Funktionsbezeichners.
Typ
T=(I,J), mit I Teilmenge Prädikatsbezeichner, J Teilmenge Funktionsbezeichner
Dient dazu die für eine konkrete Sprache benötigten Bezeichner aus dem Bezeichnervorrat auszusondern
prädikatenlogische Terme (Zeichenreihen)
Ist T=(I,J) ein Typ wird die Menge Tm_T (Teilmenge der Worte über dem Alphabet der Prädikatenlogik) aller prädikatenlogischen Terme vom Typ T wie folgt als Erzeugnis definiert:
(1) „y“ Element Tm_T für alle y aus der Menge der Individuenvariablen
(2) für alle h aus J ist h(t1,t2,..,tj) Element $Tm_{T,}$ falls {t1,t2,..,tj} Element $Tm_{T,}$
(3) keine weiteren Wörter gehören zu Tm_T
PAT (Prädikatenlogische Atome vom Typ T)
Die Menge PAT_T:= {„Q(t1,t2,..,$t_{\mu(Q)}$)“| Q Prädikatsbezeichner, t1,t2,..,$t_{\mu(Q)}$ aus prädikatenlogische Terme aus Tm_T } U {⊤, ⊥} heißt Menge der Prädikatenlogischen Primformeln vom Typ T.
prädikatenlogische Formeln PF_T
Die Menge aller prädikatenlogischen Formeln PF_T von Typ T ist wie folgt als Erzeugnis definiert:
PAT_T ist Teilmenge der Prädikatenlogischen Formeln PF_T
Für a aus PF_T ist auch ¬a Element aus PF_T
Für a,b aus PF_T ist auch {„(a▼b)“, „(a▲b)“, „(a→b)“} aus PF_T
Für alle y aus Var ist „∀ya“ und „∃ya“ Element von PF_T falls a aus PF_T ist.
Keine weiteren Zeichenreihen gehören zu $PF_{T.}$
Semantik (Zuordnung von Bedeutungen):
T-Struktur
Sei T=(I,J) ein Typ. Eine t-Struktur ist ein Tripel *S*=(S,P,g)
Mit einer nicht leeren Trägermenge S (auch Individuenbereich von *S* genannt)
P ist eine Abbildung, die jedem Prädikatsbezeichner R aus I eine μ(R) stellige Relation auf S zuordnet also P(R) =: P_R Teilmenge von $S^{\mu(R)}$ für alle Prädikatsbezeichner R aus I.
g ist eine Abbildung, die jedem Funktionsbezeichner f aus J eine μ(f)-stellige Funktion g(f)=: g_f : $S^{\mu(f)}$ -> S zuordnet.

Belegung

Sei T ein Typ und S eine T-Struktur mit Trägermenge S.
Eine Belegung der Variablen über S ist eine Abbildung σ : Var -> S
Für Belegungen σ vereinbaren wir folgende aus der Aussagenlogik gewohnte Schreibweise: Ist a aus S und x aus Var, so sei σ[x/a]: Var ->S definiert durch:
σ[x/a](y) = a falls y=x, σ(y) sonst.
Wir sagen für alle y aus Var. σ[x/a] ist die Abänderung von σ an der Stelle x durch a.
Es sei BelS := {σ|σ: Var -> S} die Menge aller Belegungen der Variablen über S.

Durch eine Struktur S vom Typ T wird jedem Term vom Typ T und jeder Belegung ein Element ihres Trägers S als Wert zugeordnet.
Damit lässt sich jedem Term t eine Termauswertungsfunktion (Wertfunktion)
Ws(t) :BelS –> S zuordnen.
Entsprechend lässt sich jeder Formel a durch die Struktur S eine Formelauswertungsfunktion (Wahrheitswertfunktion) WWs(σ): BelS -> {0,1} zuordnen.

Termauswertungsfunktion

Sei T=(I,J) ein Typ und S=(S,P,g) eine T-Struktur
Die Abbildung Ws : Tm -> (BelS -> S) sei rekursiv definiert durch
Ws (x) (σ) = σ(x)
Ws(f(t1,t2,..,tμ(f))) (σ) = gf (Ws (t1)(σ), Ws (t2)(σ),…, Ws(tμ(f))(σ)) für alle x aus Var, f aus der Menge der Funktionsbezeichner J, t1,t2,..,tμ(f) aus Tm und für alle Belegungen σ der Variablen über S.
Man nennt Ws(t)(σ) den Wert des Terms t in der Struktur S unter der Belegung σ.

Wahrheitswertfunktion

Sei T=(I,J) ein Typ und S=(S,P,g) eine T-Struktur
Die Abbildung WWs : PF -> (BelS ->{0,1} wird durch folgende Rekursionsgleichungen bestimmt:
WWs(⊤)(σ) = 1
WWs(⊥)(σ) = 0
WWs(R(t1,t2,..,tμ(f))) (σ) = 1 genau dann, wenn PR(Ws (t1)(σ), Ws (t2)(σ),…, Ws(tμ(f))(σ))
WWs(¬a) (σ)= 1 genau dann, wenn WWs(a)(σ) = 0
WWs (a▲b)(σ) = 1 genau dann, wenn WWs(a)(σ)=1 und WWs(b)(σ)=1
WWs (a▼b)(σ) = 1 genau dann, wenn WWs(a)(σ)=1 oder WWs(b)(σ)=1
WWs (a→b)(σ) = 1 genau dann, wenn WWs(a)(σ)=1 impliziert WWs(b)(σ)=1
WWs(∀xa)(σ) = 1 genau dann, wenn WWs(a)(σ[x/a])=1 für alle a aus S
WWs(∃xa)(σ) = 1 genau dann, wenn es gibt ein a in S mit WWs(a)(σ[x/a])=1
Für alle Prädikatsbezeichern R aus I, t1,t2,..,tμ(f) aus Tm, a,b aus PF, x aus Var und σ aus BelS.
Man nennt WWs (c)(σ) den Wahrheitswert der Formel c in der Struktur S unter der Belegung σ.

Die Wertauswertungsfunktion ordnet jeder prädikatenlogischen Formel a eine Wahrheitswertfunktion WWS(a) zu, die wiederum jeder Belegung von BelS einen Wahrheitswert 0 oder 1 zuordnet

Es sei c eine Prädikatenlogische Formel und σ aus BelS eine Belegung. Statt WWs (c)(σ) schreibt man auch S|= c(σ) und sagt c gilt in S unter σ.

Durch die Definition der Wertfunktion und der Wahrheitswertfunktion wird den prädikatenlogischen Formeln in einer gegebenen Struktur ein Teil ihrer „intendierten Bedeutung“ zugewiesen, den wir exakt fassen können. Nämlich ihr Wahrheistwert unter einer Belegung. Dieser ergibt sich rekursiv aus den Wahrheitswerten der Teilformeln unter dieser Belegung. Die „Bedeutung“ einer Formel hängt damit von der jeweils T-Struktur S ab.

Was bedeutet "t frei für die Variable y in der prädikatenlogischen Formel a"?

Sei y eine Variable und sei t eine prädikatenlogischer Term, dann definieren wir eine von y und t abhängige Abbildung G rekursiv wie folgt: G: PF ->{0,1} (z element Var, und b,b1,b2 Element PF)
G(a) = 1 für alle a aus PAT
G(¬a) = 1 genau dann, wenn G(a) = 1
G(b1Vb2), G(b1^b2), G(b1->b2) = 1 genau dann, wenn G(b1) =1 und G(b2) = 1
G(∀zb) . G(∃zb) = 1 genau dann, wenn y keine Element von Fr(∀∃zb) ist oder (G(b)=1 und z kommt nicht in t vor.
t ist frei für y in a genau dann, wenn G(a) = 1.

Konizidenzlemma der Prädikatenlogik?

Sei S=(S,P,g) eine Struktur vom Typ T, t aus Tm und a aus den PFT. Seien ferner σ und σ' Belegungen über S. Dann gilt:

(1) Falls σ und σ' für alle in t vorkommenden Variablen übereinstimmen, dann stimmen in S die Werte von t unter σ und von t unter σ' überein.

σ|Vk(t) = σ'|Vk(t) => Ws(t)(σ) = Ws(t)(σ')

(2) Falls σ und σ' für alle freien a frei vorkommenden Variablen übereinstimmen, so stimmen in S die Wahrheitswerte von a unter σ und von a unter σ' überein.

σ|Fr(t) = σ'|Fr(t) => WWs(t)(σ) = WWs(t)(σ')

Definieren Sie für Prädikatenlogische Formeln PF die Gültigkeit in Strukturen.

Seien a,b prädikatenlogische Formeln, und S eine T-Struktur, dann gitl:

(1) a heißt gültig in (Modell von) S S|=a, genau dann, wenn S|=a(σ) für alle Belegungen σ aus BelS
(2) a heißt logisch gültig (allgemeingültig) genau dann, wenn a in allen T-Strukturen gültig ist.
(3) Zwei Formeln a und b heißen äquivalent genau dann, wenn WWs(a)=WWs(b)
(4) zwei Formeln a und b heißen logisch äquivalent, wenn sie in allen T-Strukturen S äquivalent sind.

Wann heißt eine prädikatenlogische Formel erfüllbar? (Modell, logische Konsequenz, Erfüllbarkeit)

Sei X eine Teilmenge der prädikatenlogischen Formeln (PF) und a eine prädikatenlogische Formel.

(1) Sei S eine T-Struktur. S heißt Modell von X (S|=X) genau dann, wenn S|=b für alle b aus X.
(2) Wir definieren die logische Konsequenz (X impliziert logisch a bzw. a ist logische Konsequenz von X durch: X:= a genau dann, wenn (S|=X => S|=a für alle T-Strukturen S). Ist X = {b} so schreiben wir auch b |= a statt {b} |=a. Für X={} schreibt man auch |=a statt {}|=a.
(3) X heißt erfüllbar, genau dann, wenn es ein Modell von X gibt. Eine prädikatenlogische Formel a heißt erfüllbar, genau dann, wenn {a} erfüllbar ist.

Was bedeutet nun S |= α(σ), S |= α, |= α wenn S eine T-Struktur ist? [σ sigma, α alpha]

S |= α(σ): α gültig in S unter der Belegung σ d.h. WWs(α)(σ)=1

S |= α: α gültig unter jeder Belegung σ (S ist Modell von α) WWs(α)(σ)=1 gilt für alle Belegungen S

|= α: α ist allgemeingültig, d.h. Gilt unter jeder Belegung σ und in allen T-Strukturen. WWs(α)(σ)=1 gilt für alle Belegungen in allen T-Strukturen S

Bei der Definiton von |= α quantifiziert man über alle T-Strukturen und das ist ja ziemlich viel (noch nicht mal eine Menge). Wie weit ist der Begriff der Allgemeingültigkeit trotzdem zugänglich?

Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist nicht rekursiv, aber rekursiv-aufzählbar.

Was kann man über die Menge der allgemeingültigen Prädikatenlogischen Formeln sagen? Ist sie entscheid/beweisbar?

Menge der allgemeingültigen PL1 Formeln ist nicht entscheidbar(rekursiv) aber rekursiv-aufzählbar sofern der Typ rekursiv ist.

Bleibt die Allgemeingültigkeit bei der Allquantifizierung erhalten?

Die Erfüllbarkeit bleibt beim Übergang zur Allquantifizierung erhalten.

Definition Semi-Thue-System

Ein Semi-Thue-System (STS) ist ein Paar T= (Alphabet Γ, einer endlichen Teilmenge W(Γ) X W(Γ) der Ersetzungsregeln).

Durch ->T := {(uLv,uRv) | u,v aus W(Γ); (L,R) aus R } ist die zweistellige Überführungsrelation definiert.

Es sei *->T die reflexive und transitive Hülle von ->T. Es gilt also x *-> T y [y ist aus x in T ableitbar/erzeugbar] genau dann, wenn es x0,x1,..,xn gibt (n>= 0, xi aus W(Γ) mit x=x0 -> x1,….xn-i1 -> xn =y.

Damit ist STS ein Regelsystem zur schrittweisen Umformung von Worten durch Ersetzung von Teilworten. In der Theorie der Berechenbarkeit wird durch zurückführen auf das Selbstanwendbarkeitsproblem von Touring-Maschinen der Satz bewiesen, dass STS nicht entscheidbar ist.

Wie kann man zeigen, dass die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln nicht rekursiv ist?

Durch Reduktion auf das Semi-Thue-System STS. Ausgehend von der nicht entscheidbaren Menge des Semi-Thue-Systems wird gezeigt, dass ein Entscheidungsverfahren für die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln ein Entscheidungsverfahren für STS liefern würde.

Nun ist ja die Menge aller T-Strukturen unüberschaubar groß und vielfältig, dass sie nicht einmal eine Menge sind, sondern lediglich eine Klasse bilden. Gibt es da auch Strukturen die uns das Leben etwas leichter machen?

Herbrand Strukturen

Definition Herbrand-Universum, Herbrand-Struktur

Sei T=(I,J) ein Typ mit μ(f)=0 für mindestens ein f aus J.

(1) Es sei die Menge der Grundterme U (=Menge der Terme in denen keine Variable vorkommt) von T definiert U := (t aus Tm | Vk(t) = {} } [U heißt auch das Herbrand-Universum von T]

(2) Eine Herbrand-Struktur über T ist eine Struktur H= (U,Q,h) so dass hf(T1,t2,..,tμ(f)} = „f(t1,t2,..,tμ(f)) für alle f aus J und alle t1,t2,…,tμ(f) gilt.

Alle Herbrandstrukturen vom Typ T besitzen also dieselbe Trägermenge, nämlich das Herbranduniversum von T und dieselben Funktionen, damit bestimmt eine Festlegung von Relationen QR passend zur Stelligkeit auf U für alle R aus I bereits eine Herbrandstruktur vom Typ T.

Zwar ist die Bedingung μ(f)=0 für ein f aus J nicht für jeden Typ T erfüllt, aber da sich die semantischen Eigenschaften von Formeln bei Typerweiterungen und Umbenennungen nicht ändern, kann man zu jedem T ohne entsprechendes f ein T0 konstruieren, dass T genau um jenes f mit μ(f)=0 erweitert. In der Folge kann zu jedem Typ T eine Herbrandstruktur erstellt werden.

Sei X eine Menge von Aussagen in skolemscher Normalform, dann ist X genau dann erfüllbar, wenn X ein Herbrand-Modell besitzt.

Herbrand-Modell?

Sei X Teilmenge der prädikatenlogischen Formeln. Ein Herbrand-Modell von X ist eine Herbrand-Struktur vom Typ T die ein Modell von X ist.

Wie lautet der Satz von Löwenheim-Skolem? (Beweis?!)

Sei X Teilmenge der prädikatenlogischen Formeln über einen Typ T erfüllbar. Dann besitzt X ein Modell mit abzählbar unendlicher Trägermenge.

Beweis: Sei X erfüllbar. Wir können nach dem Satz über die Existenz pränexer Normalformen ohne Beschränkung der Annahme annehmen, dass alle Elemente von X in pränexer Normalform vorliegen. Desweiteren ist X' := {∀a | a aus x} erfüllbar. Sei T' = (Praed, Funk). Nach dem Lemma über Typerweiterung hat X' auch eine T' Struktur als Modell. Da X erfüllbar ist, wenn Sk(X) erfüllbar ist. Sk(X) Teilmenge von PFT' ebenfalls erfüllbar. Zu Sk(X) existiert ein Herbrand-Modell H mit Träger UT'. H ist dabei auch eni Modell der Menge X'. Folglich hat X' eine T-Struktur mit Träger UT' als Modell. Durch Typeinschränkung erhält man daraus ein T-Modell S von X' mit Träger UT'. Schließlich ist S auch ein Modell von X. Das Herbrand-Universum UT' ist zudem abzählbar unendlich. qed.

Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik

Sei X Teilmenge der prädikatenlogischen Formeln und a eine prädikatenlogische Formel, dann gilt:

(1) X erfüllbar ⇐> X endlich erfüllbar

(2) X|=a ⇐> es gibt eine endliche Teilmenge Y von X mit Y |= a.

Kennen Sie noch den Satz der aussagt, dass wir uns auf Herbrand Strukturen beschränken können? Wieso benötigt man geschlossene Formeln in skolemisierter Normalform?

Wenn alle β ∈ X in Skolemscher Normalform sind ist X erfüllbar genau dann wenn X ein Herbrand Modell hat.

Der Satz von Herbrand ist das entscheidende Hilfsmittel zur Erkennung der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln. (rekursive-aufzählbarkeit)

Satz:

Sei T'=(Praed, Funk) und sei T=(I,J) ein rekursiver Typ (d.h. es seien I und J rekursive Wortmengen) Dann gilt:

(1) {a aus PFT' | a allgemeingültig} ist rekursiv-aufzählbar

(2) {a aus PFT | a allgemeingültig} ist rekursiv-aufzählbar

(3) {(a,b) aus PFT X PFT | a|= b ist rekursiv aufzählbar

(4) Für jede rekursiv aufzählbare Menge X Teilmenge PFT ist die Menge Kons(X) := {a aus PFT | X|=a} der Konsequenzen von X rekursiv-aufzählbar.

Beweis der rekursiven-aufzählbarkeit allgemeingültiger Prädikatenlogischer Formeln?

Man muss ein Verfahren angeben, das für eine gegebene Formel a hält, wenn a allgemeingültig ist, sonst nicht.
Idee: Bildung des Allabschlusses der Negation von a. Übertragung in die skolemsche Normalform. Wenn X eine Menge von Formeln in skolemscher Normalform ist, gilt X ist erfüllbar, genau dann, wenn X ein Herbrand-Modell hat. Deshalb reicht es zu zeigen, dass die skolemisierung von (nicht ∀a) kein Herbrand-Modell hat.
Beweis:
Beschreibung eines Verfahrens, das bei Eingabe eines Wortes a aus W(ΣP) hält, wenn a eine allgemeingültige Formel ist, sonst nicht.

1. Falls a nicht Element von PFT' führe eine Endlosschleife aus.
2. Bilde b = ¬∀a
3. Bilde b' := Sk(b)
4. Sei φ: AS-> {a aus PAT \ {⊥,┬} | Vk(a) = {} } eine berechenbare Bijektion der Aussagensymbole auf die von „⊥" und „┬" verschiedenen variablefreien Primformeln. Teste der Reihe nach alle endlichen Teilmengen von von Y = I φ -1 (Inst(b')) Teilmenge Aussagenlogische Formeln auf aussagenlogische Erfüllbarkeit (z.B. mit der Wahrheitstafelmethode) Halte an, sobald eine unerfüllbare Menge Y gefunden wurde.

Eine geeignete Funktion φ lässt sich leicht definieren, da T' ein rekursiver Typ ist, ist das Verfahren effektiv (d.h. z.B. mit einem Computer) ausführbar. Falls a nicht aus PFT' ist, hält das Verfahren nie und für Formeln a aus PFT' ergibt sich:

Sei α allgemeingültige prädikatenlogische Formel.
<=> ∀ α allgemeingültig
<=> β := ¬∀ α nicht erfüllbar.
[Umkehrung, da dieses mit endlichen Mitteln zu beweisen ist.]
<=> b' := Sk(β) := G(pn(β)) nicht erfüllbar
[Umformung in pränexe Normalform (pn): logisch äquivalent
Umformung in skolemisierte Normalform (Sk): erfüllbarkeitsäquivalent]
<=> Inst (b') nicht erfüllbar [Übergang zu Inst(b')]
<=> Iφ^-1 (Inst(γ)) nicht erfüllbar. [Übergang zur aussagenlogischen Interpretation der prädikatenlogischen Formeln]
<=> Iφ^-1 (Inst(γ)) nicht endlich erfüllbar [Kompaktheitssatz der Aussagenlogik]
<=> der obige Algorithmus hält.

Gibt es auch einen Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik 1.Stufe?
Sei X Teilmenge der PF und a Element der PF, dann gilt:
X ist erfüllbar genau dann, wenn X endlich erfüllbar ist.
X |= a genau dann wenn es eine endliche Teilmenge Y von X gibt mit Y |= a.

Wieso nun der Übergang zu Instanzen?
Instanzen verhalten sich bezüglich der Gültigkeit in Strukturen wie aussagenlogische Formeln über Belegungen. Sie enthalten keine Quantoren und keine Variablen, d.h. sie haben einen festen Wahrheitswert.

Warum wird im Beweis die Nichterfüllbarkeit der negierten Formel abgeprüft?
Weil die nichterfüllbarkeit im Gegensatz zur Erfüllbarkeit auch bei unendlicher Formelmenge endlich beweisbar ist.

Normalformen ?
Eine aussagenlogische Formel a ist in disjunktiver Normalform, wenn es k Element IN Formeln b aus AF gibt mit a=b1 ▼b2 ▼… ▼bk und wobei die bj die Form c1▲c2▲…▲ci haben.
Die Formel a ist in kanonisch disjunktiver Normalform, wenn in jeder Formel bi jedes Aussagensymbol B aus der Menge der Aussagensymbole von a genau einmal in negierter oder nicht negierter Form vorkommt.
Die Definition für die (kanonisch) konjunktive Normalform erhält man durch vertauschen von ▼mit ▲.
Zu jeder Formel aus der Menge der aussagenlogischen Normalformen gibt eine äquivalente Formel in kanonisch disjunktiver/konjunktiver Normalform.

Was ist eine pränexe Normalform?
Eine prädikatenlogische Formel heißt in pränexer Normalform, genau dann, wenn a = „Q1x1Q2x2…Qnxnc" ist mit Qi Element {∀,∃} für i = 1,2,..,n, xi Element Var und i<>j für alle xi, sowie c Quantorenfreie prädikatenlogische Formel. Man nennt c die Matrix von a.

Wie bildet man die pränexe Normalform? (Am Beispiel erläutern)
Stichwort Gebundene Umbenennung…

Wie verhält sich eine Formel in Pränexnormalform zur Ausgangsformel?

Zu jeder prädikatenlogischen Formel a gibt es eine äquivalente prädikatenlogischen Formel b in pränexer Normalform.
Es gibt eine berechenbare Funktion pn so dass für alle Typen T und alle a aus PF gilt: pn(a) ist eine zu a äquivalente prädikatenlogische Formel in pränexer Normalform.

Wie funktioniert die Skolemisierung? (an einem Beispiel zeigen)

Streichen der Existenzquantoren und ersetzen der von den Existenzquantoren abhängigen Variablen durch neue Funktionssymbole. z.B. gegeben: ∀x ∃y ∀z Q(x,y,z)
Grundgedanke ist, dass es zu jedem x ein y gibt. Also lässt sich eine Funktion h definieren, die dieses y bestimmt.
Es sei h das neue Funktionssymbol, dann folgt ∀x ∀z Q(x,h(x),z)
[wichtig h(x), da y nicht von z abhängt.]

Wozu wird die Skolemisierung benötigt?

Die Entscheidbarkeit bleibt erhalten, und man kann sich dann auf die Untersuchung von Herbrand-Modellen beschränken.

Defintion Skolemisierung, Skolemsche Normalform

Sei ΣP das Alphabet der Prädikatenlogik
(1) Es sei n: W(ΣP) -> IN injektiv und „effektiv“ (z.B. die Umkehrung einer bijektiven Standardnummerierung v: IN ->W(ΣP) und es sei π: IN^2 -> IN berechenbar und injektiv (z.B. die Cantorsche Paarungsfunktion. Schreibweise $f_{x,k,m}$:= $f0^{\pi(n(x),k)}f0^{m}f$ aus der Menge der Funktionsbezeichner für alle k,m aus IN und alle x aus W(ΣP).
(2) für jede prädikatenlogische Formel a sei au aus PF die Formel, die aus a entsteht, wenn jedes Funktionssymbol in a der Form $f0^{n}f0^{m}f$ durch das Funktionssymbol $f0^{\pi(n,0)}f0^{m}f$ ersetzt wird. Für X Teilemenge der Prädikatenlogischen Formeln sei Xu := { au | a aus X}
(3) Für jede Formel a aus der Menge der geschlossenen Formeln in pränexer Normalform sie eine Folge a0,a1, … von Formeln aus der Menge der prädikatenlogischen Formeln PF wie folgt induktiv definiert:
a. a0 := au
b. Sie ak bereits definiert. Falls # ∃ (ak) = 0 (falls also kein Existenzquantor mehr auftritt ist) ist ak+1 = ak. Andernfalls kann ak eindeutig wie folgt geschrieben werden. ak := ∀x1∀x2..∀xn ∃y c In diesem Fall sei ak+1 := ∀x1∀x2..∀xn$Sub_{y}^{fn,k+1,n(x1,x2,...xn)}$(c)
Es sei m := #∃ (a) (Die Anzahl der in a vorkommenden Existenzquantoren), dann heißt Sk(a):= am die skolemsche Normalform oder Skolemisierung von a. Für Teilmengen X aus der Menge der geschlossenen Formeln in Pränexer Normalform nennen wir Sk(X) := { Sk(b) | b aus X} die Skolemisierung von X.
(4) Eine prädikatenlogische Formel c heißt Skolemsche Normalform, genau dann, wenn c in pränexer Normalform ist und die Anzahl der Existenzquantoren in c = 0 ist.

Was bedeutet denn Skolemsche Normalform?

Allabschluß aller Variable. Die Allquantoren stehen vor der Formel.

Klauselform der skolemschen Normalform?

Eine prädikatenlogischen Formel b heißt in Klauselform genau dann, wenn b in skolemscher Normalform ist und die Matrix von b in konjunktiver Normalform.

Ist Skolemisierung nicht ein großer Eingriff in die Formel? Wie verhält sich die skolemisierte Formel zur Ausgangsformel?

Die beiden Formeln sind erfüllbarkeitsäquivalent (nicht äquivalent!)

Warum darf man Herbrandstrukturen einsetzen

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Nun wird ja der Beweis der rekursiven-aufzählbarkeit der allgemeingültigen Formeln über die unerfüllbarkeit der Negation derjenigen geführt. Wo im Beweis nehmen wir uns dann die Herbrand Modelle zu Hilfe?

beim Übergang zu der Nichterfüllbarkeit der Instanzen.

Definition Instanz?

Sei a = ∀x1∀x2…∀xnc eine geschlossene Formel in skolemscher Normalform mit c als Quantorenfreier prädikatenlogischern Formel und U sei das Herbrand Universum des zugrunde liegenden Typs T, dann heißt Inst(a) := Sub x1,..xn durch t1,..tn (c) | t1,..tn aus U} Menge der Instanzen von a.
Sei X eine Menge von Aussagen in skolemscher Normalform. Dann nennen wir Inst(X) := U { Inst(a) | a aus X} die Menge der Instanzen von X.

Eine Instanz ist also eine Spezialisierung von a durch konstante Terme, also eine Formel, die aus der Matrix von a durch Substitution von konstanten Termen für die Variablen entsteht.

Warum Instanzenbildung?

Weil nach Satz 3.6.7 gilt:
Sei X Teilmenge von Aussagen (geschlossene Formeln) und jedes a Element X sei in skolemscher Normalform, dann besitzt X genau dann ein Modell, wenn Inst(X) erfüllbar ist.

Sei a = ∀x1∀x2…∀xnc eine geschlossene Formel in skolemscher Normalform mit c als Quantorenfreier prädikatenlogischern Formel und sei H eine Herbrand-Struktur. Dann gilt H |= a genau dann, wenn H Modell jeder Instanz von a ist.

Satz von Herbrand:
Sei X eine Menge von Aussagen in Skolemscher Normalform. Dann ist X genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Menge von Instanzen von X erfüllbar ist.

⇒ Redukion der Erfüllbarkeit von Instanzenmengen auf aussagenlogische Erfüllbarkeit. Und insbesondere gilt:
Inst(X) erfüllbar ⇐> I^{-1}_{φ} (Inst(X)) erfüllbar.

Was ist der Unterschied / der Zusammenhang zwischen der Prädikatenlogik mit und ohne Gleichheit?

Der Unterschied ist das in jeder T-Struktur der Prädikatenlogik mit Gleichheit eingeführte 2 stellige Prädikat „=“.
Die Prädikatenlogik mit Gleichheit ist ausdrucksstärker als die Prädikatenlogik ohne Gleichheit.
Die Syntaxdefinition unterscheidet sich nur in dem in der T-Struktur definierten I, dass zwingend das Prädikat „=“ enthalten muss.
In der Semantik der Prädikatenlogik mit Gleichheit werden später nur solche T-Strukturen betrachtet, die „=“ enthalten.

PL1 mit Gleichheit: Kann man die Gleichheit nicht auch durch eine Formel ausdrücken?

Nein, man kann nur die Kongruenzrelation durch die Formel K_t charakterisieren.

Was ist denn eine Kongruenzrelation?

Es sei Äq Teilmenge der Prädikatenlogischen Formeln zu einer Struktur T definiert durch
Äq := { ∀x0 x0=x0, ∀x0∀x1∀x2(x0=x1 und x0=x2 -> x1=x2)}
Für R aus I sei a(R) aus der Menge der prädikatenlogischen Formeln definiert durch:
A(R) := „∀x1∀x2…∀x2μ(R) (x1 = xμ(R)+1 und x1 = xμ(R)+2 und .. und xμ(R) = x2μ(R) und R(x1,x2,..xμ(R)) -> R(xμ(R)+1, xμ(R)+2,… x2μ(R)))“
Für f aus J sei a(f) Element der prädikatenlogischen Formeln definiert durch
a(f) := „∀x1∀x2…∀x2μ(f) (x1 = xμ(f)+1 und x1 = xμ(f)+2 und .. und xμ(f) = x2μ(f) -> f(x1,x2,..xμ(f)) = f(xμ(f)+1, xμ(f)+2,… x2μ(f)))“
Es sei Kt die Teilmenge aus PF die definiert wird durch:
Kt := {Äq U {a(R) | R aus I} U { a(f) | f aus J}
Für eine T-Struktur S heisst die Relation P= Teilmenge aus S X S Kongruenzrelation in S genau dann wenn S ein Modell von Kt ist.

S ist also ein Modell von Äq U {a(R)} genau dann, wenn Q eine Äquivalenzrelation ist und äquivalenten Elemente sich bzgl. Pr gleich verhalten (also unterscheidbar sind). Weiter ist S ein Modell von Äq U { a(f)} , genau dann, wenn = eine Äquivalenzrelation ist und äquivalente Argumente unter gf äquivalente Resultate liefern. Damit ist Q eine Kongruenzrelation in S genau dann, wenn Q eine Äquivalenzrelation ist und die Prädikate und Funktionen in S mit Q „verträglich“ sind.

Faktorisierung einer Struktur. (Zusammenfassen der jeweils äquivalenten Elemente zu Äquivalenzklassen)

Durch Zusammenfassen der jeweils bzgl. einer Kongruenzrelation Q ununterscheidbaren Elemente einer T-Struktur S zu Klassen erhält man eine neue T-Struktur S/Q die Faktorisierung von S nach Q.
S/Q := (S/Q, P/Q, g/Q)
Dabei ist
S/Q := { π(a) := {b aus S | Q(a,b)} | a aus S}
(P/Q)R (π(a1), π(a2), …, π(μ(R))) :⇐> PR (a1,a2, …, aμ(R)) für alle R aus I, und ai aus S
(g/Q) f (π(a1), π(a2), …, π(μ(R))) := π gf (a1,a2, …, aμ(R)) für alle f aus J, und ai aus S
Damit ist S/Q die Menge der Äquivalenzklassen.

Für die Gültigkeit von Formeln a aus S und S/Q gilt:

Bel S/Q = {πσ | σ aus BelS}
S |= a(σ) genau dann, wenn S/Q |= a(πσ) für alle a aus PF und σ aus BelS

Wie kommen wir nun zu einer T-Struktur mit Gleichheit?
Durch Äquivalenzklassenbildung bei der Faktorisierung

Wo liegt der Unterschied zwischen den beiden Logiken?
Faktorisierung

Zusammenhang erfüllbarkeit in Prädikatenlogik mit und ohne Gleichheit?
Für eine Teilmenge X der prädikatenlogischen Formeln zu einer T-Struktur gilt:
X ist = - erfüllbar, genau dann, wenn X U Kt erfüllbar ist.

Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik mit Gleichheit
Es sei X Teilmenge PF und a aus PF. Dann gilt:
Die Menge X ist =-erfüllbar, genau dann, wenn Y =-erfüllbar ist für jede endliche Teilmenge Y von X
X |= = a ⇐> es gibt eine endliche Teilmenge Y von X mit Y |= = a

Rekursive-Aufzählbarkeit kann ebenfalls auf die Prädikatenlogik mit Gleichheit übertragen werden.

Was ist ein Kalkül?
Ein Kalkül ist eine Relationalstruktur K := (W(Σ), R) über eine Signatur v: H->IN wobei Σ ein Alphabet und H eine Indexmenge ist.
Falls v(i) = 0 (also Ri Teilmenge von W(Σ)) gilt, heißt Ri Axiomenschema und jedes w aus Ri heißt Axiom. Falls v(i)>0 ist, heißt Ri Regelschema und jedes Element r aus Ri Regel.
Statt (v1,v2,,,,,vv(j), v) aus Rj schreibt man auch
<u>v1,v2,…vv(j)</u>
v
und liest von v1,v2,…vv(j) darf man nach v übergehen.

Für ein Kalkül K heißt Kx die Erweiterung des Kalküls K um die Voraussetzungen X (X Teilmenge W(Σ)).Mit der Signatur vX:Hx->IN wobei
Hx := H U {H}
vX(i) := v(i) für i aus H und 0 für i=H
RXi := Ri falls i aus H und X falls i=H

Ein Beweis eines Wortes w aus der Menge X im Kalkül K ist eine Ableitung (w1,w2,..,wv(j),w) von w in Kx.
Das Wort w heißt in K aus X beweisbar ($X|-_K$ w), genau dann, wenn w Element des Erzeugendensystems von Kx ist.

Entscheidbarkeit von Kalkülen (Kompaktheitssatz für Kalküle)
Es sei K:= (W(Σ), R) ein Kalkül über eine Signatur v: H->IN. Es sei H endlich und Ri Teilmenge der $W(\Sigma)^{v(i)+1}$ eine rekursive Worttupelmenge für jedes i aus H. Dann gilt:
(1) Die Menge der Ausdrücke „{v1,v2,..,vn};(w1,w2,…,wn)“ so dass (w1,w2,…,wn) ein Beweis des Wortes w aus der Menge {v1,v2,..,vn} ist, ist entscheidbar.
(2) Die Menge der zutreffenden Ausdrücke {v1,v2,..,vn}|- w ist rekursiv aufzählbar.
(3) Falls die Teilmenge X von W(Σ) rekursiv-aufzählbar ist, ist auch {w| X |- w} rekursiv-aufzählbar.
(4) Die Menge {w| {} |- w} ist rekursiv-aufzählbar.
(5) Die Relation |- erfüllt den Kompaktheitssatz: Für alle Teilmengen X von W(Σ) gilt: X|- w genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge Y von X gibt mit Y|-w

Definition des Kalküls der Prädikatenlogik 1.Stufe?
Sei ΣP das Alphabet der Prädikatenlogik. Es sei T ein Typ und PF := PFT und Tm = TmT. Ein Kalkül K=(W(ΣP), R) der Signatur v: H->IN sei wie folgt definiert:
H:= {1,2,3,4,5,6}, v(1)=v(2)=v(3)=0 und v(4)=v(5)=1 und v(6)=2
R1 := {prädikatenlogischen Interpretationen der Aussagenlogik Iφ(a) | φ:AS->PF, a ist aussagenlogische Tautologie}
R2 := {Für alle xa impliziert die Substitution von x nach t in a| a Element PF, x Element Var, t Element Tm frei für x in a}
R3 := { die Substitution von x nach t in a impliziert es gibt xa | a Element PF, x Element Var, t Element Tm frei für x in a}

R4 := {a impliziert b, a impliziert für alle xb | a,b Element PF, x Element der Var ohne die Freien Variablen von a} Teilmenge PF2 [kritische Generalisierung]
R5 := {a impliziert b, Es gibt xa impliziert b | a,b Element PF, x Element der Var ohne die Freien Variablen von b} Teilmenge PF2 [kritische Partikularisierung]
R6 := {a, a impliziert b, b | a,b Element PF} Teilmenge PF3 [Modus Ponens]

Die Mengen R1,R2 und R3 enthalten die Axiome und die Mengen R4,R5 und R6 die Regeln des Kalküls.

Jedes Element von R1 U R2 U R3 ist allgemeingültig.

Was erzeugt das Kalkül der Prädikatenlogik?
alle allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik

Korrektheit und Vollständigkeit des Prädikatenkalküls K?
Sei X Teilmenge PF und a eine Prädikatenlogische Formel, dann gilt:
(1) X |- a => X|=a [Korrektheit]
(2) X |= a => X|- a [Volständigkeit]

Was bedeutet Korrektheit und Vollständigkeit des Kalküls?
Jede im Kalkül K beweisbare Konsequenz ist auch eine logische Konsequenz [Korrektheit]. Und jede logische Konsequenz ist auch in K beweisbar. [Vollständigkeit]

Welcher Satz beweist das “alle” in alle allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik?
Vollständigkeitssatz

Wie wurde der Vollständigkeitssatz bewiesen ?
über die Einführung von Herbrand-Strukturen

Nennen Sie mir noch ein weiteres Beispiel für ein Kalkül?
Verifikationskalkül für schleifenfreie Programme

Wie ist das Verifikationskalkül Kv für die Programmiersprache P definiert?
Es sei H:={Zuw, Komp, Verz, Kons} und v: H ->IN die Signatur mit v(Zuw):=0, v(Komp)=v(Verz):=2 und v(Kons)=3. Ein Kalkül Kv=(W(Σ),R) der Signatur v sei wie folgt definiert:
RZuw := {„{Subtx(a)}x := t{a}“ | a Element PF, x Element Var, t Element Tm frei für x in a}
[Axiomenschema der Zuweisungen]
RKomp := die Menge aller
<u>{a}P1{b},{b}P2{c}</u>
{a}(P1,P2){c}
für alle a,b,c aus PF und P1,P2 aus P
[Menge der Kompositionsregeln]
RVerzw := die Menge aller
<u>{a∧p}P1{b},{a∧¬p}P2{b}</u>
{a}if p then P1 else P2 fi{b}
für alle a,b aus PF, p quantorenfreie Prädikatenlogische Formel und P1,P2 aus P.
[Menge der Verzweigungsregeln]
RKons := die Menge aller
<u>a→c, {c}P{d}, d→b</u>
{a}P{b}
mit a,b,c,d Element PF, P Element P.
[Menge der Konsequenzregeln]

Syntax und Semantik von Korrektheitsformeln:
(1) Definiton Korrektheitsformel KF (Syntax):
KF := { {a}P{b} | a,b Element PF, P logisches Programm} heißt Menge der Korrektheitsformeln. dabei heißt a die Vorbedingung und b die Nachbedingung von P.
(2) Semantik (Bedeutung)
Sei S eine T-Struktur und {a}P{b} eine Korrektheitsformel, σ eine Belegung der Variablen über S. Wir sagen dass {a}P{b} unter S gilt (S|={a}P{b}(σ)) genau dann, wenn S (a) (σ) => b(B(P)(σ))-
Analog zur Prädikatenlogik sagen wir, dass {a}P{b} in S gilt bzw. dass P bzgl. der Vorbedingung a und der Nachbedingung b korrekt ist, genau dann, wenn S|={a}P{b}(σ) für alle Belegungen σ der

Variablen über S.

Für X Teilmenge aus PF und {a}P{b} aus KF heißt {a}P{b} logische Folgerung von X (X |= {a}P{b} genau dann, wenn S |= {a}P{b} für alle Modelle S von X.

Wie ist ein Programm definiert?

Die Menge P der Programme ist wie folgt als Erzeugnis definiert:

- Für alle x Element Var ist die Zuweisung „x:= t“ ein Programm.
- Sind P1 und P2 Programme und p eine Quantorenfreie Formel der Prädikatenlogischen Formeln, dann sind auch die Komposition „(P1,P2)“ und die bedingte Verzweigung „if p then P1 else P2 fi“ Programme.
- Keine weiteren Zeichenreihen sind Programme.

Semantik von Programmen:

Die Form der Definition liefert eine Peano-Algebra, deren Erzeugnis P ist; Deshalb kann die Semantik der Programme rekursiv über ihren Aufbau definiert werden. Dafür stellen wir uns vor, dass ein Programm eine Zustandstransformation durchführt. D.h. Ein Programmzustand ist eine Belegung der Variablen über eine Struktur S, in der die durch das Programm gegebenen Berechnungen ausgeführt werden, gegeben denken. *Bel*: {σ|σ: Var -> S} , so ist die Bedeutung eines Programmes P. B(P): *Bel* -> *Bel.*

B: P-> (*Bel* -> *Bel*) ist rekursiv definiert durch:

B (x:=t) = σ[x/W(t)(σ)]

B („(P1,P2)“) = B(P1)°B(P2)

B (if p then P1 else P2 fi) (σ)= B(P1)(σ) für WW(p)(σ)=1 und B(P2) (σ) sonst.

Wie ist die deklarative Semantik definiert?

Was ist eine Theorie?

Theorien sind zusammenfassungen spezieller Formelmengen. Z.B. des Modells der natürlichen Zahlen oder die Gruppenaxiome)

Sei X Teilmenge PF.

(1) X heißt widerspruchsfrei oder konsistent, genau dann, wenn für alle Formeln a aus PF gilt: ¬(X |= a und X|= ¬a) d.h. aus X folgt kein Widerspruch
(2) X heißt Theorie, genau dann, wenn X widerspruchsfrei ist und für alle a aus PF gilt: X |= a ⇒ a aus X.

Eine Theorie Th heißt vollständig, genau dann, wenn für alle a aus Aussagen (geschlossene Formeln) gilt a oder ¬a ist Element von Th.

Wie kann man Theorien erzeugen?

T- Struktur und Formelmenge

Nennen Sie Beispiele! Wie werden diese erzeugt?

Theorie von N (Artihmetik)

Sei T = ({ <,=}, {0,1,+, *}) ein Typ mit μ(<)=μ(=) = μ(+) = μ(*) = 2 und μ(0)=μ(1)=0. Sei ferner N die T-Struktur (IN, {(<, <IN),(=, =IN)}, {(0,0IN),(1,1IN),(+,+IN), (*, *IN)}

Dann ist Th(N) := { a aus PFT | N |= a} die Theorie von N, die auch Arithmetik genannt wird.

Gruppenaxiome

Sei T = ({=}, { e,°)} ein Typ mit μ(=)=μ(°)=2 und μ (e)=0. Seien x,y,z aus Var und sei die Menge der Gruppenaxiome GA Teilmenge von PF. Wobei GA aus folgenden Formeln besteht:

∀x∀y∀z (x°y)°z = x°(y°z)

∀x e°x = x

∀x∃y y°x = e

Dann heißt Gr Th := { a aus PFt | GA |= a} die Gruppentheorie.

Was muss für die Axiome gelten?

Widerspruchsfrei

Ist die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln eine Theorie?

Ja. Die Menge der Konsequenzen einer widerspruchsfreien Menge ist eine Theorie, und die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln ist die Menge der Konsequenzen der leeren Menge (die offensichtlich widerspruchsfrei ist).

Sind Strukturen durch eine Theorie festzulegen? (andersherum: Legen Theorien von Strukturen diese eindeutig fest?)
Legt eine Formelmenge die Struktur eindeutig fest? Kann man eine Struktur durch Formeln festlegen?

Nicht immer, z.B. die Struktur der natürlichen Zahlen. nach dem Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik gilt: Th(N) vereinigt mit {(Ex x)(x>0), (Ex x)(x>0 und x>1), (Ex x)(x>0 und x>1 und x>3), ...} ist erfüllbar für jede endliche Teilmenge, denn N ist ein Modell. Daher ist die ganze Menge erfüllbar aber in einem Modell von ihr gibt es ein Element, das größer als alle nat. Zahlen ist, also ist N kein Modell.

1.Gödelscher Unvollstänigkeitssatz (nicht axiomisierbarkeit von Theorien.)

Eine Theorie heißt (rekursiv) axiomatisierbar, genau dann, wenn es eine rekursive Menge von sog. Axiomen X aus PF gibt, mit T= Kons(X) = { a aus PF | X |=a }. Jede axiomatisierbare Theorie ist nach Satz 3.8.11 rekursiv-aufzählbar. Umgekehrt ist auch jede rekursiv-aufzählbare Theorie axiomatisierbar.

Jetzt ist aber Th(N) nicht rekursiv-aufzählbar, geschweige den entscheidbar, denn Th(N) ist natürlich vollständig. Umgekehrt ist jede axiomatisierbare Theorie T Teilmenge von Th(N) notwendig unvollständig, denn sonst wäre T= Th(N) rekursiv. ⇒ Einschränkung der Möglichkeit die Gültigkeit arithmetischer Sätze zu entscheiden.

2.Gödelscher Unvollständigkeitssatz (Unmöglichkeit des Konsistenzbeweises)

Wegen des Korrektheits und Vollständigkeitssatzes ist ein Theorie T konsistent (widerspruchsfrei), genau dann, wenn es kein a in PF gibt, so dass sowohl T |- a als auch T |- nicht a gilt. (Letztere Aussage sei mit x bezeichnet.) Sofern T widerspruchsfrei ist, kann aber nicht aus T |- x(T) gefolgert werden.

Definition Hornklauselform / Logikprogramm?

Ist b eine prädikatenlogische Formel in Klauselform und tritt in jedem Konjunktionsglied der Matrix von b höchstens ein a aus der Menge der Prädikatenlogischen Primformeln vom Typ T (PAT) nicht negiert auf, dann heißt b in Hornklauselform.
Eine Hornklausel ist eine Formel aus PF von einer der folgenden Arten:
a oder nicht b1 oder nicht b2 oder …. Oder nicht bn (In PROLOGSyntax: „a:-b1,..,bn“)
a (In PROLOG-Syntax “a:- “)
nicht b1 oder nicht b2 oder … oder nicht bn (In PPROLOG-Syntax „:- b1,…bn“)
⊥ (In PROLOG-Syntax „:- „)
Dabei seien a, b1, ..,bn von ⊤ und ⊥ verschieden atomare Formeln n >= 1.
Hornklauseln der 1. und 2. Form heißen Programmklauseln
Hornklauseln der 3. und 4. Form heißen Zielklauseln
„:-„ heißt leere Klausel

Welche Funktionen können mit Logikprogrammen berechnet werden

alle berechenbaren Funktionen; Verweis auf den Zusammenhang mit Registermaschinen

Definition deklarative Semantik?

Eine Funktion B, die jedem Logik-Programm P und jeder Zielklausel Γ:= „:- c1,c2,..,cn“ eine Menge von Spezialfällen c1 und c2 und …und cn zuordnet, heißt deklarative Semantik der Logik-Programme und sei wie folgt definiert:
B (P. Γ) := (v(c1 und c2 und … und cn) | v ist eine Spezialisierung mit P|= v(c1 und c2 und.. und cn)}

Definition Spezialisierung?

Eine Spezialisierung ist eine Abbildung v: Tm U QfrPF -> Tm U QfrPF mit folgender Eigensschaft: Es gibt n aus IN und paarweise verschiedene Variablen x1, .. xn und Terme t1, .. tn aus TM, so dass
v(c) = Sub x1..xn durch t1 ..tn (c) für alle c aus Tm U QfrPF gilt. Schreibweise: [x1/t1, x2/t2…xn/tn] := v. Die identische Spezialisierung wird mit [] bezeichnet.

Unifikator (aus der Welt der Logik Programme)?

Sei A Teilmenge von Tm U QfrPF eine endlich und nicht leere Menge atomarer Formeln oder Terme eines Typs T. Eine Spezialisierung v heißt Unifikator von A, falls v(A) einelementig ist. Eine Menge A heißt unifizierbar, wenn es einen Unifikator von A gibt.

Was versteht man unter einem allgemeinsten Unifikator?

Ein Unifikator w von A heißt allgemeinster Unifikator von A, genau dann, wenn es zu jedem Unifikator v von A eine Spezialisierung v’ gibt mit v = v’w
Ein allgemeinster Unifikator w von A liegt also genau dann vor, wenn jeder andere Unifikator v von A zumindest die Ersetzungen vornimmt, die auch durch w gegeben sind.

Gibts immer einen Unifikator? Kennen sie den Begriff Unifikation?

Es gibt einen Algorhithmus (SLD-Resolution), der bei Eingabe einer endlichen Primformelmenge A entscheidet, ob A unifizierbar ist und bei positiver Antwort einen allgemeinsten Unifikator von A berechnet. Insbesondere hat damit jede unifizierbare Primformelmenge einen allgemeinsten Unifikator.

SLD-Resolution (SLD = Linear resolution with Selection function for definite clauses)

Mit der SLD-Resolution kann die Unerfüllbarkeit für Logikprogramme und Zielklauseln hergeleitet werden. Hierzu wird die Zielklausel Γ mit Hilfe von P schrittweise zu neuen Zielklauseln umgeformt. Erhält man schließlich die leere Klausel, so heißt die Berechnung erfolgreich. In diesem Fall ist die Unerfüllbarkeit nachgewiesen. Als zusätzlich Information liefert die die Berechnung eine Spezialisierung v, so dass P |= v(c1,c2,..,cn) gilt.
Das Verfahren erlaubt zu jedem Programm P und zu jeder Zielklausel i.a. viele Berechnungen, ist also nichtdeterministisch. Es ist aber in soweit vollständig, als das es wenn P |= v(c1,c2,..,cn) gilt es eine erfolgreiche Berechnung gibt die dies belegt.