1827 Logik für Lehramt
Klausur vom 03. April 2004

Es müssen Ihnen 9 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 2 Blätter mit 7 Aufgaben,
- 4 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie drei Stunden Zeit. Die Klausur gilt als bestanden, wenn Sie mindestens 24 der möglichen 60 Punkte erreichen (das sind 40 %).

Die Benutzung von **Hilfsmitteln** (z. B. Kurstext) ist **nicht** erlaubt!

Füllen Sie zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus und, falls gewünscht, die Bescheinigung für das Finanzamt. Schreiben Sie später auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte – beginnend mit dem Deckblatt und möglichst nach Aufgaben sortiert – zusammen.

Schreiben Sie Ihre Lösungen bitte *nicht mit Bleistift* auf!

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.

Wir senden Ihnen die korrigierten Klausuren so schnell wie möglich, voraussichtlich innerhalb von vier Wochen, zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*
Tranformieren Sie die aussagenlogische Formel

$$\alpha = \neg((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \rightarrow \neg\neg C))$$

in eine Formel β, die äquivalent zu α ist und in Negations–Normalform vorliegt. (Dabei sind $A, B, C \in \mathrm{AS}$ paarweise verschieden.)

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*
Es sei $X \subseteq \mathrm{AF}$ eine Menge aussagenlogischer Formeln. Beweisen Sie:

$$\mathrm{Erf}(X) = \bigcap_{\alpha \in X} \mathrm{Erf}(\alpha).$$

Aufgabe 3 *(8 Punkte)*
Es sei τ ein Typ. Beweisen Sie:

Jede prädikatenlogische Formel $\alpha \in \mathrm{PF}_\tau$ endet mit „)“.

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*
Es sei $\tau = (\{P\}, \{f, g\})$ ein Typ mit

$$\mu(P) = 2,\ \mu(f) = 0 \text{ und } \mu(g) = 1.$$

Es sei eine τ–Struktur $\mathcal{S}$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{S} := (\mathbb{R}, \{(P, \leq)\}, \{(f, 1), (g, \sin)\}),$$

wobei $1 \in \mathbb{R}$, $\leq \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die üblichen Bedeutungen haben. Ferner sei

$$\alpha := P(g(x), f_1()) \wedge \exists y \big[(P(f_1(), y) \wedge P(x, g(y))) \big] \in \mathrm{PF}_\tau;$$

hierbei seien x, y verschiedene Variablen. Schließlich sei $\mathfrak{b} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Belegung mit

$$\mathfrak{b}(x) = 1.$$

Bestimmen Sie unter strikter Anwendung der Semantikdefinition für die Prädikatenlogik

$$\mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\alpha)[\mathfrak{b}].$$

Aufgabe 5 *(9 Punkte)*
Es sei τ der Typ

$$\tau := (\{\mathtt{RR00}\}, \{\mathtt{ff}, \mathtt{ff0}\}).$$

Wir schreiben abkürzend

$$R := \mathtt{RR00}, \quad c := \mathtt{ff}, \quad f := \mathtt{ff0}.$$

Ferner sei $S : U_\tau \longrightarrow U_\tau$ definiert durch $t \mapsto f(t)$ für alle $t \in U_\tau$, und

$$A := \{(t, S(t)) \mid t \in U_\tau\}.$$

Damit definieren wir die Herbrand–Struktur

$$\mathcal{H} := (U_\tau, \{(R, A)\}, \{(c, c()), (f, S)\}).$$

Geben Sie eine nicht allgemein gültige Formel $\alpha \in \mathrm{PF}_\tau$ derart an, dass $\mathcal{H}$ ein Herbrand–Modell von α ist. (Begründen Sie!)

Aufgabe 6 *(9 Punkte)*
Der in dieser Aufgabe zu Grunde gelegte (rekursive) Typ τ enthalte einen zweistelligen Relationsbezeichner R. Zeigen Sie mit Hilfe des im Beweis des *Hauptsatzes 3.7.3* angegebenen Verfahrens, dass

$$\alpha := R(x, y) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y)$$

eine allgemein gültige τ–Formel ist, wobei x, y zwei verschiedene Variablen seien.

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*
Es sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) := \sum_{i=0}^{n} i \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Geben Sie ein Logik–Programm an, das die Funktion f berechnet. (Tipp: Sie dürfen dabei ein Logik–Programm, das die Addition berechnet, benutzen.)

Anhang

Definition [Negations–Normalform]
Es sei $\alpha \in \mathrm{AF}$ eine Formel. Wir sagen genau dann, dass α in *Negations–Normalform* vorliegt, wenn für alle $\beta \in \mathrm{AF}$ gilt:

ist $\neg\beta$ Teilformel von α, so ist $\beta \in \mathrm{AS}$.

Definition [Erfüllungsmenge]
Es sei $X \subseteq \mathrm{AF}$ eine Formelmenge und $\alpha \in \mathrm{AF}$ eine Formel.

Die Menge

$$\mathrm{Erf}(X) := \{\sigma \in \mathrm{BEL} \mid \mathrm{AW}_\sigma(\beta) = 1 \text{ für alle } \beta \in X\}$$

heisst *Erfüllungsmenge* von X. Im Falle $X = \{\alpha\} \subseteq \mathrm{AF}$ schreiben wir $\mathrm{Erf}(\alpha) := \mathrm{Erf}(\{\alpha\})$.

Definition [Alphabet und Bezeichner der Prädikatenlogik]

1. Die Menge $\Sigma_P := \{\mathtt{v}, \mathtt{R}, \mathtt{f}, \mathtt{0}, (,), ,, \neg, \wedge, \forall, \exists\}$ ist das *Alphabet der Prädikatenlogik.*

2. (a) Die Menge

   $$\mathcal{V} := \{\mathtt{v0}^n \mid n. \in \mathbb{N}\}$$

   heißt Menge der *Individuenvariablen*, kurz *Variablen.*

   (b) Es sei

   $$\mathfrak{R} := \{\mathtt{R0}^n\mathtt{R0}^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

   $\mathfrak{R}$ heißt Menge der *Relations–* oder *Prädikatsbezeichner.*

   (c) Es sei

   $$\mathfrak{F} := \{\mathtt{f0}^n\mathtt{f0}^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

   Wir nennen $\mathfrak{F}$ die Menge der *Funktionsbezeichner.*

3. Es sei die Funktion

   $$\mu : \mathfrak{R} \cup \mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{N}$$

   definiert durch $\mu(\mathtt{R0}^n\mathtt{R0}^m) := m$ und $\mu(\mathtt{f0}^n\mathtt{f0}^m) := m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. μ heißt *Stellenzahlfunktion*, $m = \mu(w)$ *Stelligkeit* des (Prädikats–, Funktions–) Bezeichners $w \in \mathfrak{R} \cup \mathfrak{F}$.

Definition [prädikatenlogische Formeln]
Es sei $\tau = (\mathcal{R}, \mathcal{F})$ ein Typ.

1. Die Menge

$$\mathrm{AT}_\tau := \{P(t_1, \ldots, t_{\mu(P)}) \mid P \in \mathcal{R},\ t_1, \ldots, t_{\mu(P)} \in \mathrm{Tm}_\tau\} \subseteq {\Sigma_P}^*$$

heißt Menge der *prädikatenlogischen Primformeln* oder *Atome vom Typ* τ.

2. Die Menge $\mathrm{PF}_\tau \subseteq {\Sigma_P}^*$ aller *prädikatenlogischen Formeln vom Typ* τ ist wie folgt definiert:

   - $\mathrm{AT}_\tau \subseteq \mathrm{PF}_\tau$.
   - $\{\neg\,\alpha, (\alpha \wedge \beta)\} \subseteq \mathrm{PF}_\tau$, falls $\{\alpha, \beta\} \subseteq \mathrm{PF}_\tau$.
   - Für alle $x \in \mathcal{V}$ ist $\{\forall x\alpha, \exists x\alpha\} \subseteq \mathrm{PF}_\tau$, falls $\alpha \in \mathrm{PF}_\tau$.
   - Keine weiteren Zeichenreihen über Σ_P sind Elemente von PF_τ.

Definition [Semantik der Prädikatenlogik]
Es sei $\tau = (\mathcal{R}, \mathcal{F})$ ein Typ und $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (S, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{F})$ eine τ–Struktur.

1. Die Abbildung

$$\mathrm{W}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}} : \mathrm{Tm} \longrightarrow (\mathrm{Bel}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \longrightarrow S)$$

sei rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(x)(\mathfrak{b}) &= \mathfrak{b}(x) \\ \mathrm{W}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}}\left(f(t_1, \ldots, t_{\mu(f)})\right)(\mathfrak{b}) &= \boldsymbol{F}_f\left(\mathrm{W}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(t_1)(\mathfrak{b}), \ldots, \mathrm{W}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(t_{\mu(f)})(\mathfrak{b})\right), \end{aligned}$$

für alle Variablen $x \in \mathcal{V}$, Terme $t_1, \ldots, t_{\mu(f)} \in \mathrm{Tm}$, Funktionsbezeichner $f \in \mathcal{F}$ und Belegungen $\mathfrak{b}$ der Variablen über $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Man nennt dann $\mathrm{W}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(t)(\mathfrak{b})$ den *Wert* des Terms t *in der Struktur* $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ *unter der Belegung* $\mathfrak{b}$.

2. Sei die Abbildung

$$\mathrm{WW}_{\mathcal{S}} : \mathrm{PF} \longrightarrow (\mathrm{Bel}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \{0,1\})$$

bestimmt durch

$$\begin{array}{c} \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}\left(P(t_1,\ldots,t_{\mu(P)})\right)(\mathfrak{b}) = 1 \\ \Longleftrightarrow \\ \boldsymbol{R}_P\left(W_{\mathcal{S}}(t_1)(\mathfrak{b}),\ldots,\mathrm{W}_{\mathcal{S}}(t_{\mu(P)})(\mathfrak{b})\right), \end{array}$$

für alle $P \in \mathcal{R}$, $t_1,\ldots,t_{\mu(P)} \in \mathrm{Tm}$ und $\mathfrak{b} \in \mathrm{Bel}_{\mathcal{S}}$, sowie durch die Rekursionsbedingungen

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\neg\,\alpha)(\mathfrak{b}) = 1 & \Longleftrightarrow & \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\alpha)(\mathfrak{b}) = 0 \\ \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\alpha \wedge \beta)(\mathfrak{b}) = 1 & \Longleftrightarrow & \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\alpha)(\mathfrak{b}) = 1 \text{ und } \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\beta)(\mathfrak{b}) = 1 \\ \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\forall x\alpha)(\mathfrak{b}) = 1 & \Longleftrightarrow & \text{für alle } a \in S : \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\alpha)(\mathfrak{b}[x/a]) = 1 \\ \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\exists x\alpha)(\mathfrak{b}) = 1 & \Longleftrightarrow & \text{es gibt } a \in S : \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\alpha)(\mathfrak{b}[x/a]) = 1, \end{array}$$

die für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{PF}$, $x \in \mathcal{V}$ und $\mathfrak{b} \in \mathit{Bel}_{\mathcal{S}}$ gelten mögen. Man nennt dann $\mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\gamma)(\mathfrak{b})$ den *Wahrheitswert* der Formel γ *in der Struktur* $\mathcal{S}$ *unter der Belegung* $\mathfrak{b}$.

3. Es sei $\gamma \in \mathrm{PF}$ eine Formel und $\mathfrak{b} \in \mathrm{Bel}_{\mathcal{S}}$ eine Belegung. Man schreibt auch

$$\mathcal{S} \models \gamma[\mathfrak{b}] \text{ statt } \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\gamma)(\mathfrak{b}) = 1$$

und sagt: γ *gilt in* $\mathcal{S}$ *unter* $\mathfrak{b}$. Entsprechend schreibt man

$$\text{statt } \mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(\gamma)(\mathfrak{b}) = 0 \text{ auch } \mathcal{S} \not\models \gamma[\mathfrak{b}]$$

und sagt: γ *gilt nicht* in $\mathcal{S}$ unter $\mathfrak{b}$.

Definition [Herbrand–Strukturen]
Es sei $\tau = (\mathcal{R}, \mathcal{F})$ ein Typ mit $\mu(f) = 0$ für mindestens ein $f \in \mathcal{F}$.

1. Es sei U_τ, die Menge der *Grundterme* von τ, definiert durch

   $$U_\tau := \{t \in \mathrm{Tm}_\tau \mid \mathrm{Vk}(t) = \emptyset\}.$$

   U_τ heißt auch das *Herbrand–Universum* von τ.

2. Eine *Herbrand–Struktur* über τ ist eine Struktur

   $$\mathcal{H} = (U_\tau, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{H}),$$

   so dass

   $$\boldsymbol{H}_f(t_1, \ldots, t_{\mu(f)}) = f(t_1, \ldots, t_{\mu(f)})$$

   für alle $f \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_{\mu(f)} \in U_\tau$ gilt.

Logik–Programm für die Addition:

```
Add(x,0,x)          :-
Add(x,s(y),s(z))    :-  Add(x,y,z),
```

wobei s die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen repräsentiert.