Semiquadratische Algebren

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
im Fachbereich Mathematik der
FernUniversität
Gesamthochschule
in Hagen
vorgelegt von
Frank Rosemeier
aus Düsseldorf

Hagen 2002

Tag der Abgabe:	12. März 2002
Tag der mündlichen Prüfung:	26. April 2002
Erster Gutachter:	Prof. Dr. H. P. Petersson, FernUniversität Hagen
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. R. Börger, FernUniversität Hagen

Inhalt

Einleitung

Den Anstoß zu dieser Arbeit gaben bekannte Resultate von Petersson über *Quasi-Kompositionsalgebren*, das sind nicht-assoziative Algebren mit einer multiplikativen quadratischen Form, deren Bilinearisierung schwach nicht-ausgeartet ist. (Bei *Kompositionsalgebren* wird zusätzlich die Existenz eines Einselementes verlangt.) Er beweist folgende Aussage [Pe71, Prop. 2].

> Eine zweidimensionale Quasi-Kompositionsalgebra A über einem Körper k ist entweder eine Kompositionsalgebra, oder es gibt auf dem zu A gehörenden k-Vektorraum eine zweidimensionale Kompositionsalgebra C mit Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$, so dass die Multiplikation $(x, y) \mapsto x * y$ von A durch eine der folgenden Gleichungen gegeben wird.
>
> (a) $x * y = \overline{x} \cdot y$.
>
> (b) $x * y = x \cdot \overline{y}$.
>
> (c) $x * y = u \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}$ für ein festes $u \in A$ mit $q(u) = 1$, wobei q die (nach [Pe71, Prop. 1] eindeutige) quadratische Form von A bezeichnet.
>
> Hierbei ist $J : C \longrightarrow C,\ x \mapsto \overline{x}$ die Standardinvolution von C.

Die Algebren vom Typ (c) sind kommutativ und erfüllen die Identität

$$(x * y) * x = q(x)\, y = x * (y * x).$$

Sie wurden von Petersson systematisch untersucht (siehe [Pe69]) und werden heute *Petersson-Algebren* genannt, vgl. [KnMeRoTi98] § 34.B, p. 466ff. Zu untersuchen bleiben die Algebren vom Typ (a). (Der Fall (b) ergibt sich daraus durch Übergang zur entgegengesetzten Algebra C^{op}.)

Für die neue Multiplikation $x * y := \overline{x} \cdot y$ gelten in Kompositionsalgebren beliebiger Dimension folgende Identitäten:

(SQ1) $\quad (x * x) * (y * z) = ((x * x) * y) * z,$

(SQ2) $\quad (x * x) * (y * z) = y * ((x * x) * z),$

(SQ3) $\quad (x * x) * (y * z) = (z * y) * (x * x),$

(SQ4) $\quad (x * x) * (y * y) = (x * y) * (x * y).$

Die Multiplikativität der quadratischen Form wird hierbei nur zum Nachweis von (SQ4) benötigt, (SQ1) und (SQ2) gelten sogar für beliebige *quadratische Algebren* (nicht-assoziative Algebren, in denen $x^2 - t(x)\, x + n(x)\, 1 = 0$ für alle x gilt mit einer Linearform t und einer quadratischen Form n; dies ist in jeder Kompositionsalgebra der Fall). Um (SQ3) zu zeigen wird zusätzlich verlangt, dass die kanonische Konjugation der quadratischen Algebra ein *Antihomomorphismus* ist, also $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$ gilt.

Weil recht bald deutlich wurde, dass sich für nicht-assoziative Algebren mit den Identitäten (SQ1) und (SQ2) bereits wesentliche Strukturaussagen gewinnen lassen, konzentriere ich mich in der vorliegenden Arbeit auf die Untersuchung von Algebren, deren Multiplikation $*$ diesen beiden Bedingungen genügt. Wegen ihrer engen Beziehung zu quadratischen Algebren sollen sie *semiquadratische Algebren* genannt werden.

Die hier präsentierte Theorie semiquadratischer Algebren ist *konstruktiv* in dem Sinne, dass bei ihrer Entwicklung auf Verwendung des Auswahlaxioms verzichtet werden kann, ebenso auf Benutzung des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten. Das hat den Vorteil, dass die erhaltenen Resultate bei Bedarf auch programmiert (und so mit Hilfe eines Computers berechnet) werden könnten. Einige Bemerkungen zum konstruktiven Ansatz finden sich im Anhang B während Anhang C beispielhaft zeigt, wie bei der Arbeit mit dem Computerprogrammes `Albert`, das Berechnungen in nicht-assoziativen Algebren gestattet, eine interessante Frage auftritt, die freie semiquadratische Algebren mit einem Erzeugenden betrifft.

Inhaltsübersicht

Nach einem kurzen Vorspann zur *Einführung* der in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen und Vereinbarungen werden in den ersten drei Abschnitten die erforderlichen Grundbegriffe bereitgestellt (nämlich *quadratische Abbildungen* in *Abschnitt 1*, *quadratische Algebren* in *Abschnitt 2*, *kanonische Konjugation* in *Abschnitt 3*). Dieses Material dürfte Experten nicht neu sein (abgesehen vielleicht vom in 3.2 eingeführten Begriff der Konjugation für unitäre Algebren), es wird hier aus Gründen der Bequemlichkeit aufgenommen. *Abschnitt 4* verallgemeinert den Begriff der quadratischen Algebra zu dem der *linksquadratischen Algebra*, bei dem auf die Forderung der Existenz eines Einselementes verzichtet wird. Für linksquadratische Algebren Q gehört die in 4.8 definierte *linkskonjugierte Algebra* Q_* stets zur Klasse der in *Abschnitt 5* behandelten *semiquadratischen Algebren*.

Wichtige Hilfsmittel zur Untersuchung einer semiquadratischen Algebra A sind der in *Abschnitt 6* besprochene *quadratische Kern* $\mathrm{Sq}(A)$ (die durch sämtliche Quadrate erzeugte Teilalgebra von A) und der davon abgeleitete (semiquadratische) *Multiplikationsring* $\mathrm{S}_1(A)$ (die durch die Linksmultiplikationen L_s für $s \in \mathrm{Sq}(A)$ erzeugte unitäre Teilalgebra von $\mathrm{End}_R(A)$).

Abschnitt 7 befasst sich mit *Potenzen* in semiquadratischen Algebren; er endet mit der Feststellung, dass auch im semiquadratischen Kontext der *Satz von Albert* gilt (cf. [Al61] Ch. II.6, Thm. 8, p. 23), nach dem (im endlichdimensionalen Fall) die Existenz nicht-trivialer Idempotente $c^2 = c \in A$ gewährleistet ist, sofern es nicht-nilpotente Elemente gibt.

In der Theorie der nicht-assoziativen Algebren hat sich die *Peirce-Zerlegung* (Zerlegung in die Eigenräume der Links- und Rechtsmultiplikation für ein Idempotent) als entscheidendes Werkzeug bei den Struktur-Untersuchungen erwiesen. Der Peirce-Zerlegung semiquadratischer Algebren widmen wir uns in den *Abschnitten 8 und 9*. Dabei stellen wir fest, dass sich jede semiquadratische Algebra A mit Linkseinselement e aus einem *quadratischen Anteil* $\mathrm{Q}_e(A)$ und einem zusätzlichen *Annullatoranteil* $\mathrm{Z}_e(A)$ mit $\mathrm{Z}_e(A) * A = \{0\}$ zusammensetzt: $A = \mathrm{Q}_e(A) \oplus \mathrm{Z}_e(A)$ (vgl. 9.9). Diese von uns als *Annullatorerweiterung* bezeichnete Konstruktion wird in *Abschnitt 10* allgemein eingeführt und untersucht. Eine Beschreibung der in *Abschnitt 11* ins Auge gefassten *Multiplikationsalgebra* $\mathrm{M}(A')$ für derartige Annullatorerweiterungen $A' = Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ gibt Proposition 11.4. Mit ihrer Hilfe kann in 11.9 der Aufbau von Idealen solcher Algebren A' beschrieben werden. Schließlich befasst sich *Abschnitt 12* mit *einfachen semiquadratischen Algebren*. Es zeigt sich dabei, dass einfache semiquadratische Algebren nicht selten ein *Linkseinselement* besitzen, insbesondere ist das der Fall, wenn ein nicht-triviales Idempotent existiert (vgl.12.4). Als Hauptresultat dieser Arbeit ist das *Einfachheitskriterium* für semiquadratische Algebren der Form $Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ anzusehen (Satz 12.7). Dieses Kriterium verhilft uns zu der Einsicht, dass es eine reichhaltige Klasse einfacher semiquadratischer Algebren gibt, welche die Klasse der linkskonjugierten Algebren von einfachen quadratischen Algebren echt umfasst. Aus Sicht der Theorie der nicht-assoziativen Algebren bilden die semiquadratischen Algebren daher eine interessante Klasse, die zu weiteren Untersuchungen Anlass geben könnte.

Danksagung

Für die Anregung zu dieser Arbeit, die hervorragende Betreuung bei ihrer Durchführung und die vielen klärenden Gespräche danke ich Prof. Holger P. Petersson ganz herzlich. Prof. Reinhard Börger möchte ich ebenso für die zahlreichen interessanten mathematischen Diskussionen danken wie dafür, dass er sich so kurzfristig zur Begutachtung meiner Dissertation bereit erklärt hat. Vielen Dank auch an Prof. Luise Unger, die in meinem Abschlusskolloquium den Dekan Prof. Franz Locher vertrat, und an Dr. Andreas Wiegner, der dort Protokoll geführt hat.

Außerdem danke ich meinen derzeitigen sowie ehemaligen Kolleginnen und Kollegen für das angenehme Arbeitsklima. Sowohl Petra Dittmer als auch Marlies Benner haben es mir durch die gute Zusammenarbeit und das Schreiben einiger Manuskripte erleichtert, meine Doktorarbeit voranzutreiben. Im November 1998 hielt ich im Rahmen des Oberseminars Algebra/Topologie einen Vortrag über erste Ergebnisse meiner Untersuchungen. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Oberseminars gilt mein Dank für ihr Interesse und für die anregenden Fragen in der abschließenden Diskussion. Prof. Karl-Goswin Große-Erdmann und Dr. Peter Brühne haben Entwürfe meiner Dissertation gelesen und mir hilfreiches Feedback dazu gegeben. Von meinen Kollegen Gerold Hartl, Henning Mohren und Dr. Manfred Schulte erhielt ich einige wertvolle Tipps zur Umsetzung des Manuskriptes in LaTeX. Prof. Robert Wisbauer (Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf) verdanke ich den Hinweis auf LaTeX, ohne den es nicht zu dieser Doktorarbeit in ihrer jetzigen Form gekommen wäre. Prof. D. Pokrass Jacobs (Clemson University, U.S.A.), stellte mir das Computerprogramm `Albert` zur Verfügung, mit dem die Berechnungen in Anhang C durchgeführt wurden. Herr Weber von der Fachbibliothek Mathematik hat mir in seiner freundlichen und hilfsbereiten Art Zugang zu vielen Büchern und Artikeln verschafft, die für mich beim Erstellen dieser Arbeit wichtig waren. Frau Behrenberg war mir im Dekanat behilflich bei Verfahrensfragen und hat mich auf eine Reihe von Druckfehlern aufmerksam gemacht. Vielen Dank ihnen allen.

Ferner danke ich meinen Eltern Irene und Heinz Müller dafür, dass sie in der Schlussphase der Doktorarbeit beim Renovieren des neuen Hauses geholfen haben, dass beide Projekte rechtzeitig abgeschlossen werden konnten. Auch Lothar und Rainer Dreßler sowie viele andere Verwandte und Freunde trugen sehr zum Gelingen bei. Petra Kinzel und Thea Rosemeier haben es mir mit ihrer Gastfreundschaft erleichtert einige Teile dieser Arbeit zu tippen. Ihnen allen bin ich sehr dankbar. Danken möchte ich auch Britta Petermeyer, die den Einband meiner Dissertation gestaltet hat und mir bei der Erstellung der Druckfassung viele wertvolle Hinweise gab. Schließlich möchte ich mich ganz besonders herzlich bei meiner Frau Monika bedanken. Sie hat in den letzten Jahren und besonders in den Wochen vor der Abgabe viel dafür getan, mir das Schreiben meiner Doktorarbeit zu ermöglichen. Ihr und unserer Tochter Lena Tabea widme ich diese Arbeit.

0 Einführung

Die *Grundbegriffe* aus der Theorie der Ringe und Moduln werden in dieser Arbeit als bekannt vorausgesetzt (s. [Bourbaki], [LehrbAlg1], [La91], [Wi88], eine konstruktive Darstellung dieser Theorie ist in [MiRiRu88] enthalten.) Hier werden die *Vereinbarungen und Bezeichnungen* eingeführt, an die wir uns bei der Darstellung halten wollen.

Ringe R sollen durchweg *assoziativ* (und meist kommutativ) sein und immer ein (*mit* 1_R bezeichnetes) *Einselement* besitzen ($1_R \cdot r = r = r \cdot 1_R$ für alle $r \in R$), das auf R-(Links-)*Moduln* X *stets unitär* operiert ($1_R\, x = x$ für alle $x \in X$). In einem R-Linksmodul X ist die *lineare Hülle*

$$\mathrm{Lin}_R(W) := \{ \sum_{j=1}^{m} r_k\, w_k \mid r_1, \ldots, r_m \in R,\ w_1, \ldots, w_m \in W,\ m \in \mathbb{N} \},$$

der durch die Teilmenge W von X erzeugte Untermodul von X, und

$$\mathrm{Lin}_R(x_1, \ldots, x_k) := \mathrm{Lin}_R(\{x_1, \ldots, x_k\})$$

ist der durch die Elemente $x_1 \ldots, x_k \in X$ erzeugte Untermodul von X.

Für jede Familie $(x_j)_{j\in J}$ von Elementen eine R-Linksmoduls X haben wir eine R-lineare Abbildung

$$\Phi : R^{(J)} \longrightarrow X,\ (r_j)_{j\in J} \mapsto \textstyle\sum_{j\in J} r_j\, x_j.$$

(In der formal unendlichen Summe kommen nach Definition von $R^{(J)}$ nur endlich viele von Null verschiedene Summanden vor.)
Das *Bild* dieser Abbildung Φ ist $\Phi[R^{(J)}] = \mathrm{Lin}_R(\{ x_j \mid j \in J \}$, die lineare Hülle von $\{ x_j \mid j \in J \}$, das heißt Φ ist genau dann surjektiv, wenn die Familie $(x_j)_{j\in J}$ ein *Erzeugendensystem* von X ist.
Der *Kern* dieser Abbildung Φ ist $\mathrm{Kern}\,\Phi = \{ (r_j)_{j\in J} \mid \sum_{j\in J} r_j\, x_j = 0 \}$, das heißt Φ ist genau dann injektiv, wenn die Familie $(x_j)_{j\in J}$ *linear unabhängig* ist, also aus $\sum_{j\in J} r_j\, x_j = 0$ folgt $r_j = 0$ für alle $r \in R$.
Die Familie $(x_j)_{j\in J}$ ist eine *Basis* von X wenn Φ bijektiv ist, also $(x_j)_{j\in J}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Die Menge aller R-linearen Selbstabbildungen von X bildet einen Untermodul des (mit den punktweise definierten Verknüpfungen versehenen) R-Moduls $\mathrm{Abb}(X, X)$. Der mit $\mathrm{End}_R(X)$ bezeichnete *Endomorphismenring* von X ist dieser Untermodul mit der *Komposition* $\circ$ von Abbildungen als Multiplikation. (Sind zwei Abbildungen $h : U \longrightarrow V$ und $h' : V \longrightarrow W$ gegeben, so ist $h' \circ h : U \longrightarrow W,\ x \mapsto h'(h(x))$.) Das Einselement des Endomorphismenringes ist die *identische Abbildung* $\mathrm{Id} : X \longrightarrow X$, $\mathrm{Id}(x) := x$ für alle $x \in X$, das Nullelement bezeichnen wir mit O, es ist der durch $\mathrm{O}\, x := 0$ für alle $x \in A$ definierten Nullendomorphismus.

1 Quadratische Abbildungen

Dieser Abschnitt soll *Definition und elementare Eigenschaften* quadratischer Abbildungen vergegenwärtigen.

1.1 Erinnerung (Bilineare Abbildungen)
Sei R ein Ring und X, Y, Z seien R-Linksmoduln.

Eine Abbildung $f : X \times Y \longrightarrow Z$ heißt *R-bilinear*, wenn die Abbildungen $f(x, \cdot) : Y \longrightarrow Z,\ y \mapsto f(x, y)$ und $f(\cdot, y) : X \longrightarrow Z,\ x \mapsto f(x, y)$ stets *R-linear* (d. h. R-Modul-Homomorphismen) sind ($x \in X$, $y \in Y$).

Im Falle $X = Y$ und $Z = R$ wird eine R-bilineare Abbildung (deren Werte im Grundring liegen) auch als *Bilinearform (auf X)* bezeichnet.

(Der Begriff der *Bilinearität* ist über kommutativen Ringen R üblich, siehe etwa [LehrbAlg1] §45. Aus technischen Gründen werden wir ihn auch in Situationen verwenden, in denen keine Kommutativität vorliegt.)

1.2 Definition (Quadratische Abbildungen)
Sei R ein kommutativer Ring, X, Y seien R-Moduln.

Eine Abbildung $g : X \longrightarrow Y$ heißt *R-quadratisch*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(QA1) $g(rx) = r^2 g(x)$ für alle $r \in R$, $x \in X$
(*Homogenität vom Grad* 2;)

(QA2) $\mathrm{D}g : X \times X \longrightarrow Y,\ \mathrm{D}g(x, x') := g(x + x') - g(x) - g(x')$
ist eine R-bilineare Abbildung (genannt *Bilinearisierung* von g).

Eine R-quadratische Abbildungen mit Werten im Grundring ($Y = R$) wird als *quadratische Form (auf X)* bezeichnet.

1.3 Beobachtung (Symmetrie der Bilinearisierung)
Die Bilinearisierung einer R-quadratischen Abbildung ist stets symmetrisch. Dabei wird eine Abbildung $h : X \times X \longrightarrow Y$ *symmetrisch* genannt, wenn für alle $x, x' \in X$ gilt $h(x, x') = h(x', x)$.

1.4 Beispiel (Quadratur)
Sei R ein kommutativer Ring, X, Y seien R-Moduln.

Mit Hilfe der *Diagonalabbildung* $\Delta : X \longrightarrow X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ definieren wir zu jeder R-bilinearen Abbildung $f : X \times X \longrightarrow Y$ eine R-quadratische Abbildung $\Delta^* f := f \circ \Delta$, die *Quadratur* von f. Wir haben also $\Delta^* f : X \longrightarrow Y$, $\Delta^* f(x) = f(x, x)$ und $\mathrm{D}(\Delta^* f)(x, x') = f(x, x') + f(x', x)$ für alle $x, x' \in X$.

1.5 Bemerkungen (Moduln von Abbildungen)
Sei R ein kommutativer Ring, X, Y, Z seien R-Moduln.

(1) Die Menge der R-bilinearen Abbildungen

$$\mathrm{Bil}_R(X \times Y, Z) := \{\, f \in \mathrm{Abb}(X{\times}Y, Z) \mid f \text{ ist } R\text{-bilinear} \,\}$$

ist ein Untermodul des (mit den punktweise definierten Verknüpfungen versehenen) R-Moduls $\mathrm{Abb}(X{\times}Y, Z)$ aller Abbildungen $f : X{\times}Y \longrightarrow Z$.

(2) Die Menge der R-quadratischen Abbildungen

$$\mathrm{Qu}_R(X, Y) := \{\, g \in \mathrm{Abb}(X, Y) \mid g \text{ ist } R\text{-quadratisch} \,\}$$

ist ein Untermodul des (mit den punktweise definierten Verknüpfungen versehenen) R-Moduls $\mathrm{Abb}(X, Y)$ aller Abbildungen $g : X \longrightarrow Y$.

(3) Die *Quadraturabbildung* und die *Bilinearisierungsabbildung*

$$\begin{array}{ll} \Delta^* : \mathrm{Bil}_R(X{\times}X, Y) \longrightarrow \mathrm{Qu}_R(X, Y), \quad f \mapsto \Delta^* f & \text{(vgl. 1.4)} \\ \mathrm{D} \;\; : \mathrm{Qu}_R(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Bil}_R(X{\times}X, Y), \quad g \mapsto \mathrm{D}g & \text{(vgl. (QA2))} \end{array}$$

sind R-linear.

(4) Wir haben $\mathrm{Kern}\, \Delta^* = \mathrm{AltBil}_R(X{\times}X, Y)$, wobei

$$\mathrm{AltBil}_R(X{\times}X, Y) := \{\, f \in \mathrm{Bil}_R(X{\times}X, Y) \mid f \text{ ist alternierend} \,\}$$

der Untermodul aller *alternierenden* Abbildungen in $\mathrm{Bil}_R(X{\times}X, Y)$ ist (d. h. aller f in $\mathrm{Bil}_R(X{\times}X, Y)$ mit $f(x, x) = 0$ für alle $x \in X$).

(5) Es gilt $\Delta^*(\mathrm{D}g) = 2g$ für alle $g \in \mathrm{Qu}_R(X, Y)$ und $\mathrm{D}(\Delta^* f) = 2f$ für alle $f \in \mathrm{SymBil}_R(X{\times}X, Y)$, wobei

$$\mathrm{SymBil}_R(X{\times}X, Y) := \{\, f \in \mathrm{Bil}_R(X{\times}X, Y) \mid f \text{ ist symmetrisch} \,\}$$

der Untermodul aller symmetrischen Abbildungen in $\mathrm{Bil}_R(X{\times}X, Y)$ ist.

(6) Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ (d. h. $2_R := 1_R + 1_R$ invertierbar mit $\frac{1}{2} := (2_R)^{-1}$) liefert D einen Isomorphismus

$$\mathrm{Qu}_R(X, Y) \longrightarrow \mathrm{SymBil}_R(X{\times}X, Y), \; g \mapsto \mathrm{D}g$$

mit Umkehrabbildung $\frac{1}{2}\, \Delta^*|_{\mathrm{SymBil}_R(X \times X, Y)}$.

(Für Abbildungen $h : V \longrightarrow W$ und Teilmengen U von V bezeichnen wir mit $h|_U$ die *Einschränkung* von h auf U, also $h|_U : U \longrightarrow W, \; x \mapsto h(x)$.)

1.6 Proposition (Quadratische Summenformel)

Sei R ein kommutativer Ring, X, Y seien R-Moduln und $g : X \longrightarrow Y$ sei eine R-quadratische Abbildung.

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_m \in R$, $x_1, \ldots, x_m \in X$

$$\textbf{(QA}\boldsymbol{\Sigma}\textbf{)} \qquad g\Big(\sum_{k=1}^{m} r_k\, x_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} r_k^2\, g(x_k) + \sum_{1 \leqq j < k \leqq m} r_j r_k \; \mathrm{D}g(x_j, x_k).$$

[Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach m.]

1.7 Satz (Quadratische Fortsetzung)

Sei R ein kommutativer Ring, X sei ein freier R-Modul mit Basis $(b_j)_{j \in J}$ und Y ein beliebiger R-Modul.

Ist J total geordnet und sind Werte $y_{jk} \in Y$ mit $y_{jk} = y_{kj}$ für alle $j, k \in J$ gegeben, so gibt es genau eine R-quadratische Abbildung $g : X \longrightarrow Y$ mit

$$g(b_j) = y_{jj} \quad \text{und} \quad \mathrm{D}g(b_j, b_k) = y_{jk} \;\; \text{für } j \neq k \quad (j, k \in J).$$

Dabei ist g die Quadratur einer R-bilinearen Abbildung $f : X \times X \longrightarrow Y$, es gilt also $g = \Delta^* f$.

(Verwendung des Auswahlaxioms würde automatisch für die Existenz einer totalen Ordnung auf J sorgen.)

Beweis: Die *Eindeutigkeit* von g folgt aus (QAΣ).

Zum Nachweis der *Existenz* bemerken wir, dass es genau eine R-bilineare Abbildung $f : X \times X \longrightarrow Y$ gibt mit

$$f(b_j, b_k) = \begin{cases} y_{jj} & \text{für } j = k \\ y_{jk} & \text{für } j < k \\ 0 & \text{für } j > k. \end{cases}$$

Wegen $f(b_j, b_k) + f(b_k, b_j) = y_{jk}$ für $j \neq k$ $(j, k \in J)$ hat die R-quadratische Abbildung $g := \Delta^* f$ die gewünschten Eigenschaften. □

1.8 Korollar (Surjektivität der Quadraturabbildung)
Sei R ein kommutativer Ring, Y sei ein R-Modul.

Dann ist für $X = R^{(J)}$ mit total geordneter Indexmenge J die folgende Quadraturabbildung surjektiv

$$\Delta^* : \mathrm{Bil}_R(R^{(J)}\times R^{(J)}, Y) \longrightarrow \mathrm{Qu}_R(R^{(J)}, Y),\ f \mapsto \Delta^* f.$$

[Ist $g : R^{(J)} \longrightarrow Y$ eine quadratische Abbildung und $(e_j)_{j\in J}$ die Standardbasis von $R^{(J)}$, so setze $y_{jj} := g(e_j)$, $y_{jk} := \mathrm{D}g(e_j, e_k)$ für $j \neq k$ $(j, k \in J)$; nun liefert Satz 1.7 eine bilineare Abbildung f mit $g = \Delta^* f$.]

1.9 Folgerung (Matrizendarstellung quadratischer Abbildungen)
Sei R ein kommutativer Ring, $\ell \geqq 1$ und $m \geqq 1$ seien natürliche Zahlen. Bezeichne $\mathrm{Mat}_{\ell,m}(R)$ den R-Modul aller $\ell\times m$-Matrizen und

$$\mathrm{Mat}_\ell(R) := \mathrm{Mat}_{\ell,\ell}(R)$$

den Ring aller $\ell \times \ell$-Matrizen mit Einträgen aus R. Für jeden R-Modul X sei ferner $\mathrm{Qu}_R(X) := \mathrm{Qu}_R(X, R)$ der R-Modul aller quadratischen Formen auf X.

Die bijektive lineare Abbildung

$$\begin{aligned}&\beta_\cdot : \mathrm{Mat}_{\ell,m}(R) \longrightarrow \mathrm{Bil}_R(R^\ell\times R^m, R) \ \text{ mit } \ M \mapsto \beta_M,\\ &\beta_M(x, y) := x^{\mathsf T} M\, y \text{ für alle } x \in R^\ell,\ y \in R^m,\end{aligned}$$

liefert $\Delta^*\circ\beta_\cdot : \mathrm{Mat}_\ell(R) \longrightarrow \mathrm{Qu}_R(R^\ell)$, eine (wegen 1.8) surjektive R-lineare Abbildung. Jede quadratische Form g auf R^ℓ läßt sich demnach durch eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_\ell(R)$ mit $g(x) = \beta_M(x, x) = x^{\mathsf T} M\, y$ für alle $x \in R^\ell$ darstellen, wobei sich verschiedene Matrizen M, M', die dieselbe quadratische Form darstellen, gerade um eine *alternierende* Matrix M_0 unterscheiden: Aus $\beta_M = \beta_{M'}$ und $M_0 = M - M'$ folgt $x^{\mathsf T} M_0\, x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^\ell$. (Eine $\ell\times\ell$-Matrix M_0 ist genau dann alternierend, wenn sie nur Nullen auf der Hauptdagonalen hat und außerdem *schiefsymmetrisch* ist, das heißt $M_0^{\mathsf T} = -M_0$ gilt.) Mit

$$\mathrm{AltMat}_\ell(R) := \{\, M \in \mathrm{Mat}_\ell(R) \mid M \text{ ist alternierend} \,\},$$

dem Untermodul aller alternierenden $\ell\times\ell$-Matrizen, gilt also

$$\begin{aligned}\mathrm{Qu}_R(R^\ell) &\cong \mathrm{Mat}_\ell(R)/\,\mathrm{AltMat}_\ell(R),\\ \beta_M &\leftrightarrow M + \mathrm{AltMat}_\ell(R).\end{aligned}$$

Zusammenfassung (Quadratische Abbildungen)

Es wurden *quadratische Abbildungen* definiert. Dabei haben wir Werte nicht nur im Grundring R zugelassen (*quadratische Formen*) sondern auch Werte in anderen R-Moduln. Proposition 11.4 verwendet derartige Abbildungen $\hat{\xi}, \hat{\eta}$, vgl. 11.3. Quadratische Formen werden in 2.1 benötigt bei der Definition quadratisch Algebren.

2 Quadratische Algebren

In diesem Abschnitt werden quadratische Algebren vorgestellt und einige *elementare Eigenschaften* festgehalten. Die in dieser Arbeit verwendeten Grundbegriffe aus der Theorie der nicht-assoziativen Algebren finden sich in Anhang A.

2.1 Definition (Quadratische Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring.

Eine R-Algebra Q mit Einselement 1_Q heißt *quadratische Algebra*, wenn es eine (als *Normform* bezeichnete) quadratische Form $n : Q \longrightarrow R$ und eine (als *Spurform* bezeichnete) Linearform $t : Q \longrightarrow R$ gibt, die folgende *charakteristische Gleichung* erfüllen:

(Q) $\qquad x^2 - t(x)\,x + n(x)\,1_Q = 0 \quad$ für alle $x \in Q$.

(Die benötigten Begriffe aus der Theorie der nicht notwendig assoziativen R-Algebren werden in Anhang A präsentiert.)

2.2 Beobachtungen (Potenzassoziativtät, Teilalgebren)
Sei R ein kommutativer Ring und Q eine quadratische Algebra über R mit Normform n und Spurform t.

(1) Eine Teilalgebra Q_1 von Q ist genau dann eine quadratische Algebra mit Normform $n_1 = n|_{Q_1}$ und Spurform $t_1 = t|_{Q_1}$, wenn sie ein Einselement e enthält. Dafür kommt nur $e = 1_Q$ in Betracht, wenn es in Q_1 ein Element mit invertierbarer Norm gibt.

[Multiplikation von (Q) mit e zeigt $x^2 - t(x)\,x + n(x)\,e = 0$ für $x \in Q_1$, also $n(x)\,e = t(x)\,x - x^2 \underset{(Q)}{=} n(x)\,1_Q$.]

(2) Für jedes $x \in Q$ ist die lineare Hülle $\mathrm{Lin}_R(1_Q, x) = R[x]$, die durch x erzeugte unitäre Teilalgebra von Q, eine kommutativ-assoziative quadratische Algebra.

[Wegen (Q) ist $\mathrm{Lin}_R(1_Q, x)$ multiplikativ abgeschlossen, für die beiden Erzeugenden $1_Q, x$ ergibt sich Kommutativität und Assoziativität.]

(3) Die *Potenzen* eines Elementes $x \in Q$ werden rekursiv definiert durch $a^0 := 1_Q$ und $a^{k+1} := a^k \cdot a$ für alle $k \geqq 0$. Nach (2) gilt nun

$$x^j \cdot x^k = x^{j+k} \quad \text{für alle } x \in Q,\ \ j, k \in \mathbb{N},$$

das heißt Q ist *potenzassoziativ*.

2.3 Beispiele (Quadratische Algebren vom Rang 2)
Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Bezeichne $R[\mathsf{X}]$ den Polynomring über R in der Unbestimmten X.

Für $\alpha, \beta \in R$ ist $\mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)} := R[\mathsf{X}]/R[\mathsf{X}](\mathsf{X}^2 - \beta\mathsf{X} - \alpha 1)$ eine kommutativ-assoziative R-Algebra. Setzen wir $\mathrm{e} := \mathrm{pr}_{(\alpha,\beta)}(1)$, $\mathrm{j} := \mathrm{pr}_{(\alpha,\beta)}(\mathsf{X})$ mit der kanonischen Projektion $\mathrm{pr}_{(\alpha,\beta)} : R[\mathsf{X}] \longrightarrow \mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)}$, so ist e Einselement und (e, j) eine Basis von $\mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)}$. Es gilt $\mathrm{j}^2 = \alpha\mathrm{e} + \beta\mathrm{j}$ und durch

$$\begin{aligned} n_{(\alpha,\beta)}(r\mathrm{e} + s\mathrm{j}) &:= r^2 + \beta rs - \alpha s^2, \\ t_{(\alpha,\beta)}(r\mathrm{e} + s\mathrm{j}) &:= 2r + \beta s \end{aligned}$$

wird eine quadratische Form $n_{(\alpha,\beta)} : \mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)} \longrightarrow R$ und eine Linearform $t_{(\alpha,\beta)} : \mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)} \longrightarrow R$ definiert mit

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2\mathrm{e} + 2rs\,\mathrm{j} + s^2(\alpha\mathrm{e} + \beta\mathrm{j}) \\ &= (2r^2 + \beta rs)\mathrm{e} + (2rs + \beta s^2)\mathrm{j} + (-r^2 - \beta rs + \alpha s^2)\mathrm{e} \\ &= t_{(\alpha,\beta)}(x)\, x - n_{(\alpha,\beta)}(x)\, \mathrm{e} \end{aligned}$$

für alle $x = r\mathrm{e} + s\mathrm{j} \in \mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)}$, $r, s \in R$.

Somit ist $\mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)}$ eine quadratische R-Algebra.

(2) Eine R-Algebra Q wird *quadratische Algebra vom Typ* (α, β) genannt, wenn sie ein Einselement e besitzt und eine Basis e, b mit $b^2 = \alpha e + \beta b$ $(e, b \in Q)$. Das ist genau dann der Fall, wenn es einen R-Algebren-Isomorphismus $\varphi : Q \longrightarrow \mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)}$ gibt. Dann ist Q eine quadratische Algebra mit Normform $n = n_{(\alpha,\beta)} \circ \varphi$ und Spurform $t = t_{(\alpha,\beta)} \circ \varphi$.

(3) Quadratische R-Algebren vom Typ $(\alpha, 0)$ werden auch *reinquadratisch* genannt und mit $R[\sqrt{\alpha}]$ bezeichnet, wobei $\sqrt{\alpha}$ für j geschrieben wird.

(4) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ bilden eine quadratische $\mathbb{R}$-Algebra vom Typ $(-1, 0)$.

(5) Speziell für $\alpha = 0$ liefert (3) die *Algebra der dualen Zahlen*, die mit $R[\varepsilon]$ bezeichnet wird, wobei ε für j geschrieben wird und $\varepsilon^2 = 0$ gilt.

(6) Mit komponentenweise definierten Verknüpfungen ist die Algebra $R \times R$ eine quadratische Algebra vom Typ $(0, 1)$. Dabei ist die Normform durch $(r_1, r_2) \mapsto r_1 \cdot r_2$ und die Spurform durch $(r_1, r_2) \mapsto r_1 + r_2$ gegeben $(r_1, r_2 \in R)$.

[Für $e := (1, 1)$, $b := (0, 1)$ ist e Einselement und e, b eine Basis von $R \times R$ mit $b^2 = b$ und $(r_1, r_2) = r_1 e + (r_2 - r_1) b$.]

2.4 Notiz (Linearisierte charakteristische Gleichung)
In quadratischen Algebren Q gilt die *linearisierte charakteristische Gleichung*

$$\textbf{(Q}'\textbf{)} \qquad x \cdot y + y \cdot x = t(x)\, y + t(y)\, x - \mathrm{D}n(x,y)\, 1_Q \qquad \text{für alle } x, y \in Q.$$

Für 2-*torsionsfreie* Algebren (aus $2x = 0$ folgt $x = 0$) ist (Q′) äquivalent zu (Q).

Aus (Q) und (Q′) ergeben sich folgende Gleichungen ($x \in Q$):

(i) $t(1_Q)\, x = \big(1_R + n(1_Q)\big)x,$

(ii) $\big(t(x) - \mathrm{D}n(x, 1_Q)\big)1_Q = \big(2_R - t(1_Q)\big)x.$

[Setzen wir $x + y$ für x in (Q) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}&(x^2 - t(x)\, x + n(x)\, 1_Q)\\ &\qquad +x \cdot y + y \cdot x - t(x)\, y - t(y)\, x + \mathrm{D}n(x,y)\, 1_Q + (y^2 - t(y)\, y + n(y)\, 1_Q)\\ &\qquad\quad = (x+y)^2 - t(x+y)\,(x+y) + n(x+y)\, 1_Q = 0.\end{aligned}$$

Umgekehrt setze $y = x$ in (Q′) ein und kürze 2, um (Q) zu erhalten.
Für (i) setze $x = 1_Q$ in (Q) und multipliziere mit x, für (ii) setze $y = 1_Q$ in (Q′).]

2.5 Proposition (Eindeutigkeit von Normform und Spurform)
Sei R ein kommutativer Ring.

In einer quadratischen Algebra Q, die unitär frei *vom Rang ≥ 2 ist (das heißt es gibt eine Basis, die 1_Q und mindestens ein weiteres Element von Q enthält), sind Normforn n und Spurform t eindeutig bestimmt. Dabei gilt*

(1) $n(1_Q) = 1_R,$

(2) $t(1_Q) = 2_R,$

(3) $t(x) = \mathrm{D}n(x, 1_Q)$ *für alle $x \in Q$.*

Die Normierungsbedingungen (1), (2) *und* (3) *sind bereits dann erfüllt, wenn es in Q ein Element b gibt, für das $1_Q, b$ linear unabhängig ist.*

[Denn $R[b] = \mathrm{Lin}_R(1_Q, b)$ aus 2.2 ist dann unitär frei vom Rang 2.]

Beweis: Seien n und n' Normformen sowie t und t' Spurformen von Q. Zunächst liefert $t'(x)\,x - n'(x)\,1_Q = x^2 = t(x)\,x - n(x)\,1_Q$ die Gleichung

$$(*) \qquad \big(t'(x) - t(x)\big)x = \big(n'(x) - n(x)\big)1_Q \quad \text{für alle } x \in Q.$$

Speziell für $x = b$, ein beliebiges von 1_Q verschiedenes Basiselement, folgt daraus $t'(b) - t(b) = 0$, das heißt $t'(b) = t(b)$. Gemäß 2.4 gilt weiter

$$\big(1_R - n(1_Q)\big)b \underset{\text{(i)}}{=} \big(2_R - t(1_Q)\big)b \underset{\text{(ii)}}{=} \big(t(b) - \mathrm{D}n(b, 1_Q)\big)1_Q,$$

also $1_R - n(1_Q) = 2_R - t(1_Q) = t(b) - \mathrm{D}n(b, 1_Q) = 0$. Daher sind (1) und (2) erfüllt, ebenso (3) für alle Basiselemente, da $t(1_Q) = 2\,n(1_Q) = \mathrm{D}n(1_Q, 1_Q)$. Mit t' statt t ergibt sich $t'(1_Q) = 2_R = t(1_Q)$. Somit ist Übereinstimmung von t' und t auf einer Basis gezeigt und damit $t' = t$ nachgewiesen, also wegen $(*)$ auch $n' = n$, da 1_Q nach Voraussetzung linear unabhängig ist. □

2.6 Hinweis (Quadratische Algebren vom Rang 1)
Ist $\alpha \in R$, so wird R eine quadratische R-Algebra mit Norm $n_\alpha(r) = \alpha\, r^2$ und Spur $t_\alpha(r) = (\alpha + 1)\, r$ (wegen $r^2 = (\alpha + 1)\, r^2 - \alpha\, r^2$ für alle $r \in R$).

Für $\alpha \neq 1$ zeigt dieses Beispiel, dass die Aussagen von Proposition 2.5 falsch werden, wenn 1_Q einziges Basiselement von Q ist.

2.7 Bezeichnungen (Quadratische Algebren mit Basispunkt)
Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Ist $\vartheta : X \times X \longrightarrow R$ eine (nicht notwendig symmetrische) Bilinearform auf einem R-Modul X, so heißt ein Element $e \in X$ mit $\vartheta(e, e) = 1$ *Basispunkt* von ϑ.

Wenn e Basispunkt von ϑ ist, so definieren wir

$$x \cdot x' := \vartheta(x, e)\, x' + \vartheta(e, x')\, x - \vartheta(x, x')\, e \quad \text{für alle } x, x' \in X.$$

(Für symmetrisches ϑ erhalten wir dabei die bekannten *Jordan-Algebren mit Basispunkt*, vgl. Braun/Koecher, [BrKoe66] Kap. VI §5, S. 193ff.)

Für die sich so ergebende R-Algebra schreiben wir $\mathrm{Q}_e(X, \vartheta)$. Sie ist eine quadratische R-Algebra mit Einselement e, Norm $n(x) := \vartheta(x, x)$ und Spur $t(x) := \vartheta(x, e) + \vartheta(e, x)$ $(x \in X)$. Wir bezeichnen sie daher als *quadratische Algebra mit Basispunkt* e zur Bilinearform ϑ.

(2) Sei X_0 ein R-Modul, und $\vartheta_0 : X_0 \times X_0 \longrightarrow R$ eine Bilinearform. Wir *adjungieren einen Basispunkt* zu ϑ_0, indem wir durch

$$\vartheta(r \oplus x_0, r' \oplus x_0') := rr' + \vartheta_0(x_0, x_0') \qquad \text{für alle } r, r' \in R, x_0, x_0' \in X_0$$

eine Bilinearform ϑ auf $X := R \oplus X_0$ mit Basispunkt $e := 1_R \oplus 0$ definieren. Dann ist $\mathrm{Q}_e(X, \vartheta)$ eine quadratische Algebra über R mit Norm $n(r \oplus x_0) = r^2 + \vartheta_0(x_0, x_0)$ und Spur $t(r \oplus x_0) = 2r$ für alle $r \in R$, $x_0 \in X_0$. Die Multiplikation in $\mathrm{Q}_e(X, \vartheta)$ ist gegeben durch

$$(r \oplus x_0) \cdot (r' \oplus x_0') = (rr' - \vartheta_0(x_0, x_0')) \oplus (rx_0' + r'x_0)$$

für alle $r, r' \in R$, $x_0, x_0' \in X_0$.

2.8 Bemerkungen (Standardkonstruktion quadratischer Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Ist Q eine quadratische Algebra mit Einselement e, und $f : Q \times Q \longrightarrow Q$ eine alternierende R-bilineare Abbildung mit $f(e, x) = 0$ für alle $x \in Q$, so folgt auch $f(x, e) = f(e + x, e + x) = 0$. Mit der durch

$$\mu_f(x, x') := x \cdot x' + f(x, x') \qquad \text{für alle } x, x' \in Q$$

definierten R-Algebrenstruktur erhalten wir eine R-Algebra Q_f; wegen $\mu_f(x, x) = x^2$ ist sie eine quadratische Algebra mit demselben Einselement, derselben Normform und derselben Spurform wie Q.

(2) Sei X_0 ein R-Modul, $\vartheta_0 : X_0 \times X_0 \longrightarrow R$ eine Bilinearform auf X_0 und $\mu_0 : X_0 \times X_0 \longrightarrow X_0$ eine alternierende R-bilineare Abbildung. Durch

$$(r \oplus x_0) \cdot (r' \oplus x_0') := (rr' - \vartheta_0(x_0, x_0')) \oplus (rx_0' + r'x_0 + \mu_0(x_0, x_0'))$$

für alle $r, r' \in R$, $x_0, x_0' \in X_0$ wird dann eine R-Algebrenstruktur auf $X := R \oplus X_0$ definiert. Die so entstehende R-Algebra $X_0[\vartheta_0, \mu_0]$ ist nichts anderes als $\mathrm{Q}_e(X, \vartheta)_f$ mit $e := 1_R \oplus 0$, $X := R \oplus X_0$ sowie

$$\vartheta(r \oplus x_0, r' \oplus x_0') := rr' + \vartheta(x_0, x_0'),$$
$$f(r \oplus x_0, r' \oplus x_0') := \mu_0(x_0, x_0')$$

für alle $r, r' \in R$, $x_0, x_0' \in X_0$, wobei wir die Bezeichnungen aus 2.7 und aus (1) verwendet haben.

Somit ist $X_0[\vartheta_0, \mu_0]$ eine quadratische Algebra mit Einselement $1_R \oplus 0$, Norm $n(r \oplus x_0) = r^2 + \vartheta_0(x_0, x_0)$ und Spur $t(r \oplus x_0) = 2r$ für alle $r \in R$, $x_0 \in X_0$.

2.9 Notation (Kanonische Transformation)
Sei R ein kommutativer Ring und Q eine quadratische Algebra über R mit Einselement 1_Q, Normform n und Spurform t.

Setzen wir $\overline{x} := t(x)\,1_Q - x$ für alle $x \in Q$, so ist folgende *transformierte charakteristische Gleichung* äquivalent zur charakteristischen Gleichung (Q) aus Definition 2.1

$$\textbf{(Q}_\tau\textbf{)} \qquad x \cdot \tau(x) = n(x)\,1_Q \quad \text{für alle } x \in Q$$

mit der R-linearen Abbildung $\tau : Q \longrightarrow Q,\ x \mapsto \overline{x}$, die wir die *kanonische Transformation* von Q nennen.

Zusammenfassung (Quadratische Algebren)

Quadratische Algebren wurden hier definiert *ohne Normierungsbedingungen* wie $n(1_Q) = 1_R$ oder $t(1_Q) = 2_R$ zu verlangen. Diese beiden Bedingungen sind nach Proposition 2.5 für unitär freie quadratische Algebren erfüllt. Im nächsten Abschnitt wird die kanonische Transformation τ aus 2.9 genauer untersucht.

3 Algebren mit Konjugation

Aufgabe diesen Abschnittes ist es, für quadratische Algebren den Begriff der *kanonischen Konjugation* bereitzustellen. Axiomatisch entwickeln wir hier einen Zugang über Konjugationen beliebiger Algebren mit Einselement. Es zeigt sich, dass (unter sehr schwachen Voraussetzungen) die kanonische Transformation aus 2.9 eine Konjugation ist.

3.1 Motivation (Reinquadratische Konjugation)
Auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ haben wir die durch $\overline{r + s\mathrm{i}} = r - s\mathrm{i}$ für $r, s \in \mathbb{R}$ definierte *Konjugation*. Von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ läßt sie sich auf reinquadratische Algebren $R[\sqrt{\alpha}]$ übertragen, denn die (ebenfalls als *Konjugation* bezeichnete) R-lineare Abbildung $\overline{} : R[\sqrt{\alpha}] \longrightarrow R[\sqrt{\alpha}]$ mit $\overline{r\mathrm{e} + s\mathrm{j}} := r\mathrm{e} - s\mathrm{j}$ hat folgenden Eigenschaften ($x \in R[\sqrt{\alpha}]$):

(1) $\overline{\mathrm{e}} = \mathrm{e}$,

(2) $x \cdot \overline{x} = n(x)\,\mathrm{e} = \overline{x} \cdot x$ mit $n(x) = r^2 - \alpha s^2$ für $x = r\mathrm{e} + s\mathrm{j}$,

(3) $x + \overline{x} = t(x)\,\mathrm{e}$ mit $t(x) = 2r$ für $x = r\mathrm{e} + s\mathrm{j}$,

(4) $n(\overline{x}) = n(x)$,

(5) $t(\overline{x}) = t(x)$,

(6) $\overline{\overline{x}} = x$.

3.2 Definition (Konjugation)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra mit Einselement 1_A.

Eine R-lineare Abbildung $\kappa : A \longrightarrow A$ bezeichnen wir als *Konjugation*, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt.

(K1) $\kappa(1_A) = 1_A$, (*Unitarität*)

(K2) $x \cdot \kappa(x) \in R\,1_A$ für alle $x \in A$. (*Normeigenschaft*)

3.3 Feststellung (Eigenschaften von Konjugationen)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra mit Einselement 1_A und einer Konjugation $\kappa : A \longrightarrow A$.

Für alle $x \in A$ gilt dann

(1) $x + \kappa(x) \in R\,1_A$, (*Spureigenschaft*)

(2) $x \cdot \kappa(x) = \kappa(x) \cdot x$, (*Vertauschbarkeit*)

(3) $\kappa(\kappa(x)) = x$. (*Involutivität*)

Beweis:
(1) Wir bemerken $1_A + \kappa(x) + x + x \cdot \kappa(x) = (1_A + x) \cdot \kappa(1_A + x) \in R\,1_A$.
(2) Wegen (1) haben wir $x \cdot (x + \kappa(x)) = (x + \kappa(x)) \cdot x$.
(3) Wegen (1) und (K1) gilt $\kappa(x + \kappa(x)) = x + \kappa(x)$. □

3.4 Beobachtung (Kanonische Konjugation)

Sei R ein kommutativer Ring und Q eine quadratische Algebra über R mit Normform n und Spurform t.

Dann sind folgende Aussagen *äquivalent:*

(a) Die R-lineare Abbildung $\tau : Q \longrightarrow Q,\ x \mapsto \overline{x} = t(x)\,1_Q - x$ (vgl. 2.9) ist eine Konjugation.

(b) Es gilt $\overline{1_Q} = 1_Q$.

(c) Es gilt $n(1_Q)\,x = x$ für alle $x \in Q$.

(d) Es gilt $t(1_Q)\,x = 2x$ für alle $x \in Q$.

(e) Es gilt $\mathrm{D}n(x, 1_Q)\,y = t(x)\,y$ für alle $x, y \in Q$.

Ist eine (und damit jede) der obigen Bedingungen erfüllt, so bezeichnen wir die Abbildung $\tau : Q \longrightarrow Q,\ x \mapsto \overline{x}$ aus (a) als *kanonische Konjugation* der quadratischen Algebra Q.

(Diese Situation ist jedenfalls dann gegeben, wenn eine der Bedingungen (1), (2) oder (3) aus Proposition 2.5 erfüllt ist, dazu genügt die Existenz eines Elementes b, für das $1_Q, b$ linear unabhängig ist.)

[(a) $\Leftrightarrow$ (b) ist klar, da (K2) wegen (Q_τ) aus 2.9 stets erfüllt ist. Mit $x = 1_Q$ liefert (Q_τ) auch (b) $\Leftrightarrow$ (c), während (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) aus 2.4 folgt.]

3.5 Beispiele (Kanonische Konjugationen vom Rang 1 und 2)

(1) Einzige Konjugation auf R ist die identische Abbildung id_R; daher liefert die Spurform $t_\alpha(r) := (\alpha + 1) \cdot r$ aus Hinweis 2.6 genau für $\alpha = 1$ eine kanonische Konjugation: $\overline{r} = t_\alpha(r)\,1_R - r = \alpha \cdot r \quad (r \in R)$.

(2) Die quadratischen Algebren vom Typ (α, β) aus 2.3 besitzen stets eine kanonische Konjugation, denn $t_{(\alpha,\beta)}(1\,\mathrm{e} + 0\,\mathrm{j}) = 2$. Für $R[\sqrt{\alpha}]$, die reinquadratischen Algebren aus 2.3 (3), ergibt sich die Konjugation aus 3.1, denn $\overline{r\mathrm{e} + s\mathrm{j}} = t(r\mathrm{e} + s\mathrm{j})\mathrm{e} - (r\mathrm{e} + s\mathrm{j}) = 2r\mathrm{e} - r\mathrm{e} - s\mathrm{j} = r\mathrm{e} - s\mathrm{j}$.

(3) Im Falle der quadratischen Algebra $R \times R$ aus Beispiel 2.3 (6) gilt

$$\overline{(r,s)} = t(r,s)\,(1,1) - (r,s) = (r+s, r+s) - (r,s) = (s,r)$$

für alle $(r,s) \in R \times R$, das heißt die kanonische Konjugation vertauscht hier gerade die Komponenten der Paare (*Vertauschungs-Konjugation*).

(4) In quadratischen Algebren mit Basispunkt (vgl. 2.7) sind die Bedingungen aus 3.4 erfüllt, ebenso bei den Algebren $X_0[\vartheta_0, \mu_0]$, siehe 2.8

3.6 Proposition (Eigenschaften kanonischer Konjugationen)
Sei R ein kommutativer Ring und Q eine quadratische Algebra über R mit kanonischer Konjugation ($\overline{1_Q} = 1_Q$, vgl. 3.4).

Dann gilt für alle $x, y \in Q$

(1) $n(\overline{x}) = n(x)$,

(2) $t(\overline{x}) = t(x)$,

(3) $n(x^2)\,y = n(x)^2\,y$,

(4) $t(x^2)\,y = (t(x)^2 - 2n(x))\,y$,

(5) $\mathrm{D}n(\overline{x}, \overline{y}) = \mathrm{D}n(x,y)$.

Beweis: Wir verwenden die Eigenschaften (c), (d) und (e) aus 3.4.

(1): $$n(\overline{x}) = n(t(x)\,1_Q) - \mathrm{D}n(t(x)\,1_Q, x) + n(-x)$$
$$= t(x)^2\,n(1_Q) - t(x)\,\mathrm{D}n(1_Q, x) + (-1)^2 n(x)$$
$$\underset{(c)}{=} t\big(\big(t(x) - \mathrm{D}n(1_Q, x)\big)\,x\big) + n(x) \underset{(e)}{=} n(x).$$

(2): $$t(\overline{x}) = t(t(1_Q)\,x) - t(x) \underset{(d)}{=} 2\,t(x) - t(x) = t(x).$$

(3): Nach (Q) gilt
$$n(x^2)\,y = n(t(x)\,x - n(x)\,1_Q)\,y$$
$$= t(x)\,n(x)\,\big(t(x) - \mathrm{D}n(x, 1_Q)\big)\,y \;+\; n(x)^2\,n(1_Q)\,y = n(x)^2\,y$$
wegen (e) und (c).

(4): Nach (Q) gilt $t(x^2)\,y = t(t(x)\,x - n(x)\,1_Q)\,y \underset{(d)}{=} (t(x)^2 - 2n(x))\,y$.

(5): Linearisiere (1) durch Einsetzen von $x + y$ für x in (1). $\square$

3.7 Erinnerung (Zerlegung nach involutorischer linearer Abbildung)
Sei R ein kommutativer Ring mit $\frac{1}{2} \in R$, und X ein R-Modul. Weiter sei $\Psi : X \longrightarrow X$ eine lineare Abbildung, die *involutorisch* in dem Sinne ist, dass $\Psi^2 = \mathrm{Id}$ gilt, also $\Psi(\Psi x) = x$ für alle $x \in X$.

Dann gilt $X = X_+ \oplus X_-$ als direkte Summe der R-Untermoduln

$$\begin{aligned} X_+ &:= \{\, x \in X \mid \Psi x = x \,\} \\ X_- &:= \{\, x \in X \mid \Psi x = -x \,\} \end{aligned}$$

mit zugehörigen Projektionen $P_+ := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + \Psi)$, $P_- := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - \Psi)$.

3.8 Satz (Zerlegung quadratischer Algebren mit Konjugation)
Sei R ein kommutativer Ring mit $\frac{1}{2} \in R$ und Q eine quadratische Algebra über R mit kanonischer Konjugation (das heißt $\overline{1_Q} = 1_Q$, vgl. 3.4).

Dann ist $Q = \mathrm{S}(Q) \oplus \mathrm{V}(Q)$ direkte Summe der R-Untermoduln

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(Q) &:= \{\, x \in Q \mid \overline{x} = x \,\} \\ \mathrm{V}(Q) &:= \{\, x \in Q \mid \overline{x} = -x \,\} \end{aligned}$$

mit zugehörigen Projektionen P_{S} und P_{V} definiert durch $P_{\mathrm{S}}\, x := \frac{1}{2}(x + \overline{x})$, $P_{\mathrm{V}}\, x := \frac{1}{2}(x - \overline{x})$ für alle $x \in Q$.

Der skalare Anteil $\mathrm{S}(Q) = R\, 1_Q$ und $\mathrm{V}(Q) = \{\, x \in Q \mid t(x)\, 1_Q = 0 \,\}$, der vektorielle Anteil, sind bezüglich $\mathrm{D}n$ zueinander orthogonal, es gilt also $\mathrm{D}n[\mathrm{V}(Q) \times \mathrm{S}(Q)] = \{0\}$. Das Quadrat eines Elementes von $\mathrm{V}(Q)$ liegt stets in $\mathrm{S}(Q)$.

Beweis:
Wegen $\overline{\overline{x}} = x$ für alle $x \in Q$, vgl. 3.3 (3), liefert 3.7 die gewünschte Darstellung als direkte Summe.

Aus $\overline{1_Q} = 1_Q$ folgt $R\, 1_Q \subseteq \mathrm{S}(Q)$, wegen $P_S x = \frac{1}{2}(x + \overline{x}) = \frac{1}{2} t(x)\, 1_Q$ für alle $x \in Q$ haben wir $\mathrm{S}(Q) = R\, 1_Q$. Weiter gilt $x + \overline{x} = t(x)\, 1_Q$ $(x \in Q)$ nach Definition 2.9, also $\mathrm{V}(Q) = \{\, x \in Q \mid t(x)\, 1_Q = 0 \,\}$.

Zum Nachweis der Orthogonalität stellen wir fest, dass nach 3.6 (5) gilt

$$\mathrm{D}\, n(x,y) = \mathrm{D}\, n(\overline{x}, \overline{y}) = -\, \mathrm{D}\, n(x,y) \qquad \text{für alle } x \in \mathrm{S}(Q), y \in \mathrm{V}(Q).$$

Schließlich bemerken wir $x^2 + n(x)\, 1_Q \underset{(\mathrm{Q})}{=} 0$ für alle $x \in \mathrm{V}(Q)$. $\square$

3.9 Korollar (Antikommutativer Anteil)
Sei R ein kommutativer Ring mit $\frac{1}{2} \in R$ und Q eine quadratische Algebra über R mit kanonischer Konjugation (vgl. 3.4), Normform n und Spurform t.

Wenn Q unitär treu ist, also

$$r\,1_Q = 0 \quad \text{nur für} \quad r = 0 \qquad (r \in R)$$

gilt, dann gibt es auf dem R-Untermodul $Q_0 := \{\, x \in Q \mid t(x) = 0 \,\}$ von Q genau eine Bilinearform $\vartheta_0 : Q_0 \times Q_0 \longrightarrow R$ und genau eine alternierende R-bilineare Abbildung $\mu_0 : Q_0 \times Q_0 \longrightarrow Q_0$ mit $Q \cong Q_0[\vartheta_0, \mu_0]$ (vgl. 2.8 (2)).

Die durch μ_0 definierte antikommutative R-Algebra auf Q_0 nennen wir den antikommutativen Anteil *von Q und bezeichnen ihn mit $\mathrm{A}(Q)$.*
(Eine R-Algebra A wird antikommutativ *genannt, wenn für alle $x \in A$ gilt $x \cdot x = 0$.)*

Beweis:
In 3.8 haben wir $\mathrm{S}(Q) = R\,1_Q \cong R$ und $\mathrm{V}(Q) = Q_0$, weil Q unitär treu ist. Jedes $x \in Q$ hat ferner die Zerlegung $x = \frac{1}{2}t(x)\,1_Q + P_V x$. Wir setzen nun $\vartheta_0(x_0, x_0') := -\frac{1}{2}t(x_0 \cdot x_0')$ und $\mu_0(x_0, x_0') := P_{\mathrm{V}}(x_0 \cdot x_0')$ für alle $x_0, x_0' \in Q_0$. So erhalten wir die R-bilinearen Abbildungen $\vartheta_0 : Q_0 \times Q_0 \longrightarrow R$ und $\mu_0 : Q_0 \times Q_0 \longrightarrow Q_0$ mit $\mu_0(x_0, x_0) = 0$ für alle $x_0 \in Q_0$ (da $x_0 \cdot x_0 \in \mathrm{S}(Q)$) sowie

$$(r\,1_Q + x_0) \cdot (r'\,1_Q + x_0') = (rr' - \vartheta_0(x_0, x_0'))\,1_Q + (rx_0' + r'x_0 + \mu_0(x_0, x_0'))$$

für alle $r, r' \in R$, $x_0, x_0' \in Q_0$, daher ist Q isomorph zu $Q_0[\vartheta_0, \mu_0]$. Wegen $x_0 \cdot x_0' = \vartheta_0(x_0, x_0')\,1_Q + \mu_0(x_0, x_0')$ für alle $x_0, x_0' \in Q_0$ sind ϑ_0 und μ_0 eindeutig bestimmt. □

Zusammenfassung (Algebren mit Konjugation)

Nach kurzem Betrachten allgemeiner Algebren mit Konjugation konnten wir in 3.4 feststellen, dass die kanonische Transformation aus 2.9 unter sehr schwachen Voraussetzungen eine Konjugation ist (beispielsweise wenn eine der Normierungsbedingungen $n(1_Q) = 1_R$ oder $t(1_Q) = 2_R$ gilt).

Die angenehmen Eigenschaften (vgl. 3.3 und 3.6) dieser dann als *kanonische Konjugation* bezeichneten Abbildung können (im Falle $\frac{1}{2} \in R$) dazu benutzt werden, eine Zerlegung quadratischer Algebren in einen skalaren und einen vektoriellen Anteil vorzunehmen (siehe 3.8).

Bevor wir uns wie in der Einleitung angekündigt in Abschnitt 5 den semiquadratischen Algebren zuwenden, werden wir zunächst in Abschnitt 4 *linksquadratische Algebren* betrachten, das sind „quadratische Algebren ohne Einselement“.

4 Linksquadratische Algebren

Wir *verallgemeinern* nun *den Begriff der quadratischen Algebra* derart, dass auch Algebren erfasst werden, die möglicherweise kein Einselement besitzen.

4.1 Definition (Linksquadratische Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring.

Wir wollen eine (nicht notwendig assoziative) R-Algebra Q als *linksquadratische Algebra* bezeichnen, wenn es eine (als *Normform* bezeichnete) quadratische Form $n : Q \longrightarrow R$ und eine (als *Spurform* bezeichnete) Linearform $t : Q \longrightarrow R$ gibt mit $\mathrm{L}_{x^2} - t(x)\,\mathrm{L}_x + n(x)\,\mathrm{Id} = \mathrm{O}$ für alle $x \in Q$; es ist also folgende *charakteristische Gleichung* erfüllt:

(LQ) $\qquad x^2 \cdot y - t(x)\,x \cdot y + n(x)\,y = 0 \quad$ für alle $x, y \in Q$.

4.2 Beobachtungen (Links-/rechts-/quadratische Algebren)

(1) Eine Algebra ist genau dann quadratisch, wenn sie linksquadratisch ist und ein Einselement besitzt.

[Wende R_y auf (Q) an um (LQ) zu erhalten, umgekehrt setze $y = 1_Q$ in (LQ) ein und es ergibt sich (Q).]

(2) Jede Teilalgebra Q_1 einer linksquadratischen Algebra Q mit Normform n und Spurform t ist linksquadratisch mit Normform $n_1 := n|_{Q_1}$ und Spurform $t_1 := t|_{Q_1}$.

(3) Dual zu Definition 4.1 lassen sich *rechtsquadratische Algebren* einführen. Eine Algebra Q ist genau dann rechtsquadratisch, wenn ihre entgegengesetzte Algebra Q^{op} linksquadratisch ist.

(4) Algebren, die zu (nicht notwendig unitären) Teilalgebren quadratischer Algebren isomorph sind (*subquadratische Algebren*), sind sowohl links- als auch rechtsquadratisch.

[Wenn Q eine linksquadratische Algebra über R mit Normform n und Spurform t ist, A eine R-Algebra sowie $\varphi : Q \longrightarrow A$ ein R-Algebren-Isomorphismus, so ist auch A eine linksquadratische Algebra über R mit Normform $n \circ \varphi^{-1}$ und Spurform $t \circ \varphi^{-1}$.]

4.3 Beispiele (Linksquadratische Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Auf einem R-Modul X wird zu jeder Linearform $\lambda : X \longrightarrow R$ durch $x \cdot_{\lambda} x' := \lambda(x)\, x'$ für alle $x, x' \in X$ eine R-Algebrenstruktur definiert. Für die so entstehenden R-Algebra X_λ ist $\lambda : X_\lambda \longrightarrow R$ ein R-Algebrenhomomorphismus, denn es gilt $\lambda(x \cdot_{\lambda} x') = \lambda(x)\, \lambda(x')$ für alle $x, x' \in X$. Wählen wir nun $t = \lambda$ als Spurform , so erweist sich X_λ als linksquadratische Algebra mit *trivialer Normform* $n = 0$.

(2) Eine R-Algebra Q ist genau dann eine linksquadratische Algebra mit *trivialer Spurform* $t = 0$, wenn eine quadratische Form g auf Q existiert mit $x^2 \cdot y = g(x)\, y$ für alle $x, y \in Q$. (Den Zusammenhang liefert die Beziehung $g = -n$.)

Wir stellen fest, dass die R-Algebra X_λ aus (1) auch linksquadratisch mit trivialer Spurform ist, denn es gilt $(x \cdot_{\lambda} x) \cdot_{\lambda} x' = \lambda(x)^2\, x'$ für alle $x, x' \in X$.

(3) In antikommutativen Algebren gilt definitionsgemäß (vgl. 3.9) $x \cdot x = 0$ für alle $x \in A$. Dann haben wir $(x \cdot x) \cdot y = 0$ für alle $x, y \in A$, also sind antikommutative Algebren linksquadratisch mit trivialer Normform und trivialer Spurform, insbesondere ist das für *Lie-Algebren* der Fall, das heißt für antikommutative Algebren mit der *Jacobi-Identität*

$$x \cdot (y \cdot z) + y \cdot (z \cdot x) + z \cdot (x \cdot y) = 0.$$

4.4 Notiz (Linearisierte charakteristische Gleichung)
In jeder linksquadratischen Algebra Q gilt die *linearisierte charakteristische Gleichung*

(LQ′) $(w{\cdot}x + x{\cdot}w){\cdot}y = t(w)\, x{\cdot}y + t(x)\, w{\cdot}y - \mathrm{D}n(w,x)\, y$ für alle $w, x, y \in Q$.

Für 2-torsionsfreie Algebren ist (LQ′) äquivalent zu (LQ).

[Setzen wir $w + x$ für x in (LQ) ein, so ergibt sich
$(w^2{\cdot}y - t(w)\, w{\cdot}y + n(w)\, y) + (w{\cdot}x + x{\cdot}w){\cdot}y - t(w)\, x{\cdot}y - t(x)\, w{\cdot}y + \mathrm{D}n(w,x)\, y +$
$(x^2{\cdot}y - t(x)\, x{\cdot}y + n(x)\, y) = (w+x)^2{\cdot}y - t(w+x)\,(w+x){\cdot}y + n(w+x)\, y = 0.$
Umgekehrt setze $w = x$ in (LQ′) ein und kürze 2, um (LQ) zu erhalten.]

4.5 Proposition (Eindeutigkeit von Normform und Spurform)
Sei R ein kommutativer Ring und Q eine linksquadratische Algebra über R.

Besitzt Q als R-Modul ein Erzeugendensystem E mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{L}_x, \mathrm{Id}$ stets linear unabhängig ist $(x \in E)$, so sind Normform und Spurform von Q eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien n und n' Normformen sowie t und t' Spurformen von Q. Wegen $t'(x)\,\mathrm{L}_x - n'(x)\ \mathrm{Id} = \mathrm{L}_{x^2} = t(x)\,\mathrm{L}_x - n(x)\ \mathrm{Id}$ gilt

$$(**) \qquad \big(t'(x) - t(x)\big)\mathrm{L}_x = \big(n'(x) - n(x)\big)\ \mathrm{Id} \qquad \text{für alle } x \in Q,$$

also $t'(x) - t(x) = n'(x) - n(x) = 0$ für alle $x \in E$, das heißt $n = n'$ und $t = t'$. □

4.6 Hinweis (Verschiedene Normformen und Spurformen)
Die linksquadratische Algebra X_λ aus 4.3 (1) (2) zeigt, dass in der Regel keine Eindeutigkeit von n und t zu erwarten ist, falls L_b ein Vielfaches von Id sein kann.

4.7 Zusatz (Eindeutigkeit über Körpern)
Sei F ein Körper und Q eine linksquadratische Algebra mit Normform n und Spurform t.

Dann sind n und t eindeutig bestimmt, sofern es ein $q \in Q$ gibt, für das die Linksmultiplikation kein Vielfaches der Identität ist, also $\mathrm{L}_q \notin F\ \mathrm{Id}$.

[Wegen $(**)$ aus dem Beweis von 4.5 haben wir $Q = U_1 \cup U_2$ mit den Untervektorräumen $U_1 := \mathrm{Kern}(t - t')$, $U_2 := \{\, x \in Q \mid \mathrm{L}_x \in F\ \mathrm{Id}\,\}$. Da nach Voraussetzung $U_2 \neq Q$ gilt, folgt $U_1 = Q$, das heißt $t' = t$, also auch $n' = n$ nach $(**)$.]

4.8 Bezeichnung (Linkskonjugierte Algebra)
Sei R ein kommutativer Ring und Q sei eine linksquadratische Algebra über R mit Normform n und Spurform t.

Mit Q_* bezeichnen wir Q versehen mit der durch

$$x * y := t(x)\, y - x \cdot y \qquad \text{für alle } x, y \in Q$$

definierten neuen R-Algebrenstruktur. Die R-Algebra Q_* bezeichnen wir als *linkskonjugierte Algebra* zu Q und ihre Multiplikation $*$ als *linkskonjugierte Multiplikation.*

In einer quadratischen Algebra Q hat die linkskonjugierte Multiplikation die Form $x * y = \tau(x) \cdot y$ mit $\tau(x) = \overline{x} = t(x)\, 1_Q - x$ $(x, y \in Q)$.

4.9 Bemerkung (Linkskonjugierte Algebren haben triviale Spur)
Die linkskonjugierte Algebra Q_* einer linksquadratischen Algebra Q ist eine linksquadratische Algebra mit trivialer Spurform, vgl. 4.3 (2) denn es gilt für alle $x, y \in Q$

$$\begin{aligned}(x * x) * y &= t(x * x)\, y - (x * x) \cdot y \\ &= t(x * x)\, y - t(x)\, x \cdot y + (x \cdot x) \cdot y \\ &= \big(t(x * x) - n(x)\big)\, y \qquad\qquad \text{nach (LQ).}\end{aligned}$$

Zusammenfassung (Linksquadratische Algebren)

Die Klasse der hier eingeführten linksquadratischen Algebren umfasst die Klasse der quadratischen Algebren echt. Sie stellt ein Bindeglied zur Klasse der ab dem nächsten Abschnitt untersuchten semiquadratischen Algebren dar: Für jede linksquadratische Algebra Q ist die linkskonjugierte Algebra Q_* (vgl. 4.8) eine semiquadratische Algebra.

5 Semiquadratische Algebren

Jetzt führen wir semiquadratische Algebren ein, das sind nicht-assoziative Algebren, in denen die beiden unten stehenden Identitäten linkskonjugierter Algebren von (links-)quadratischen Algebren erfüllt sind.

5.1 Motivation (Semiquadratische Identitäten)

Sei R ein kommutativer Ring und Q eine linksquadratische Algebra über R mit Normform n und Spurform t.

Definieren wir eine *neue Multiplikation* durch $x * y := t(x)\, y - x \cdot y$ für alle $x, y \in Q$ (linkskonjugierte Multiplikation, vgl. 4.8), so gelten folgende Identitäten $(x, y, z \in Q)$:

$$(x * x) * (y * z) = ((x * x) * y) * z = y * ((x * x) * z).$$

[Nach 4.9 haben wir $(x * x) * y = g(x)\, y$ mit $g(x) := t(x * x) - n(x) \in R$.]

5.2 Definition (Semiquadratische Algebren)

Sei R ein kommutativer Ring.

Eine R-Algebra A mit Multiplikation $*$ bezeichnen wir als *(linksseitig) semiquadratische Algebra*, wenn folgende Identitäten gelten $(x, y, z \in A)$:

(SQ1) $\quad (x * x) * (y * z) = ((x * x) * y) * z,$

(SQ2) $\quad (x * x) * (y * z) = y * ((x * x) * z).$

5.3 Beobachtungen (Semiquadratische Algebren)

(1) Teilalgebren semiquadratischer Algebren und Bilder von semiquadratischen Algebren unter Algebren-Homomorphismen sind ebenfalls semiquadratische Algebren.

(2) Auch die direkte Algebren-Summe $Q_1 \boxplus Q_2$ zweier semiquadratischer Algebren Q_1, Q_2 ist eine semiquadratische Algebra.

5.4 Notiz (Linearisierte semiquadratische Identitäten)
In jeder semiquadratischen Algebra A gilt für alle $w, x, y, z \in A$

(SQ1′) $\qquad (w * x + x * w) * (y * z) = ((w * x + x * w) * y) * z,$

(SQ2′) $\qquad (w * x + x * w) * (y * z) = y * ((w * x + x * w) * z).$

Für 2-torsionsfreie Algebren sind (SQ1′) und (SQ2′) zu (SQ1) bzw. (SQ2) äquivalent .

[Setzen wir $w + x$ für x in (SQ1) ein, so ergibt sich
$(w * w) * (y * z) + (w * x + x * w) * (y * z) + (x * x) * (y * z)$
$\qquad = ((w * w) * y) * z + ((w * x * x * w) * y) * z + ((x * x) * y) * z.$
Umgekehrt setze $w = x$ in (SQ1′) ein und kürze 2, um (SQ1) zu erhalten.
Entsprechend ergibt sich die Äquivalenz von (SQ2′) und (SQ2).]

5.5 Beispiele (Verschiedenartige semiquadratische Algebren)

(1) Ist Q eine *linksquadratische Algebra* und Q_* die Algebra mit der neuen Multiplikation $x * y := t(x)\, y - x \cdot y$ für alle $x, y \in Q$ (die linkskonjugierte Algebra zu Q, vgl. 4.8), so ist Q_* nach 5.1 eine semiquadratische Algebra.

Insbesondere ergibt sich aus jeder quadratischen Algebra Q eine semiquadratische Algebra Q_* mit $x * y = \overline{x} \cdot y,\ \overline{x} = t(x)\, 1_Q - x \quad (x, y \in Q)$.

(2) In assoziativen Algebren ist (SQ1) automatisch erfüllt, und (SQ2) ist dort äquivalent zu der Identität $[x * x, y] * z = 0$. Demnach sind *kommutativ-assoziative Algebren* auch semiquadratische Algebren.

Umgekehrt folgt für 2-torsionsfreie semiquadratische Algebren mit Einselement Assoziativität aus (SQ1′) und Kommutativität aus (SQ2′). (Setze $w = 1_A$ in (SQ1′) sowie $w = z = 1_A$ in (SQ2′).)

(3) Ist A eine antikommutative Algebra mit Multiplikation $*$, das heißt ist $x{*}x = 0$ für alle $x \in A$ erfüllt, so gelten trivialerweise (SQ1) und (SQ2). Alle antikommutativen Algebren, insbesondere also alle Lie-Algebren, sind daher semiquadratische Algebren.

5.6 Konvention (Klammereinsparung)
In einer semiquadratischen Algebra A ist es nach (SQ1) ohne Belang, auf welche Weise wir ein Produkt aus drei Faktoren klammern, wenn der erste Faktor ein Quadrat $x * x$ ist. Derartige Produkte dürfen wir daher einfach in der Form $(x * x) * y * z$ schreiben.

5.7 Feststellung (Verallgemeinerte semiquadratische Identitäten)
In einer semiquadratischen Algebra A gilt für alle $x_1, \dots, x_k, y, z \in A$, $k \geqq 1$

$$\begin{aligned}(x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * (y * z) &= \big((x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * y\big) * z\big) \\ &= y * \big((x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * z\big).\end{aligned}$$

(Beachte die Konvention 5.6 zur Klammereinsparung.)

Beweis: Vollständige Induktion nach k:

Für $k = 1$ handelt es sich gerade um (SQ1) und (SQ2).

Zum Nachweis der Identitäten für $k+1$ seien $x_1, \dots, x_k, x_{k+1} \in A$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\big((x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * (x_{k+1} * x_{k+1})\big) * (y * z) \\ &\qquad = (x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * \big((x_{k+1} * x_{k+1}) * (y * z)\big) && \text{[Ind. Ann.]} \\ &\qquad = (x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * \big(((x_{k+1} * x_{k+1}) * y) * z\big) && \text{[(SQ1)]} \\ &\qquad = \big((x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * (x_{k+1} * x_{k+1}) * y\big) * z && \text{[Ind. Ann.]}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\big((x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * (x_{k+1} * x_{k+1})\big) * (y * z) \\ &\qquad = (x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * \big((x_{k+1} * x_{k+1}) * (y * z)\big) && \text{[Ind. Ann.]} \\ &\qquad = (x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * \big(y * ((x_{k+1} * x_{k+1}) * z)\big) && \text{[(SQ2)]} \\ &\qquad = y * \big((x_1 * x_1) * \cdots * (x_k * x_k) * (x_{k+1} * x_{k+1}) * z\big) && \text{[Ind. Ann.]}\end{aligned}$$

für alle $y, z \in A$. □

5.8 Sprechweise (Semiquadratisch mit quadratischer Form)
Sei R ein kommutativer Ring.

Von einer *semiquadratischen Algebra mit quadratischer Form* sprechen wir, wenn eine R-Algebra A mit einer quadratischen Form $g : A \longrightarrow R$ versehen ist, derart dass gilt

(SQF) $\qquad (x * x) * y = g(x)\, y \quad$ für alle $x, y \in A$.

In diesem Fall ist A natürlich eine semiquadratische Algebra.

5.9 Hinweis (Linksquadratische und semiquadratische Algebren)
Zu jeder linksquadratischen Algebra Q haben wir die mit der Multiplikation $x * y = t(x)\, y - x \cdot y$ versehene linkskonjugierte Algebra Q_*, eine semiquadratischen Algebra mit quadratischer Form $g(x) = t(x * x) - n(x)$ (siehe 5.1).

Ist andererseits A eine semiquadratische Algebra mit quadratischer Form $g : A \longrightarrow R$ und $\lambda : A \longrightarrow R$ eine Linearform, so definiert

$$x \,{}_{\lambda}\!\cdot y := \lambda(x)\, y - x * y \qquad \text{für alle } x, y \in A$$

eine R-Algebrenstruktur. Die so erhaltene Algebra A_λ ist linksquadratisch mit Spurform $t = \lambda$ und Norm $n(x) = \lambda(x * x) - g(x)$ für alle $x \in A$.

[Es gilt $(x \,{}_{\lambda}\!\cdot x) \,{}_{\lambda}\!\cdot y = \lambda(x)\, x \,{}_{\lambda}\!\cdot y - \lambda(x * x)\, y + (x * x) * y$ für alle $x, y \in A$.]

Die semiquadratischen Algebren mit quadratischer Form sind also gerade die linksquadratischen Algebren mit trivialer Spurform (vgl. 4.3 (2)*), und die linksquadratischen Algebren sind gerade die semiquadratischen Algebren mit quadratischer Form, bei denen eine beliebige Linearform als Spurform vorgegeben wird.*

Zusammenfassung (Semiquadratische Algebren)

In diesem Abschnitt wurden die semiquadratischen Algebren definiert als nicht-assoziative Algebren, in denen die Identitäten (SQ1) und (SQ2) gelten. Es wurde deutlich, dass sich in semiquadratischen Algebren die Linksmultiplikation mit Quadraten und ebenso mit aus Quadraten zusammengesetzten Elementen wie eine skalare Vervielfachung zu verhalten scheint. Dieses Phänomen werden wir im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

6 Der quadratische Kern

In diesem Abschnitt werden der quadratische Kern einer semiquadratischen Algebra und der sich daraus durch Adjunktion eines Einselementes ergebende (semiquadratische) Multiplikationsring eingeführt.

6.1 Definition (Quadratischer Kern)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra.

Dann erzeugen die Quadrate $a * a$ mit $a \in A$ eine Teilalgebra

$$\mathrm{Sq}(A) := \mathrm{Lin}_R(\{\, (a_1 * a_1) * \cdots * (a_k * a_k) \mid a_1, \ldots, a_k \in A,\ k \geqq 1 \,\}),$$

den *quadratischen Kern* von A.
(Beachte Konvention 5.6 zur Klammereinsparung.)

6.2 Beobachtung (Symmetrisches Produkt im quadratischen Kern)
Es gilt $x * y + y * x = (x + y) * (x + y) - x * x - y * y$, also

$$x * y + y * x \in \mathrm{Sq}(A) \quad \text{für alle } x, y \in A.$$

6.3 Notiz (Allgemeine semiquadratische Identitäten)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra.

Dann gelten für alle $s \in \mathrm{Sq}(A)$ und alle $y, z \in A$ die Identitäten

(SQ) $\quad s * (y * z) = (s * y) * z = y * (s * z),$

(SQL) $\quad \mathrm{L}_s \, \mathrm{L}_y = \mathrm{L}_{s*y} = \mathrm{L}_y \, \mathrm{L}_s,$

(SQR) $\quad \mathrm{L}_s \, \mathrm{R}_z = \mathrm{R}_z \, \mathrm{L}_s = \mathrm{R}_{s*z},$

insbesondere ist $\mathrm{Sq}(A)$ eine assoziative R-Algebra.

Dabei bezeichnet L_a die *Linksmultiplikation* mit $a \in A$ $(\mathrm{L}_a \, x := a * x)$ und R_b bezeichnet die *Rechtsmultiplikation* mit $b \in A$ $(\mathrm{R}_b \, x := x * b)$.

[Es genügt s der Form $(a_1 * a_1) * \cdots * (a_k * a_k)$ zu betrachten, um (SQ) zu zeigen, da es sich um lineare Identitäten handelt. Daher liefert 5.7 die Behauptung. (SQL) und (SQR) sind Umformulierungen von (SQ).]

6.4 Bezeichnungen (Quadratischer Ring)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra.

Die Algebra $\mathrm{Sq}_1(A)$, die durch Adjunktion eines Einselementes aus $\mathrm{Sq}(A)$ entsteht *(Dorrohsche Oberalgebra)*, ist als assoziative R-Algebra mit Einselement insbesondere ein Ring. Wir nennen $\mathrm{Sq}_1(A)$ den *quadratischen Ring* von A und haben mit $\iota_{\mathrm{A}} : \mathrm{Sq}(A) \longrightarrow \mathrm{Sq}_1(A),\ s \mapsto 0_R \oplus s$ einen injektiven R-Algebren-Homomorphismus.

[Auf dem R-Modul $R \oplus \mathrm{Sq}(A)$ definieren wir eine R-Algebrenstruktur mit Einselement $e := 1_R \oplus 0$ durch $(r \oplus s) \cdot (r' \oplus s') = rr' \oplus (rs' + r's + s * s')$ für alle $r, r' \in R,\ s, s' \in \mathrm{Sq}(A)$ (vgl.A.3).]

6.5 Proposition (Modulstruktur über dem quadratischen Ring)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra.

(1) *Durch* $(r \oplus s)x := r\,x + s * x$ *für alle* $r \in R,\ s \in \mathrm{Sq}(A),\ x \in A$ *wird eine* $\mathrm{Sq}_1(A)$*-Linksmodulstruktur auf* A *definiert, bezüglich der* $\mathrm{Sq}(A)$ *ein Untermodul ist.*

(2) *Die Multiplikationsabbildung* $\mu_{\mathrm{A}} : A \times A \longrightarrow A,\ \mu_{\mathrm{A}}(x, y) = x * y$ *ist* $\mathrm{Sq}_1(A)$*-bilinear:*

$$\begin{aligned}(r \oplus s)\,(x * y) &= ((r \oplus s)\,x) * y \\ &= x * ((r \oplus s)\,y) \\ &\quad \text{für alle } r \in R, s \in \mathrm{Sq}(A), x, y \in A.\end{aligned}$$

(3) *Vorfaktoren aus* $\mathrm{Sq}_1(A)$ *dürfen vertauscht werden:*

$$\begin{aligned}(r \oplus s)\,(r' \oplus s')\,x &= (r' \oplus s')\,(r \oplus s)\,x \\ &\quad \text{für alle } r, r' \in R, s, s' \in \mathrm{Sq}(A), x \in A.\end{aligned}$$

Beweis:

(1) Die angegebene skalare Multiplikation ist offenbar bilinear, und wir bemerken $1_{\mathrm{Sq}_1(A)}\,x = (1_R \oplus 0)\,x = 1_R\,x + 0 * x = x$ sowie

$$r(r'x + s' * x) + s * (r'x + s' * x) = rr'x + (rs' + r's + s * s') * x$$

für alle $r, r' \in R,\ s, s' \in \mathrm{Sq}(A),\ x \in A$.

(2) Verwende (SQ) aus 6.3.

(3) Beachte $s * (s' * x) \underset{\text{(SQ)}}{=} s' * (s * x)$. □

6.6 Notation (Kommutatorideal)

Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra.

Dann heißt das durch die *Kommutatoren* $[x, y]$ (vgl. A.2) erzeugte Ideal $\mathrm{K}(A)$ das *Kommuatorideal*. Es ist das kleinste Ideal I von A, für das die Faktoralgebra A/I kommutativ wird.

6.7 Bemerkungen (Multiplikationsring)

Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra.

(1) Für das Kommutatorideal $\mathrm{K}(\mathrm{Sq}_1(A))$ des quadratischen Ringes $\mathrm{Sq}_1(A)$ haben wir $\mathrm{K}(\mathrm{Sq}_1(A)) = \iota_{\mathrm{A}}[\mathrm{K}(\mathrm{Sq}(A))]$ mit dem Einbettungshomomorphismus $\iota_{\mathrm{A}} : \mathrm{Sq}(A) \longrightarrow \mathrm{Sq}_1(A),\ \iota_{\mathrm{A}}(s) = 0_R \oplus s$ aus 6.4.

(2) Die Abbildung $\gamma_A : \mathrm{Sq}_1(A) \longrightarrow \mathrm{End}_R(A)$ mit $\gamma_A(r \oplus s) := r\,\mathrm{Id} + \mathrm{L}_s$ für alle $r \in R$, $s \in \mathrm{Sq}(A)$ ist ein R-Algebren-Homomorphismus.

(Für die in 6.5 eingeführte $\mathrm{Sq}_1(A)$-Modulstruktur auf A ist $\gamma_A(r \oplus s)$ die skalare Vervielfachung mit $r \oplus s$.)

(3) Wegen (1) und (SQL) enthält der Kern von γ_A das Kommutatorideal, $\mathrm{K}(\mathrm{Sq}_1(A)) \subseteq \mathrm{Kern}\,\gamma_A$, daher ist das Bild von γ_A eine kommutativ-assoziative R-Algebra mit Id als Einselement.

Wir nennen $\mathrm{S}_1(A) := \gamma_A[\mathrm{Sq}_1(A)]$ den (linksseitig semiquadratischen) *Multiplikationsring* von A.

(4) Der quadratische Kern $\mathrm{Sq}(A)$ ist eine Teilalgebra der $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra A.

(Die skalare Vervielfachung ist gegeben durch $(r\,\mathrm{Id} + \mathrm{L}_s)\,x = r\,x + s * x$ für alle $r \in R$, $s \in \mathrm{Sq}(A)$, $x \in A$).

(5) Hat A ein Linkseinselement e, so liefert die Zuordnung $s \mapsto \mathrm{L}_s$ einen surjektiven $\mathrm{S}_1(A)$-Algebren-Homomorphismus $\mathrm{Sq}(A) \longrightarrow \mathrm{S}_1(A)$.

Ist $A = Q_*$ die linkskonjugierte Algebra einer quadratischen Algebra Q mit kanonischer Konjugation τ, so erhalten wir einen $\mathrm{S}_1(A)$-Algebren-Isomorphismus $\mathrm{Sq}(Q_*) \cong \mathrm{S}_1(Q_*),\ s \leftrightarrow \mathrm{L}_s$.

[Wir haben $\mathrm{L}_s = \gamma_A(\iota_A(s))$, also handelt es sich um einen Homomorphismus. Dieser ist wegen $\mathrm{L}_e = \mathrm{Id}$ surjektiv, und im Falle $A = Q_*$ injektiv, denn aus $\mathrm{L}_s = \mathrm{O}$ folgt $\tau(s) = \mathrm{L}_s 1_Q = 0$, also $s = 0$.]

(6) Wegen 6.3 (SQL), (SQR) ist der Multiplikationsring $\mathrm{S}_1(A)$ eine Teilalgebra des *Zentroids* von A (cf. [Ja62], p. 290)

$$\Gamma(A) := \{ \gamma \in \mathrm{End}_R(A) \mid \gamma \, \mathrm{L}_a = \mathrm{L}_a \, \gamma, \quad \gamma \, \mathrm{R}_b = \mathrm{R}_b \, \gamma \ \text{ für alle } a, b \in A \}.$$

Ein $\gamma \in \mathrm{End}_R(A)$ liegt also genau dann in $\Gamma(A)$, wenn für alle $a, b \in A$ gilt $\gamma(a * b) = a * \gamma(b) = \gamma(a) * b$.

(7) Das (linksseitig semiquadratische) *Multiplikationsideal*

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(A) &:= \gamma_A[\iota_A[\mathrm{Sq}(A)]] \\ &= \{ \mathrm{L}_s \mid s \in \mathrm{Sq}(A) \} \end{aligned}$$

ist als Ideal in $\mathrm{S}_1(A)$ eine kommutativ-assoziative $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra.

(8) Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ gilt sogar $\mathrm{S}(A) \lhd \Gamma(A)$, denn für alle $\gamma \in \Gamma(A)$, $s \in \mathrm{Sq}(A)$, $x \in A$ haben wir $\gamma \, \mathrm{L}_s(x) = \gamma(s * x) = \gamma(s) * x = \mathrm{L}_{\gamma(s)} \, x$ und $\gamma(s) \in \gamma[\mathrm{Sq}(A)] \subseteq \mathrm{Sq}(A)$, da $\gamma(a * a) = \frac{1}{2}(\gamma(a) * a + a * \gamma(a)) \in \mathrm{Sq}(A)$ für jedes $a \in A$ gilt (vgl. 6.2).

6.8 Schreibweise (Operation des quadratischen Kerns)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra und Z ein $\mathrm{S}_1(A)$-Modul.

Für $s \in \mathrm{Sq}(A)$ und $z \in Z$ werden wir meist kurz $s \, z$ schreiben statt $\gamma_A(0_R \oplus s) \, z$ oder $\gamma_A(\iota_A(s)) \, z$.
Beispielsweise gilt für $Z = A$ mit dieser Schreibweise $s \, a = s * a$ $(a \in A)$, nach (SQ) haben wir also

$$s \, (x * y) = (s \, x) * y = x * (s \, y),$$

$$s \, s' \, x = s' \, s \, x$$

für alle $s, s' \in \mathrm{Sq}(A)$, $x, y \in A$.

6.9 Feststellung (Semiquadratische und linksquadratische Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra sowie $s \in \mathrm{Sq}(A)$.

Setzen wir $x \cdot_s y := (x * s) * y$ für alle $x, y \in A$, so erhalten wir eine Algebrenstruktur, mit der A zu einer linksquadratischen $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra wird. Dabei sind Normform n_s und Spurform t_s gegeben durch

$$\begin{aligned} n_s(x) &:= \gamma_A(0 \oplus (x * x) * (s * s)) = \mathrm{L}_{(x*x)*(s*s)} \\ t_s(x) &:= \gamma_A(0 \oplus (s * x + x * s)) \ = \mathrm{L}_{s*x+x*s} \qquad \text{für alle } x \in A, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} (x \cdot_s x) \cdot_s y &= (((x * s) * x) * s) * y \\ &= (s * x + x * s) * (x * s) * y - (((s * x) * x) * s) * y \\ &= t_s(x) \, x \cdot_s y - n_s(x) \, y. \end{aligned}$$

Zusammenfassung (Der quadratische Kern)

Mit dem quadratischen Kern $\mathrm{Sq}(A)$ und dem (semiquadratischen) Multiplikationsring $\mathrm{S}_1(A)$ zu einer semiquadratischen Algebra A haben wir für die weiteren Untersuchungen unverzichtbare Hilfsmittel gewonnen.

Die Theorie der semiquadratischen Algebren wird deshalb nicht trivial, weil dort die Rechtsmultiplikationen nicht so starken Einschränkungen unterliegen wie die Linksmultiplikationen.

7 Potenzen

7.1 Vereinbarung (Potenzen)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine (semiquadratische) R-Algebra mit Multiplikation $*$.

Die *Potenzen* eines Elementes $a \in A$ definieren wir rekursiv durch

$$a^1 := a \quad \text{und} \quad a^{k+1} := a^k * a \;\text{ für alle } k \geqq 1,$$

so dass $a^k = \mathrm{R}_a^{k-1}\, a$ für alle $k \geqq 1$ gilt.

7.2 Beobachtung (Gerade und ungerade Potenzen)
In semiquadratischen Algebren gilt für $k \geqq 1$ und $a \in A$

(1) $\quad a^{2k} = (a * a)^k \in \mathrm{Sq}(A)$,

(2) $\quad a^{2k+1} = (a * a)^k\, a \in \mathrm{Sq}(A) * a$.

Wir können uns hier der in 6.8 eingeführten Schreibweise bedienen, $s\,a$ für $s \in \mathrm{Sq}(A)$, $a \in A$, weil A eine $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra ist, vgl. 6.7 (4).

[Vollständige Induktion nach k beweist (1), und (2) folgt aus (1).]

7.3 Folgerung (Rechenregeln für Potenzen)
In semiquadratischen Algebren gelten folgende *Potenzgesetze*:

(1) $\quad a^{2j} * a^k = a^{2j+k}$,

(2) $\quad a^{2j+1} * a^{2k+1} = a^{2j+2k+2}$,

(3) $\quad (s\,a)^k = s^k\, a^k$

(4) $\quad (a^j)^k = a^{jk}$

für alle $j, k \geqq 1$, $a \in A$, $s \in \mathrm{Sq}(A)$.
Insbesondere ist die von einem Quadrat a^2 mit $a \in A$ erzeugte Teilalgebra von A (vgl. A.6) kommutativ-assoziativ:

$$\mathrm{Env}(a^2) = \mathrm{Lin}_R(\{\, a^{2j} \mid j \geqq 1 \,\}).$$

Beweis:

(1) Die Behauptung folgt für gerades k sofort aus 7.2 und der Assoziativität von $\mathrm{Sq}(A)$, für ungerades k wird dabei (SQ) benutzt.

(2) folgt mit (SQ) und (1) aus 7.2 (2).

(3) kann mit (SQ) durch vollständige Induktion nach k gezeigt werden.

(4) Weil $\mathrm{Sq}(A)$ assoziativ ist, gilt die Behauptung, falls j gerade ist oder $a \in \mathrm{Sq}(A)$. Ferner zeigt sich

$$(a^{2j+1})^k = ((a * a)^j\, a)^k \underset{(3)}{=} ((a * a)^j)^k\, a^k = a^{2jk}\, a^k \underset{(1)}{=} a^{2jk+k}. \qquad \square$$

7.4 Hinweis (Keine Potenzassoziativität)

Ist $A = Q_*$ die linkskonjugierte Algebra einer quadratischen Algebra Q mit $\overline{1} = 1$ (vgl. 5.5 (1)), so gilt $x^{2j} = n(x)^j\, 1_Q$ und $x^{2j+1} = n(x)^j\, x$ für alle $j \geqq 1$, $x \in Q$, also $x^{2j+1} * x^{2k} = n(x)^{j+k}\, \overline{x}$, was in der Regel ungleich $x^{2j+2k+1}$ ist.

Folglich ist in semiquadratischen Algebren im Allgemeinen *keine Potenzassoziativität* gegeben (vgl. 2.2 (1)).

7.5 Sprechweise (Nilpotenz)

Sei R ein kommutativer Ring und A eine (semiquadratische) R-Algebra.

Ein Element $a \in A$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \geqq 1$ gibt mit $a^k = 0$. Als *Nilpotenzgrad* von a wird die kleinste natürliche Zahl $k \geqq 1$ mit $a^k = 0$ bezeichnet, falls eine solches k existiert. Gilt $a^k \neq 0$ für alle $k \geqq 1$, so sagen wir, a habe den Nilpotenzgrad ∞.

7.6 Notiz (Nilpotenz im quadratischen Kern)

Ein Element s des quadratischen Kerns $\mathrm{Sq}(A)$ ist genau dann nilpotent, wenn die Linksmultiplikation L_s nilpotent in der kommutativ-assoziativen Algebra $\mathrm{S}_1(A) \subset \mathrm{End}_R(A)$ ist (semiquadratischer Multiplikationsring, vgl. 6.7 (2).

[Aus $s^k = 0$ folgt $\mathrm{L}_s^k\, x = \mathrm{L}_{s^k}\, x = 0$ für alle $x \in A$, umgekehrt ergibt sich $s^{k+1} = \mathrm{L}_s^k\, s = 0$, wenn $\mathrm{L}_s^k\, x = 0$ für alle $x \in A$ gilt. ($\mathrm{Sq}(A)$ ist assoziativ.)]

7.7 Proposition (Charakterisierung nilpotenter Elemente)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra.

Dann sind für ein Element $a \in A$ folgende Aussagen äquivalent*:*

(a) *a ist nilpotent in der semiquadratischen Algebra A.*

(b) *$a * a$ ist nilpotent in der assoziativen Algebra* $\mathrm{Sq}(A)$*.*

(c) L_{a*a} *ist nilpotent in der kommutativ-assoziativen Algebra* $\mathrm{S}_1(A)$*.*
(Hierbei ist $\mathrm{S}_1(A)$ der reduzierte quadratische Ring, vgl. 6.7 (2).)

Beweis:
(a) $\Leftrightarrow$ (b) folgt aus $(a * a)^k = a^{2k}$, weil $a \in A$ genau dann nilpotent ist, wenn eine gerade Potenz verschwindet, es also $k \geqq 1$ gibt mit $a^{2k} = 0$.
(b) $\Leftrightarrow$ (c) gilt nach 7.6. □

7.8 Satz (Existenz idempotenter Elemente)
Sei F ein Körper und S eine endlich-dimensionale assoziative F-Algebra.

Enthält S ein Element s mit Nilpotenzgrad ∞ (das heißt mit $s^k \neq 0$ für alle $k \geqq 1$), *so gibt es in S ein von Null verschiedenes idempotentes Element, also ein $c \in A$ mit $c \cdot c = c \neq 0$.*

[Albert formulierte diesen Satz in [Al61] (Chap. II Thm. 8, p. 23) Ein Beweis findet sich auch bei Braun,Koecher in [BrKoe66] (Kap. I § 3, Lem. 3.2 S. 13.) Schafer formuliert den Satz in [Scha66] (Prop. 3.3, p. 32) für potenzassoziative Algebren.]

7.9 Korollar (Idempotente für semiquadratische Algebren)
Sei F ein Körper und A eine semiquadratische F-Algebra, deren quadratischer Kern $\mathrm{Sq}(A)$ *endlich-dimensional ist.*

Wenn A ein Element mit Nilpotenzgrad ∞ enthält, dann existiert ein von Null verschiedenes idempotentes Element $c * c = c \in A$.

Beweis:
Für ein derartiges Element $a \in A$ hat auch $s := a * a$ in $S := \mathrm{Sq}(A)$ den Nilpotenzgrad ∞. Wende nun Satz 7.8 an. □

Zusammenfassung (Potenzen)

Die mit Hilfe der Rechtsmultiplikationen definierten Potenzen (Linksklammerung) haben angenehme Eigenschaften. (Für die entgegengesetzte Bildung mit Hilfe der Linksmultiplikationen ist das nicht so.) Der bekannte *Satz von Albert* (cf. [Al61] Ch. II.6, Thm. 8, p. 23) gilt daher auch für semiquadratische Algebren. Er besagt, dass (im endlich-dimensionalen Fall) die Existenz nichttrivialer Idempotente $c^2 = c \in A$ gewährleistet ist, sofern es nicht-nilpotente Elemente gibt.

Zu einem Idempotent c werden wir in den nächsten Abschnitten die Peirce-Zerlegung in die Eigenräume von L_c und R_c betrachten.

8 Die Peirce-Zerlegung

In diesem Abschnitt bestimmen wir zu einem Idempotent c einer semiquadratischen Algebra Q die *Peirce-Zerlegung*, also die Zerlegung in die Eigenräume der Links- und Rechtsmultiplikation L_c bzw. R_c.

Da sich solche *Peirce-Zerlegungen* auch für viele andere Arten nichtassoziativer Algebren als nützlich erwiesen hat, so etwa für Jordan-Algebren, alternative Algebren und Petersson-Algebren ([BrKoe66], [Ja68], [Scha66], [Pe69]), wollen wir auch hier bei semiquadratischen Algebren von der Peirce-Zerlegung sprechen.

8.1 Proposition (Links-/Rechtsmultiplikation mit Idempotent)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra, die (SQ1) *aus* 5.2 *erfüllt. Ferner sei das Element $c \in A$ idempotent, also $c * c = c$.*

Dann gilt

(1) $c * (c * z) = c * z$ *für alle $z \in A$, d. h.* $\mathrm{L}_c^2 = \mathrm{L}_c$*;*

(2) $c * (y * c) = (c * y) * c$ *für alle $y \in A$, d. h.* $\mathrm{L}_c \, \mathrm{R}_c = \mathrm{R}_c \, \mathrm{L}_c$*;*

(3) $(c * x + x * c) * c = ((c * x + x * c) * c) * c$ *für alle $x \in A$,*
d. h. $\mathrm{R}_c \, (\mathrm{L}_c + \mathrm{R}_c) = \mathrm{R}_c^2 \, (\mathrm{L}_c + \mathrm{R}_c)$*;*

(4) $(((x * c) * c) * c) * c = (x * c) * c$ *für alle $x \in A$, d. h.* $\mathrm{R}_c^4 = \mathrm{R}_c^2$*.*

Dabei bezeichnen $\mathrm{L}_c, \mathrm{R}_c \in \mathrm{End}_R(A)$ die durch $\mathrm{L}_c \, x := c * x, \mathrm{R}_c \, x := x * c$ definierte Linksmultiplikation beziehungsweise Rechtsmultiplikation mit c.

Beweis:

(1) folgt aus (SQ1) mit $x = y = c$:

$$c * (c * z) = (c * c) * (c * z) = ((c * c) * c) * z = c * z.$$

(2) folgt aus (SQ1) mit $x = z = c$:

$$c * (y * c) = (c * c) * (y * c) = ((c * c) * y) * c = (c * y) * c.$$

(3) folgt aus (SQ1′) mit $w = y = z = c$:

$$\begin{aligned}(c * x + x * c) * c &= (c * x + x * c) * (c * c) \\ &= ((c * x + x * c) * c) * c.\end{aligned}$$

(4): Aus (3) folgt

$$(\diamond) \qquad \mathrm{R}_c^3 - \mathrm{R}_c^2 = (\mathrm{R}_c - \mathrm{R}_c^2)\,\mathrm{L}_c,$$

also gilt
$$\begin{aligned}\mathrm{R}_c^4 - \mathrm{R}_c^3 &= \mathrm{R}_c\,(\mathrm{R}_c^3 - \mathrm{R}_c^2) \underset{(\diamond)}{=} \mathrm{R}_c\,(\mathrm{R}_c - \mathrm{R}_c^2)\,\mathrm{L}_c \\ &= -(\mathrm{R}_c^3 - \mathrm{R}_c^2)\,\mathrm{L}_c \underset{(\diamond)}{=} -(\mathrm{R}_c - \mathrm{R}_c^2)\,\mathrm{L}_c^2 \\ &\underset{(1)}{=} -(\mathrm{R}_c - \mathrm{R}_c^2)\,\mathrm{L}_c \underset{(\diamond)}{=} -(\mathrm{R}_c^3 - \mathrm{R}_c^2) = \mathrm{R}_c^2 - \mathrm{R}_c^3. \qquad \square\end{aligned}$$

8.2 Erinnerung (Direkte Summen-Zerlegung von Moduln)
Es besteht eine bijektive Beziehung zwischen direkten Summen-Zerlegungen $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$ eines R-Moduls X und *Projektionen* $P_1, \ldots, P_m$, also idempotenten Elementen von $\mathrm{End}_R(X)$, mit $P_1 + \cdots + P_m = \mathrm{Id}$, $P_j\,P_k = \mathrm{O}$ für $j \neq k$, $1 \leqq j, k \leqq m$, $m \in \mathbb{N}$, siehe etwa Satz 39.9 in [LehrbAlg1].
(Dabei bezeichnet Oden Nullendomorphismus mit $\mathrm{O}\,x := 0$ für alle $x \in A$.)

8.3 Folgerung (Links- und rechtsseitige Zerlegung)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra, die (SQ1) aus 5.2 erfüllt, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

Dann gilt $A = A_1(c) \oplus A_0(c)$ als direkte Summe der R-Rechtsideale

$$\begin{aligned}A_1(c) &:= \{\, x \in A \mid c * x = x \,\}\ , \\ A_0(c) &:= \{\, x \in A \mid c * x = 0 \,\}\ .\end{aligned}$$

mit zugehörigen Projektionen $P_1(c) := \mathrm{L}_c$, $P_0(c) := \mathrm{Id} - \mathrm{L}_c$.

[Weil $c{*}(a_j{*}a) = (c{*}c){*}(a_j{*}a) \underset{\text{(SQ1)}}{=} ((c{*}c){*}a_j){*}a = j\,a_j{*}a$ für $a_j \in A_j(c)$, $a \in A$ gilt, handelt es sich bei den $A_j(c)$ um Rechtsideale ($j \in \{1,\,0\}$).]

Außerdem gilt $A = A^1(c) \oplus A^0(c)$ als direkte Summe der R-Untermoduln

$$\begin{aligned}A^1(c) &:= \{\, x \in A \mid (x * c) * c = x \,\}\ , \\ A^0(c) &:= \{\, x \in A \mid (x * c) * c = 0 \,\}\ .\end{aligned}$$

mit zugehörigen Projektionen $P^1(c) := \mathrm{R}_c^2$, $P^0(c) := \mathrm{Id} - \mathrm{R}_c^2$.

8.4 Notiz (Rechtsmultiplikation auf Linkskomponenten)
Es gilt $\mathrm{R}_c^3\,x_1 = \mathrm{R}_c\,x_1$ und $\mathrm{R}_c^3\,x_0 = \mathrm{R}_c^2\,x_0$ für alle $x_1 \in A_1(c)$, $x_0 \in A_0(c)$.

[Wende $(\diamond)$ aus dem Beweis von Proposition 8.1 auf x_1 bzw. auf x_0 an.]

8.5 Hinweis (Verfeinerte rechtsseitige Zerlegung)
Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ haben wir die Zerlegung $A^1(c) = A^+(c) \oplus A^-(c)$ mit

$$\begin{aligned} A^+(c) &:= \{\, x \in A^1(c) \mid x * c = x \,\} , \\ A^-(c) &:= \{\, x \in A^1(c) \mid x * c = -x \,\}, \end{aligned}$$

also $A = A^+(c) \oplus A^-(c) \oplus A^0(c)$ als direkte Summe von R-Untermoduln, mit $P^+(c) := \frac{1}{2}(\mathrm{R}_c^2 + \mathrm{R}_c^3)$, $P^-(c) := \frac{1}{2}(\mathrm{R}_c^2 - \mathrm{R}_c^3)$, $P^0(c) = \mathrm{Id} - \mathrm{R}_c^2$ als zugehörigen Projektionen.

[Mit $X = A^1(c)$ und $\Psi : A^1(c) \longrightarrow A^1(c)$, $x \mapsto x * c$ liefert 3.7 die erste Zerlegung. Aus 8.1 (4) folgt $\mathrm{R}_c^2\, P^\pm(c) = P^\pm(c)$, $\mathrm{R}_c^3\, P^\pm(c) = \pm P^\pm(c)$, also $P^\sigma(c)\, P^{\sigma'}(c) = \begin{cases} P^\sigma(c) & \text{für } \sigma = \sigma' \\ \mathrm{O} & \text{für } \sigma \neq \sigma' \end{cases}$ $(\sigma, \sigma' \in \{+, -, 0\})$.]

8.6 Beobachtung (Zweiseitige Zerlegung)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra, die (SQ1) aus 5.2 erfüllt, sowie $c * c = c \in A$ idempotent.

(1) Dann gilt $A = A_1^1(c) \oplus A_1^0(c) \oplus A_0^1(c) \oplus A_0^0(c)$ als direkte Summe der R-Untermoduln

$$\begin{aligned} A_j^k(c) &:= A_j(c) \cap A^k(c) \qquad \text{für } j, k \in \{1,\, 0\} \\ &= \{\, x \in A \mid c * x = j\, x,\ (x * c) * c = k\, x \,\} \end{aligned}$$

mit zugehörigen Projektionen $P_j^k(c) := P_j(c)\, P^k(c)$.

(2) Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ gilt $A = A_1^+(c) \oplus A_1^-(c) \oplus A_1^0(c) \oplus A_0^+(c) \oplus A_0^-(c) \oplus A_0^0(c)$ mit den R-Untermoduln

$$A_j^\pm(c) := \{\, x \in A_j(c) \mid x * c = \pm x \,\} \quad \text{für } j \in \{1,\, 0\}$$

und zugehörigen Projektionen $P_j^\pm(c) := \frac{1}{2}(\mathrm{R}_c^2 \pm \mathrm{R}_c^3)\, P_j(c)$.

[Wegen $\mathrm{L}_c\, \mathrm{R}_c = \mathrm{R}_c\, \mathrm{L}_c$, vgl. 8.1 (2), haben wir $P_j(c)\, P^k(c) = P^k(c)\, P_j(c)$ und $P_j(c)\, P^\sigma(c) = P^\sigma(c)\, P_j(c)$ für alle $j, k \in \{1,\, 0\}$, $\sigma \in \{+, -, 0\}$.]

8.7 Satz (Peirce-Zerlegung semiquadratischer Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

(1) *Dann gilt* $A = A_1(c) \boxplus A_0(c)$ *als direkte Summe der* $\mathrm{S}_1(A)$*-Ideale*

$$\begin{aligned} A_1(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = x \,\}, \\ A_0(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = 0 \,\} \\ &= \{\, x \in A \mid c * x = x * c = 0 \,\} \end{aligned}$$

mit zugehörigen Projektionen $P_1(c) = \mathrm{L}_c$, $P_0(c) = \mathrm{Id} - \mathrm{L}_c$.

(2) *Ferner gilt* $A = A_1^1(c) \oplus A_1^0(c) \oplus A_0(c)$ *als direkte Summe von* $\mathrm{S}_1(A)$*-Untermoduln mit*

$$\begin{aligned} A_1^1(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = x,\ (x * c) * c = x \,\}, \\ A_1^0(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = x,\ (x * c) * c = 0 \,\} \\ &= \{\, x \in A \mid c * x = x,\ x * c = 0 \,\} \end{aligned}$$

und zugehörigen Projektionen $P_1^1(c) = \mathrm{R}_c^2$, $P_1^0(c) = \mathrm{L}_c - \mathrm{R}_c^2$.

(3) *Im Falle* $\frac{1}{2} \in R$ *haben wir* $A = A_1^+(c) \oplus A_1^-(c) \oplus A_1^0(c) \oplus A_0(c)$ *als direkte Summe von* $\mathrm{S}_1(A)$*-Untermoduln mit*

$$A_1^{\pm}(c) = \{\, x \in A \mid c * x = x,\ x * c = \pm x \,\}$$

und zugehörigen Projektionen $P_1^{\pm}(c) = \frac{1}{2}(\mathrm{R}_c^2 \pm \mathrm{R}_c^3)$.

Beweis:
Wir verwenden die einseitige Zerlegung aus 8.3 und die zweiseitige Zerlegung aus 8.6.

Nach 8.3 sind die $A_j(c)$ Rechtsideale und wegen

$$c * (x * a_j) \underset{\text{(SQ2)}}{=} x * (c * a_j) = j\, x * a_j \qquad \text{für alle } x \in A,\ a_j \in A_j(c)$$

auch Linksideale, $j \in \{1, 0\}$. Für $j = 1$, $a_1 = c$ erhalten wir $\mathrm{L}_c \mathrm{R}_c = \mathrm{R}_c$. Nun ergeben sich die angegebenen Zerlegungen und Projektionen aus 8.3 und 8.6.

(1) Wegen $c \in A_1(c)$ ist $x * c \in A_1(c) \cap A_0(c) = \{0\}$ für alle $x \in A_0(c)$, also $A_0(c) = \{\, x \in A \mid c * x = x * c = 0 \,\}$.

(2) Wir bemerken $A_1^0(c) = \{\, x \in A \mid c * x = x,\ x * c = 0 \,\}$, denn für alle $x \in A_1^0(c)$ gilt $x * c = ((x * c) * c) * c = 0$ nach 8.4.

$\square$

8.8 Korollar (Peirce-Komponenenten des quadratischen Kerns)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

(1) *Es gilt* $\mathrm{Sq}(A) = \mathrm{Sq}(A_1(c)) \boxplus \mathrm{Sq}(A_0(c))$ *als direkte Summe der beiden* $\mathrm{S}_1(A)$*-Ideale* $\mathrm{Sq}(A_j(c)) \lhd \mathrm{Sq}(A)$, $j \in \{1, 0\}$.

(2) *Wir haben*

$$\mathrm{Sq}(A_1(c)) = \mathrm{Sq}(A_1(c)) * c \oplus A_1^0(c)$$

mit $\mathrm{Sq}(A_1(c)) * c = \mathrm{Sq}(A) * c$.

(3) *Im Falle* $\frac{1}{2} \in R$ *gilt* $\mathrm{Sq}(A_1(c)) * c = A_1^+(c)$, *also*

$$\mathrm{Sq}(A_1(c)) = A_1^+(c) \oplus A_1^0(c).$$

Beweis:

(1) Es gilt $(x_1 + x_0) * (x_1' + x_0') = x_1 * x_1' + x_0 * x_0'$ für alle $x_j, x_j' \in A_j(c)$, $j \in \{1, 0\}$, daraus ergibt sich $\mathrm{Sq}(A_j(c)) \lhd \mathrm{Sq}(A)$ und die gewünschte Zerlegung von $\mathrm{Sq}(A)$.

(2) Für jedes $s \in \mathrm{Sq}(A_1(c))$ ist $s = s*c + (s - s*c)$ mit $s*c \in \mathrm{Sq}(A_1(c))*c$ und $s - s*c \in A_1^0(c)$. Die Summe ist direkt, denn $\mathrm{Sq}(A_1(c))*c \subseteq A_1^1(c)$.

Die zweite Behauptung folgt aus (1).

(3) Es ist klar, dass $\mathrm{Sq}(A_1(c)) * c \subseteq A_1^+(c)$. Die umgekehrte Inklusion gilt wegen $x = \frac{1}{2}(c * x + x * c) * c$ für alle $x \in A_1^+(c)$. □

8.9 Beispiele (Peirce-Zerlegungen)
Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Für das triviale Idempotent $c = 0$ einer semiquadratischen R-Algebra A liefert 8.7 die *triviale Zerlegung* von A in $A_1(0) = \{0\}$ und $A_0(0) = A$. In antikommutativen Algebren ist 0 das einzige idempotente Element.

(2) Ist Q eine *quadratische Algebra* mit Einselement 1_Q, so gilt in der zugehörigen semiquadratischen R-Algebra Q_* (linkskonjugierte Algebra, vgl. 4.8) $1_Q * 1_Q = \overline{1_Q} \cdot 1_Q = \overline{1_Q}$, das heißt 1_Q ist genau dann idempotent in Q_*, wenn Q eine kanonische Konjugation hat (vgl. 3.4). Dann ergibt sich

$$Q_{*1}(1_Q) = Q_*, \qquad Q_{*0}(1_Q) = \{0\}.$$

Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ (wegen $x * 1_Q = \overline{x}$)

$$Q_{*1}^{\,+}(1_Q) = \mathrm{S}(Q), \qquad Q_{*1}^{\,-}(1_Q) = \mathrm{V}(Q), \qquad Q_{*1}^{\,0}(1_Q) = \{0\},$$

Die Zerlegung gemäß 8.7 liefert hier also gerade die Zerlegung aus 3.8, und der quadratische Kern von Q_* ist wegen 8.8 (3) gerade der skalare Anteil von Q

$$\mathrm{Sq}(Q_*) = \mathrm{S}(Q) = R\,1_Q.$$

(3) Für eine kommutativ-assoziative Algebra A mit Multiplikation $*$ finden wir $A = A_1(c) \boxplus A_0(c)$ mit

$$\begin{aligned} A_1(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = x \,\} = c * A, \\ A_0(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = 0 \,\} = \mathrm{Ann}_A(c), \end{aligned}$$

die bekannte *Peirce-Zerlegung kommutativ-assoziativer Algebren.*

(Dabei ist $\mathrm{Ann}_A(c) = \{\, a \in A \mid a * c = 0 \,\}$ der *Annullator* von c in A.)

Zusammenfassung (Die Peirce-Zerlegung)

Die Peirce-Zerlegung semiquadratischer Algebren hat die Form

$$A = A_1^1(c) \oplus A_1^0(c) \oplus A_0(c)$$

mit

$$\begin{aligned} A_1^1(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = x,\ (x * c) * c = x \,\}, \\ A_1^0(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = x,\ x * c = 0 \,\}, \\ A_0(c) &= \{\, x \in A \mid c * x = x * c = 0 \,\}. \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir uns den multiplikativen Eigenschaften dieser Zerlegung zuwenden.

9 Multiplikative Eigenschaften

Hier betrachten wir die Komponenten der im vorigen Abschnitt hergeleiteten Peirce-Zerlegung semiquadratischer Algebren etwas genauer. Besonders das multiplikative Verhalten der verschiedenen Komponenten wird untersucht.

9.1 Feststellung (Multiplikation der linksseitigen Komponenten)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 8.7 (1) und Anhang A.5

(1) $A_1(c) * A_1(c) = A_1(c)$,

(2) $A_0(c) * A_0(c) \subseteq A_0(c)$,

(3) $A_1(c) * A_0(c) = \{0\}$,

(4) $A_0(c) * A_1(c) = \{0\}$.

[Die Inklusionen „$\subseteq$ “ergeben sich aus der Zerlegung $A = A_1(c) \boxplus A_0(c)$. Wegen $c \in A_1(c)$ und $c * x = x$ für alle $x \in A_1(c)$ gilt in (1) Gleichheit.]

9.2 Proposition (Multiplikation der zweiseitigen Komponenten)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 8.7 (2) *und Anhang* A.5

(1) $A_1^0(c) * A_1^1(c) = \{0\}$,

(2) $A_1^0(c) * A_1^0(c) = \{0\}$,

(3) $A_1^1(c) * A_1^0(c) \subseteq \mathrm{Sq}(A)$.

Beweis: Zunächst ist $z = c * z = c * z + z * c \in \mathrm{Sq}(A)$ für alle $z \in A_1^0(c)$.
(1),(2): Für alle $x \in A_1(c) = A_1^1(c) + A_1^0(c)$ haben wir $c * x = x$, also

$$z * x = z * (c * x) \underset{\text{(SQ)}}{=} (z * c) * x = 0 \qquad \text{für alle } z \in A_1^0(c).$$

(3): Nach (1) gilt $x * z = x * z + z * x \in \mathrm{Sq}(A)$ für alle $x \in A_1^1(c)$, $z \in A_1^0(c)$.
$\square$

9.3 Hilfssatz (Multiplikation der verfeinerten Komponenten)
Sei R ein kommutativer Ring mit $\frac{1}{2} \in R$ und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 8.7 (3) *und Anhang* A.5

(1) $A_1^+(c) * A_1^\sigma(c) = A_1^\sigma(c)$ *für jedes* $\sigma \in \{+, -, 0\}$,

(2) $A_1^-(c) * A_1^+(c) = A_1^-(c)$,

(3) $A_1^-(c) * A_1^0(c) \subseteq A_1^+(c) + A_1^0(c)$.

Beweis:

(1): Wegen $A_1^+(c) \subseteq \mathrm{Sq}(A)$ gilt

$$(x * y) * c \underset{\text{(SQ)}}{=} x * (y * c) = \sigma\, x * y \qquad \text{für alle } x \in A_1^+(c),\ y \in A_1^\sigma(c).$$

(2): Für alle $x \in A_1^+(c)$, $y \in A_1^-(c)$ haben wir

$$\begin{aligned} y * x = y * (x * c) &\underset{\text{(SQ)}}{=} x * (y * c) \\ &= -x * y, \end{aligned}$$

also $y * x \in A_1^-(c)$ nach (1).

(3) gilt nach 9.2 (3) und 8.8 (3). □

9.4 Beobachtung (Skalarer Anteil)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

In der assoziativen $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra $\mathrm{Sq}(A)$ (quadratischer Kern als Algebra über dem Multiplikationsring, vgl. 6.7 bzw. 6.1) ist

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_c(A) &:= \mathrm{Sq}(A) * c \\ &= \{\, s \in \mathrm{Sq}(A) \mid c * s = s * c = s \,\} \end{aligned}$$

eine kommutative Teilalgebra mit Einselement c, die wir wir den *skalaren Anteil* von A (bezüglich c) nennen und mit $\mathrm{S}_c(A)$ bezeichnen.

Durch $s\,x := s * x$ für alle $s \in \mathrm{S}_c(A)$, $x \in A_1(c)$ wird auf $A_1(c)$ eine $\mathrm{S}_c(A)$-Modulstruktur definiert, bezüglich der $A_1^1(c)$ und $A_1^0(c)$ Untermoduln sind und $A_1(c)$ (mit Multiplikation $*$) zu einer $\mathrm{S}_c(A)$-Algebra wird.

[Für $s' \in \mathrm{Sq}(A)$ und $s = s' * c$ bemerken wir $c * s = c * (s' * c) = s' * (c * c) = s$ und $s * c = (s' * c) * c = s' * (c * c) = s$, daher hat $\mathrm{S}_c(A)$ die angegebene Darstellung und c ist Einselement.

Da $\mathrm{Sq}(A)$ eine assoziative semiquadratische Algebra ist, gilt nach 5.5 (2) die Identität $s\,s'\,s'' = s'\,s\,s''$ für alle $s, s', s'' \in \mathrm{Sq}(A)$, daher ist $\mathrm{S}_c(A)$ als unitäre Teilagebra von $\mathrm{Sq}(A)$ kommutativ. Wegen 6.5 und $c\,x = c * x = x$ für alle $x \in A_1(c)$ ist $A_1(c)$ ein $\mathrm{S}_c(A)$-Modul und eine $\mathrm{S}_c(A)$-Algebra.]

9.5 Notiz (Skalarer Anteil und Multiplikationsring)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra mit Linkseinselement e.

Dann haben wir einen unitären $\mathrm{S}_1(A)$-Algebren-Isomorphismus

$$\mathrm{S}_e(A) \cong \mathrm{S}_1(A) \quad \text{via } s \leftrightarrow \mathrm{L}_s.$$

Ist $A = Q_*$ für eine quadratische Algebra Q mit kanonischer Konjugation, so gilt $\mathrm{Sq}(Q_*) = \mathrm{S}_{1_Q}(Q_*)$, also

$$\mathrm{Sq}(Q_*) \cong \mathrm{S}_1(Q_*) \text{ via } s \leftrightarrow \mathrm{L}_s.$$

[Die Zuordnung $s \mapsto \mathrm{L}_s$ liefert wegen (SQL) eine multiplikative $\mathrm{S}_1(A)$-lineare Abbildung mit $\mathrm{L}_e = \mathrm{Id}$, da e Linkseinselement ist. Surjektivität liegt vor, denn $\mathrm{L}_{s*e} = \mathrm{L}_s\,\mathrm{L}_e = \mathrm{L}_s$ gilt für alle $s \in \mathrm{Sq}(A)$ wegen (SQL), Injektivität haben wir, weil für $s \in \mathrm{S}_e(A)$ mit $\mathrm{L}_s = \mathrm{O}$ folgt $s = s * e = \mathrm{L}_s\, e = 0$.
Wegen $\tau(x * x) = \tau(n(x)\, 1_Q) = n(x)\, 1_Q = x * x$ für alle $x \in Q$ ergibt sich $s * 1_Q = \tau(s)\, 1_Q = \tau(s) = s$ für alle $s \in \mathrm{Sq}(Q_*)$.]

9.6 Lemma (Quadratischer Anteil)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

Dann ist $A_1^1(c) = \{\, x \in A \mid c * x = (x * c) * c = x \,\}$ ein $\mathrm{S}_c(A)$-Untermodul von $A_1(c)$. Versehen wir $A_1^1(c)$ mit der durch

$$x \cdot_c y := (((x * c) * y) * c) * c \quad \text{für alle } x, y \in A_1^1(c)$$

definierten Multiplikation, so erhalten wir eine quadratische $\mathrm{S}_c(A)$-Algebra, die wir mit $\mathrm{Q}_c(A)$ bezeichnen und quadratischen Anteil *von A (bezüglich c) nennen. Der quadratische Anteil $\mathrm{Q}_c(A)$ hat c als* Einselement,

$$\begin{aligned}
n_c &: \mathrm{Q}_c(A) \longrightarrow \mathrm{S}_c(A),\ n_c(x) := (x * x) * c && \textit{als } \text{Normform},\\
t_c &: \mathrm{Q}_c(A) \longrightarrow \mathrm{S}_c(A),\ t_c(x) := x * c + x && \textit{als } \text{Spurform},\\
\tau_c &: \mathrm{Q}_c(A) \longrightarrow \mathrm{Q}_c(A),\ \tau_c(x) := x * c && \textit{als } \text{kanonische Konjugation}.
\end{aligned}$$

Beweis:
Offenbar gilt $\mathrm{S}_c(A) * A_1^1(c) \subseteq A_1^1(c)$. Da $A_1(c)$ nach 9.4 eine $\mathrm{S}_c(A)$-Algebra ist, folgt $\mathrm{S}_c(A)$-Bilinearität von $\mu_c : A_1^1(c) \times A_1^1(c) \longrightarrow A_1^1(c),\ (x,y) \mapsto x \cdot_c y$. Weil $(c*c)*x = x$ und $(x*c)*c = x$ für alle $x \in A_1^1(c)$ gilt, ist $\mathrm{Q}_c(A)$ eine unitäre $\mathrm{S}_c(A)$-Algebra.

Zum Nachweis der charakteristischen Gleichung bemerken wir

$$\begin{aligned} x \cdot_c x &= (((x*c+c*x)*x)*c)*c - (((c*x)*x)*c)*c \\ &= (x*c+x)\,(x*c)*c - c\,(x*x)\,(c*c) \\ &= t_c(x)\,x - n_c(x)\,c \qquad\qquad \text{für alle } x \in A_1^1(c). \end{aligned}$$

Wegen $(x*c)*c = x$ gilt $t_c(x)*c = t_c(x)$, also $t_c(x) \in \mathrm{S}_c(A)$ sowie $\tau_c(x) = t_c(x)\,c - x = x*c$ für alle $x \in A_1^1(c)$, insbesondere $\tau_c(c) = c$. □

9.7 Bemerkungen (Quadratischer Anteil)

(1) Mit den Bezeichnungen aus 9.6 gilt $x*s = s*\tau_c(x)$ für alle $s \in \mathrm{S}_c(A)$, $x \in \mathrm{Q}_c(A)$.

[Nach (SQ) ist $x*(s*c) = s*(x*c)$ für alle $s \in \mathrm{S}_c(A)$, $x \in \mathrm{Q}_c(A)$.]

(2) Der quadratische Kern der linkskonjugierten Algebra des quadratischen Anteils $\mathrm{Q}_c(A)$ ist

$$\mathrm{Sq}(\mathrm{Q}_c(A)_*) = \mathrm{S}_c(A),$$

denn $\tau_c(q) \cdot_c q = (((q*c)*c)*q)*c)*c = (q*q)*c$ für alle $q \in \mathrm{Q}_c(A)$ und $\mathrm{S}_c(A) = \mathrm{Sq}(A)*c \subseteq A_1^1(c)$.

(3) Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ haben wir

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}(\mathrm{Q}_c(A)) = \mathrm{S}_c(A) = A_1^+(c), && \text{den skalaren Anteil,} \\ &\mathrm{V}(\mathrm{Q}_c(A)) = A_1^-(c), && \text{den vektoriellen Anteil (vgl. 3.8).} \end{aligned}$$

Für den *vektoriellen Anteil* schreiben wir kurz $\mathrm{V}_c(A)$ statt $\mathrm{V}(\mathrm{Q}_c(A))$.

9.8 Definition (Annullator-Anteil)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

Dann bezeichnen wir den $\mathrm{S}_1(A)$-Modul $\mathrm{Z}_c(A) := A_1^0(c)$ als *Annullator-Anteil* von A (bezüglich c). Für die Zerlegung $A_1(c) = \mathrm{Q}_c(A) \oplus \mathrm{Z}_c(A)$ als direkte Summe von $\mathrm{S}_1(A)$-Untermoduln sind die zugehörigen Projektionen $P_{\mathrm{Q}}(c), P_{\mathrm{Z}}(c) \in \mathrm{End}_{\mathrm{S}_1(A)}(A_1(c))$ definiert durch

$$P_{\mathrm{Q}}(c)\, x := (x * c) * c$$
$$P_{\mathrm{Z}}(c)\, x := x - (x * c) * c \quad \text{für alle } x \in A_1(c).$$

9.9 Fazit (Multiplikative Struktur der Peirce-Zerlegung)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

(1) Dann ist $A = A_1(c) \boxplus A_0(c)$ die direkte Summe der Ideale $A_1(c)$ und $A_0(c)$ in A, wobei c Linkseinselement von $A_1(c)$ ist und $A_0(c) = \mathrm{Ann}_A(c)$ gilt.

(2) Weiter haben wir $A_1(c) = \mathrm{Q}_c(A) \oplus \mathrm{Z}_c(A)$ als direkte Summe von $\mathrm{S}_1(A)$-Untermoduln mit dem *quadratischen Anteil* $\mathrm{Q}_c(A)$, in dem c Einselement ist, und dem *Annullatoranteil* $\mathrm{Z}_c(A)$, für den $\mathrm{Z}_c(A) * A = \{0\}$ gilt.

(3) Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ können wir wiederum $\mathrm{Q}_c(A) = \mathrm{S}_c(A) \oplus \mathrm{Z}_c(A)$ zerlegen in einen *skalaren Anteil* $\mathrm{S}_c(A)$ und einen *vektoriellen Anteil* $\mathrm{V}_c(A)$ (vgl. 3.8). Dabei ergibt sich für die Zerlegung der $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra als direkte Summe von $\mathrm{S}_1(A)$-Untermoduln $A = \mathrm{S}_c(A) \oplus \mathrm{V}_c(A) \oplus \mathrm{Z}_c(A) \oplus A_0(c)$ die folgende *multiplikative Struktur*.

	$\mathrm{S}_c(A)$	$\mathrm{V}_c(A)$	$\mathrm{Z}_c(A)$	$A_0(c)$
$\mathrm{S}_c(A)$	$\mathrm{S}_c(A)$	$\mathrm{V}_c(A)$	$\mathrm{Z}_c(A)$	$\{0\}$
$\mathrm{V}_c(A)$	$\mathrm{V}_c(A)$	$\mathrm{S}_c(A) + \mathrm{V}_c(A) + \mathrm{Z}_c(A)$	$\mathrm{S}_c(A) + \mathrm{Z}_c(A)$	$\{0\}$
$\mathrm{Z}_c(A)$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$A_0(c)$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$A_0(c)$

(4) In 10.9 wird sich zeigen, dass sich die Eintragungen in der obigen Multiplikationstafel nicht verbessern lassen.

Zusammenfassung (Multiplikative Eigenschaften)

Die linksseitige 1-Komponente $A_1(c)$ der Peirce-Zerlegung einer semiquadratischen Algebra A setzt sich aus einem *quadratischen Anteil* $\mathrm{Q}_c(A)$ und einem *Annullator-Anteil* $\mathrm{Z}_c(A)$ zusammen: $A_1(c) = \mathrm{Q}_c(A) \oplus \mathrm{Z}_c(A)$.

Auch der *skalare Anteil* $\mathrm{S}_c(A) = \mathrm{Sq}(A) * c \subseteq Q_c(A)$ kommt in der *multiplikativen Struktur* vor.

	$\mathrm{Q}_c(A)$	$\mathrm{Z}_c(A)$
$\mathrm{Q}_c(A)$	$\mathrm{Q}_c(A) + \mathrm{Z}_c(A)$	$\mathrm{S}_c(A) + \mathrm{Z}_c(A)$
$\mathrm{Z}_c(A)$	$\{0\}$	$\{0\}$

Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ lassen sich noch genauere Aussagen machen, vgl. 9.9 (3).

10 Annullatorerweiterungen

10.1 Proposition (Zerlegung der Multiplikation)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra mit Linkseinselement e, *also* $e * x = x$ *für alle* $x \in A$, *insbesondere* $A = A_1(e)$.

Dann gibt es eindeutig bestimmte $\mathrm{S}_1(A)$*-bilineare Abbildungen*

$$\begin{array}{llll}
\xi_e : Q_e(A) \times Z_e(A) \longrightarrow S_e(A) & \text{mit } \xi_e(e,z) = 0 & & \text{für alle } z \in Z_e(A), \\
\eta_e : Q_e(A) \times Z_e(A) \longrightarrow Z_e(A) & \text{mit } \eta_e(e,z) = z & & \text{für alle } z \in Z_e(A), \\
\zeta_e : Q_e(A) \times Q_e(A) \longrightarrow Z_e(A) & \text{mit } \zeta_e(e,q) = \zeta_e(q,e) = 0 & & \text{für alle } q \in Q_e(A),
\end{array}$$

die folgende Gleichung erfüllen:

$$(q+z) * (q'+z') = \tau_e(q) \cdot_e q' + \xi_e(q,z') + \zeta_e(q,q') + \eta_e(q,z')$$

für alle $q, q' \in Q_e(A)$, $z, z' \in Z_e(A)$, *wobei die Bezeichnungen* $q \cdot_e q' = (q * e) * q'$ *und* $\tau_e(x) = x * e$ *in 9.6 eingeführt wurden.*

Beweis:
Als Linkseinselement ist e ein idempotentes Element mit $A_1(e) = A$. Setze $\xi_e(q,z) := P_{\mathrm{Q}}(e)\,(q * z)$, $\eta_e(q,z) := P_{\mathrm{Z}}(e)\,(q * z)$, $\zeta_e(q,q') := P_{\mathrm{Z}}(e)\,(q * q')$.
Dann gilt $\xi_e(q,z) \in S_e(A)$ für alle $q \in Q$, $z \in Z_e(A)$, denn nach 9.2 (3) ist $Q_e(A) * Z_e(A) \subseteq \mathrm{Sq}(A)$, also $\xi_e(q,z) = ((q * z) * e) * e \in \mathrm{Sq}(A) * e$.
Die Abbildungen ξ_e, η_e, ζ_e sind $\mathrm{S}_1(A)$-bilinear, weil A eine $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra ist und es sich bei $P_{\mathrm{Q}}(e)$, $P_{\mathrm{Z}}(e)$ um $\mathrm{S}_1(A)$-lineare Abbildungen handelt, und

$$\begin{array}{lclclcll}
\xi_e(e,z) & = & P_{\mathrm{Q}}(e)\,(e * z) & = & P_{\mathrm{Q}}(e)\,z & = & 0 & \text{für alle } z \in Z_e(A), \\
\eta_e(e,z) & = & P_{\mathrm{Z}}(e)\,(e * z) & = & P_{\mathrm{Z}}(e)\,z & = & z & \text{für alle } z \in Z_e(A), \\
\zeta_e(e,q) & = & P_{\mathrm{Z}}(e)\,(e * q) & = & P_{\mathrm{Z}}(e)\,q & = & 0 & \text{für alle } q \in Q_e(A), \\
\zeta_e(q,e) & = & P_{\mathrm{Z}}(e)\,(q * e) & = & P_{\mathrm{Z}}(e)\,\tau_e(q) & = & 0 & \text{für alle } q \in Q_e(A).
\end{array}$$ □

10.2 Definition (Erweiterungsannullator)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra.

Als *Erweiterungsannullator* für A bezeichen wir einen $\mathrm{S}_1(A)$-Modul Z zusammen mit $\mathrm{S}_1(A)$-bilinearen Abbildungen ξ, η, ζ, die folgende (aus Proposition 10.1 bekannten) Eigenschaften haben:

$$\begin{array}{lll}
\xi : A \times Z \longrightarrow \mathrm{Sq}(A) & \text{und } \xi(s,z) = 0 & \text{für alle } s \in \mathrm{Sq}(A),\ z \in Z, \\
\eta : A \times Z \longrightarrow Z & \text{und } \eta(s,z) = s\,z & \text{für alle } s \in \mathrm{Sq}(A),\ z \in Z, \\
\zeta : A \times A \longrightarrow Z & \text{und } \zeta(s,a) = \zeta(a,s) = 0 & \text{für alle } s \in \mathrm{Sq}(A),\ a \in A.
\end{array}$$

(Bei der Bedingung für η wurde die Schreibweise aus 6.8 verwendet.)

Hat A ein Linkseinselement e, so nennen wir einen Erweiterungsannullator Z, ξ, η, ζ *linksunitär*, wenn $\eta(e, \cdot) = \mathrm{Id}_Z$ gilt, also $ez = z$ $(z \in Z)$.

10.3 Hilfssatz (Annullatorerweiterung)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra. Ferner sei Z, ξ, η, ζ ein Erweiterungsannullator für A (vgl. 10.2).

(1) *Dann ist $A \oplus Z$ versehen mit der Multiplikation*

$$(a \oplus z) * (a' \oplus z') := (a * a' + \xi(a, z')) \oplus (\eta(a, z') + \zeta(a, a'))$$

eine semiquadratische $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra, die wir die Annullatorerweiterung von A um Z, ξ, η, ζ nennen und mit $A[Z, \xi, \eta, \zeta]$ bezeichnen. Dafür gilt

$$\mathrm{Sq}(A[Z, \xi, \eta, \zeta]) \subseteq \mathrm{Sq}(A) \oplus Z$$

und $(\{0\} \oplus Z) * A[Z, \xi, \eta, \zeta] = \{0 \oplus 0\}$.

(2) *Hat A ein Linkseinselement und ist Z, ξ, η, ζ linksunitär, so ist $e \oplus 0$ Linkseinselement in $A[Z, \xi, \eta, \zeta]$ und es gilt* $\{0\} \oplus Z \subseteq \mathrm{Sq}(A[Z, \xi, \eta, \zeta])$.

Beweis:

(1) Wegen der vorausgesetzten $\mathrm{S}_1(A)$-Bilinearität von ξ, η, ζ ist die angegebene Multiplikation $\mathrm{S}_1(A)$-bilinear. Wir bemerken

$$(a \oplus z) * (a \oplus z) = (a * a + \xi(a, z)) \oplus (\eta(a, z) + \zeta(a, a)) \in \mathrm{Sq}(A) \oplus Z$$

für alle $a \in A$, $z \in Z$. Linksmultiplikation mit Elementen der Form $s \oplus z$ ($s \in \mathrm{Sq}(A)$, $z \in Z$) verhält sich wie skalare Vervielfachung mit s,

$$(s \oplus z) * (a' \oplus z') = s\, a' \oplus s\, z' = s\, (a' \oplus z')$$

für alle $s \in \mathrm{Sq}(A)$, $a' \in A$, $z, z' \in Z$, daher sind (SQ1) und (SQ2) erfüllt, das heißt $A[Z, \xi, \eta, \zeta]$ ist eine semiquadratische $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra, und die behauptete Inklusion gilt. Dass $\{0\} \oplus Z$ ganz $A[Z, \xi, \eta, \zeta]$ annulliert, ist klar nach Definition der Multiplikation in $A[Z, \xi, \eta, \zeta]$.

(2) Wegen $\eta(e, \cdot) = \mathrm{Id}_Z$ und des Verhaltens der Abbildungen ξ und ζ für Elemente des quadratischen Kernes haben wir

$$\begin{aligned}(e \oplus 0) * (a' \oplus z') &:= (e * a' + \xi(e, z')) \oplus (\eta(e, z') + \zeta(e, a')) \\ &= a' \oplus z'\end{aligned}$$

für alle $a' \in A$, $z' \in Z$, also auch

$$0 \oplus z' = (e \oplus 0) * (0 \oplus z') + (0 \oplus z') * e \in \mathrm{Sq}(A[Z, \xi, \eta, \zeta]). \qquad \square$$

10.4 Bemerkungen (Zerlegungen der Annullatorerweiterung)
Sei $c * c = c \in A$ in der Situation aus 10.3 ein idempotentes Element.

(1) Dann ist $c \oplus 0$ idempotentes Element in $A[Z, \xi, \eta, \zeta]$ mit

$$\begin{aligned} A[Z,\xi,\eta,\zeta]_1(c \oplus 0) &= A_1(c) \oplus Z_1(c), \\ A[Z,\xi,\eta,\zeta]_0(c \oplus 0) &= A_0(c) \oplus Z_0(c), \end{aligned}$$

wobei $Z_1(c) := \{ z \in Z \mid c\,z = z \}$ und $Z_0(c) := \{ z \in Z \mid c\,z = 0 \}$.

(Es ist $Z = Z_1(c) \oplus Z_0(c)$ direkte Summe von $\mathrm{S}_1(A)$-Untermoduln mit zugehörigen Projektionen $z \mapsto c\,z$ bzw. $z \mapsto z - c\,z$.)

(2) Ferner gilt $$\begin{aligned} A[Z,\xi,\eta,\zeta]_1^1(c \oplus 0) &= A_1^1(c) \oplus \{0\}, \\ A[Z,\xi,\eta,\zeta]_1^0(c \oplus 0) &= A_1^0(c) \oplus Z_1(c). \end{aligned}$$

(3) Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ haben wir $$\begin{aligned} A[Z,\xi,\eta,\zeta]_1^+(c \oplus 0) &= A_1^+(c) \oplus \{0\}, \\ A[Z,\xi,\eta,\zeta]_1^-(c \oplus 0) &= A_1^-(c) \oplus \{0\}. \end{aligned}$$

[Es gilt $\mathrm{L}_{c \oplus 0}(a' \oplus z') = c\,a \oplus c\,z$ und $\mathrm{R}_{c \oplus 0}(a \oplus z) = a * c \oplus 0$ für alle $a, a' \in A$, $z, z' \in Z$.]

10.5 Notation (Direkte Summe von linearen Abbildungen)
Sei R ein Ring, X_1, X_2, Y_1, Y_2 seien R-Moduln.

Dann wird durch

$$\begin{aligned} &\Upsilon : \mathrm{Hom}_R(X_1, Y_1) \oplus \mathrm{Hom}_R(X_2, Y_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X_1 \oplus X_2, Y_1 \oplus Y_2), \\ &\qquad \Upsilon(f_1 \oplus f_2)\,(x_1 \oplus x_2) := f_1(x_1) \oplus f_2(x_2) \end{aligned}$$

für alle $f_1 \in \mathrm{Hom}_R(X_1, Y_1)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_R(X_2, Y_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ eine injektive R-lineare Abbildung definiert.

Statt $\Upsilon(f_1 \oplus f_2)$ werden wir meist einfach $f_1 \oplus f_2$ schreiben, etwa wie in $f_1 \oplus f_2 : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2$.

10.6 Lemma (Wiederholte Annullatorerweiterung)
Sei R ein kommutativer Ring, A eine semiquadratische R-Algebra mit Linkseinselement e und Z, ξ, η, ζ ein linksunitärer Erweiterungsannullator für A.

Dann ist $e' := e \oplus 0$ Linkseinselement von $A' := A[Z, \xi, \eta, \zeta]$. Ist nun Z', ξ', η', ζ' ein Erweiterungsannullator für A', so gibt es einen Erweiterungsannullator $Z'', \xi'', \eta'', \zeta''$ für A mit

$$\begin{aligned} A[Z'', \xi'', \eta'', \zeta''] &= A'[Z', \xi', \eta', \zeta'] \\ &= A[Z, \xi, \eta, \zeta][Z', \xi', \eta', \zeta']. \end{aligned}$$

Beweis:

Weil $\mathrm{L}_{s\oplus 0}(a\oplus z) = s*a\oplus s\,z$ für alle $s\in\mathrm{Sq}(A)$, $a\in A$, $z\in Z$ gilt, erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \quad : \quad & \mathrm{S}_1(A) \longrightarrow \mathrm{S}_1(A[Z,\xi,\eta,\zeta]) \\ & r\,\mathrm{Id}_A + \mathrm{L}_s \mapsto r\,\mathrm{Id} + \mathrm{L}_{s\oplus 0} = (r\,\mathrm{Id}_A + \mathrm{L}_s) \oplus \nu_Z(r\,\mathrm{Id} + \mathrm{L}_s, \cdot) \end{aligned}$$

mit der Abbildung $\nu_Z : \mathrm{S}_1(A)\times Z \longrightarrow Z$, $\nu_Z(\gamma,z) := \gamma\, z$ (skalare Multiplikation im $\mathrm{S}_1(A)$-Modul Z) und der Schreibweise ohne Υ aus 10.5. Durch $\mathcal{F}$ wird Z' ein $\mathrm{S}_1(A)$-Modul, daher ist auch $Z'' := Z\oplus Z'$ ein $\mathrm{S}_1(A)$-Modul.

Bezeichnen $\mathrm{pr}_A : A[Z,\xi,\eta,\zeta] \longrightarrow A$ und $\mathrm{pr}_Z : A[Z,\xi,\eta,\zeta] \longrightarrow Z$ die kanonischen Projektionen, so definieren wir $\mathrm{S}_1(A)$-bilineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \xi'' &: A\times Z'' \longrightarrow \mathrm{Sq}(A) \\ \eta'' &: A\times Z'' \longrightarrow Z'' \\ \zeta'' &: A\times A \ \ \longrightarrow Z'' \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \xi''(a_1, z_2\oplus z_2') &:= \xi(a_1,z_2) + \mathrm{pr}_A(\xi'(a_1\oplus 0, z_2')), \\ \eta''(a_1, z_2\oplus z_2') &:= \big(\eta(a_1,z_2) + \mathrm{pr}_Z(\xi'(a_1\oplus 0, z_2'))\big) \oplus \eta'(a_1\oplus 0, z_2'), \\ \zeta''(a_1,a_2) &:= \zeta(a_1,a_2)\oplus\zeta'(a_1\oplus 0, a_2\oplus 0) \end{aligned}$$

für alle $a_1,a_2\in A$, $z_2\in Z$, $z_2'\in Z'$. Wegen

$$\mathrm{Sq}(A') = \mathrm{Sq}(A[Z,\xi,\eta,\zeta]) \subseteq \mathrm{Sq}(A)\oplus Z$$

gilt $\mathrm{pr}_A(\xi'(a_1\oplus 0, z_2')) \in \mathrm{Sq}(A)$, so dass Z'',ξ'',η'',ζ'' ein Erweiterungsannullator für A ist.

Schließlich ist für alle $a_1,a_2\in A$, $z_1,z_2\in Z$, $z_1',z_2'\in Z'$

$$(a_1\oplus z_1\oplus z_1') * (a_2\oplus z_2\oplus z_2') = a_3\oplus z_3\oplus z_3'$$

mit

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1*a_2 + \xi(a_1,z_2) + \mathrm{pr}_A(\xi'(a_1\oplus z_1, z_2')), \\ z_3 &= \eta(a_1,z_1) + \zeta(a_1,a_2) + \mathrm{pr}_Z(\xi'(a_1\oplus z_1, z_2')), \\ z_3' &= \eta'(a_1\oplus z_1, z_2') + \zeta'(a_1\oplus z_1, a_2\oplus z_2). \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\xi'(0\oplus z_1, z_2') = 0$, $\zeta'(a_1\oplus z_1, 0\oplus z_2) = \zeta'(0\oplus z_1, a_2\oplus z_2) = 0$, da $\{0\}\oplus Z\subseteq \mathrm{Sq}(A')$. sowie $\eta'(0\oplus z_1, z_2') = 0$, weil $\mathrm{L}_{0\oplus z} = \mathrm{O}$ für alle $z\in Z$. Demnach ergibt sich

$$a_3\oplus z_3\oplus z_3' = \big(a_1*a_2 + \xi''(a_1, z_2\oplus z_2')\big)\oplus\big(\eta''(a_1, z_2\oplus z_2') + \zeta''(a_1,a_2)\big).$$

$\square$

10.7 Beobachtungen (Quadratischer Ring des quadratischen Anteils)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

(1) Der quadratische Kern (vgl. 6.1) der linkskonjugierten Algebra (vgl. 4.8) des quadratischen Anteils $\mathrm{Q}_c(A)$ von A (vgl. 9.6) wird erzeugt von den Quadraten $\tau_c(q) \cdot_c q = P_{\mathrm{Q}}(q*q) = ((q*q)*c)*c = (q*q)*c$ mit $q \in \mathrm{Q}_c(A)$, also gilt $\mathrm{Sq}(\mathrm{Q}_c(A)_*) = \mathrm{S}_c(A)$.

(2) Wir haben einen R-Algebren-Isomorphismus

$$\begin{aligned} &\phi : \mathrm{S}_c(A) \longrightarrow \mathrm{S}_1(\mathrm{Q}_c(A)_*),\ s \mapsto \phi_s \\ &\qquad \text{mit } \phi_s(q) := s * q \text{ für alle } q \in \mathrm{Q}_c(A). \end{aligned}$$

[ϕ ist eine R-lineare Abbildung mit $\mathrm{S}_1(\mathrm{Q}_c(A)_*) = R\,\mathrm{Id} + \phi[\mathrm{Sq}(\mathrm{Q}_c(A)_*]$. Nach (1) und wegen $\phi_c = \mathrm{Id}$ ist ϕ surjektiv. Ist andererseits $s \in \mathrm{Kern}\,\phi$, so folgt $s = s * c = \phi_s(c) = 0$, also ist ϕ injektiv.]

10.8 Satz (Semiquadratische Algebren mit Linkseinselement)
Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra mit Linkseinselement e.

Dann ist A als $\mathrm{S}_e(A)$-Algebra isomorph zu einer Annullatorerweiterung der linkskonjugierten Algebra einer quadratischen $\mathrm{S}_e(A)$-Algebra. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 8, Lemma 10.1 *und Hilfssatz* 10.3 *gilt nämlich*

$$A \cong \mathrm{Q}_e(A)_*[\mathrm{Z}_e(A), \xi_e, \eta_e, \zeta_e].$$

(Hier haben wir $\mathrm{S}_1(\mathrm{Q}_e(A)_*)$ gemäß 10.7 (2) mit $\mathrm{S}_e(A)$ identifiziert.)
Insbesondere ist jede semiquadratische R-Algebra mit Linkseinselement isomorph zu einer semiquadratischen R-Algebra der Form $Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$.

Beweis:
Als $\mathrm{S}_e(A)$-Modul ist $A = A_1(e) = \mathrm{Q}_e(A) \oplus \mathrm{Z}_e(A)$ zu $\mathrm{Q}_e(A)_*[\mathrm{Z}_e(A), \xi_e, \gamma_e, \delta_e]$ isomorph via $q + z \mapsto q \oplus z$. Dies ist ein $\mathrm{S}_e(A)$-Algebren-Isomorphismus, denn für alle $q, q' \in \mathrm{Q}_e(A)$, $z, z' \in \mathrm{Z}_e(A)$ gilt nach 10.1 bzw. 10.3

$$\begin{aligned} (q + z) * (q' + z') &= \big(\tau_e(q) \cdot_e q' + \xi_e(q, z')\big) + \big(\eta_e(q, z') + \zeta_e(q, q')\big) \\ (q \oplus z) * (q' \oplus z') &= \big(\tau_e(q) \cdot_e q' + \xi_c(q, z')\big) \oplus \big(\eta_e(q, z') + \zeta_e(q, q')\big). \end{aligned} \qquad \square$$

10.9 Hinweis (Multiplikative Struktur)

Sei R ein kommutativer Ring mit $\frac{1}{2} \in R$, Q sei eine quadratische Algebra über R und Z, ξ, η, ζ sei ein linksunitärer Erweiterungsannullator für Q_*.

Dann ergibt sich für die semiquadratische R-Algebra $A := Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ mit Linkseinselement $e := 1_Q \oplus 0$ nach 10.4 und 8.9 (2) die folgende Zerlegung der $\mathrm{S}_e(A)$-Algebra $A = S \oplus V \oplus Z$ als direkte Summe der $\mathrm{S}_e(A)$-Untermoduln

$$\begin{aligned} S &:= \mathrm{S}_e(A) = \mathrm{S}(Q) \oplus \{0\}, \\ V &:= \mathrm{V}_e(A) = \mathrm{V}(Q) \oplus \{0\}, \\ Z &:= \mathrm{Z}_e(A) = \ \{0\} \ \oplus \ Z, \end{aligned}$$

mit der folgenden *multiplikativen Struktur*.

	S	V	Z
S	S	V	Z
V	V	$\tau[V] \cdot V + \zeta(V, V)$	$\xi(V, Z) + \eta(V, Z)$
Z	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$

Die Eintragungen der Multiplikationstafel aus 9.9 (3) sind also optimal.

Zusammenfassung (Annullatorerweiterungen)

Semiquadratische Algebren mit Linkseinselement sind bis auf Isomorphie Annullatorerweiterungen der linkskonjugierten Algebra Q_* einer quadratischen Algebra Q mit kanonischer Konjugation: $A \cong Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ mit einem passenden linksunitären Erweiterungsannullator Z, ξ, η, ζ. Diese Einsicht veranlasst uns dazu, im nächsten Abschnitt die Multiplikationsalgebra derartiger Annullatorerweiterungen zu untersuchen.

11 Die Multiplikationsalgebra

Die in den vorangegangenen Abschnitten mit Hilfe der Peirce-Zerlegung und ihrer multiplikativen Eigenschaften gewonnenen Strukturinformationen über semiquadratische Algebren verwenden wir jetzt dazu, die Multiplikationsalgebra semiquadratischer Algebren zu untersuchen, und anschließend den Aufbau von Idealen in semiquadratischen Algebren zu beschreiben.

11.1 Feststellung (Multiplikationsalgebra)

Sei R ein kommutativer Ring und A eine (semiquadratische) R-Algebra mit Multiplikation $*$.

Die von allen Links- und Rechtsmultiplikationen $\mathrm{L}_a, \mathrm{R}_b \in \mathrm{End}_R(A)$ mit $a, b \in A$ ($\mathrm{L}_a\, x = a * x$ und $\mathrm{R}_b\, x = x * b$ für alle $x \in A$) erzeugte unitäre Teilalgebra der assoziativen R-Algebra $\mathrm{End}_R(A)$ ist die folgende Algebra

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(A) &:= R\,[\{\, \mathrm{L}_a \mid a \in A\,\} \cup \{\, \mathrm{R}_b \mid b \in B\,\}] \\ &= R\,[\{\, \mathrm{L}_a + \mathrm{R}_b \mid a, b \in A\,\}]. \end{aligned}$$

Diese Algebra, die *Multiplikationsalgebra* von A, hat als Elemente die Linearkombinationen von Endomorphismen der Form $r\ \mathrm{Id} + \prod_{k=1}^{m} (\mathrm{L}_{a_k} + \mathrm{R}_{b_k})$ mit $r \in R$, $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in A$, $m \geqq 1$.

11.2 Lemma (Zerlegung der Multiplikationsalgebra)

Sei R ein kommutativer Ring und A sei eine semiquadratische R-Algebra, sowie $c * c = c \in A$ ein idempotentes Element.

Mit den linksseitigen Komponenten $A_1(c)$ und $A_0(c)$ der Peirce-Zerlegung bezüglich c (vgl. 8.3) liefert Υ aus 10.5 einen Isomorphismus von R-Algebren

$$\mathrm{M}(A_1(c)) \boxplus \mathrm{M}(A_0(c)) \cong \mathrm{M}(A_1(c) \boxplus A_0(c)) \cong \mathrm{M}(A).$$

Beweis: (Wir verwenden die Schreibweise ohne Υ aus 10.5.)
Wegen $\mathrm{L}_{a_1} \oplus \mathrm{L}_{a_0} = \mathrm{L}_{a_1 \oplus a_0}$, $\mathrm{R}_{b_1} \oplus \mathrm{R}_{b_0} = \mathrm{R}_{b_1 \oplus b_0}$ für $a_j, b_j \in A_j(c)$ und $(\varphi_1 \oplus \varphi_0)\,(\varphi_1' \oplus \varphi_0') = (\varphi_1\, \varphi_1') \oplus (\varphi_0\, \varphi_0')$ für $\varphi_j, \varphi_j' \in \mathrm{M}(A_j(c))$, $j \in \{1, 0\}$, liegt ein surjektiver R-Algebren-Homomorphismus vor, der auch injektiv ist, da $\mathrm{Kern}(\varphi_1 \oplus \varphi_0) = \mathrm{Kern}\, \varphi_1 \oplus \mathrm{Kern}\, \varphi_0$. □

11.3 Notation (Abbildungen zur Annullatorerweiterung)
Sei R ein kommutativer Ring, A sei eine semiquadratische R-Algebra und Z, ξ, η, ζ sei ein Erweiterungsannullator für A (vgl. 10.2).

Wir definieren nun zwei $\mathrm{S}_1(A)$-quadratische Abbildungen $\hat{\xi}$ und $\hat{\eta}$ sowie eine $\mathrm{S}_1(A)$-bilineare Abbildung $\hat{\zeta}$ durch

$$\begin{array}{lll} \hat{\xi}(a \oplus z) & := \xi(a, z) \oplus 0 & \text{für alle } a \in A, z \in Z, \\ \hat{\eta}(a \oplus z) & := 0 \oplus \eta(a, z) & \text{für alle } a \in A, z \in Z, \\ \hat{\zeta}(a \oplus z, a' \oplus z') & := 0 \oplus \zeta(a, a') & \text{für alle } a, a' \in A, z, z' \in Z. \end{array}$$

Die Bilinearisierungen $\mathrm{D}\,\hat{\xi}$ und $\mathrm{D}\,\hat{\eta}$ sind gegeben durch

$$\begin{array}{l} \mathrm{D}\,\hat{\xi}(a \oplus z, a' \oplus z') = (\xi(a, z') + \xi(a', z)) \oplus 0, \\ \mathrm{D}\,\hat{\eta}(a \oplus z, a' \oplus z') = 0 \oplus (\eta(a, z') + \eta(a', z)) \end{array}$$

für alle $a, a' \in A$, $z, z' \in Z$.

11.4 Proposition (Erzeugende der Multiplikationsalgebra)
Sei R ein kommutativer Ring und Q sei eine quadratische R-Algebra mit Einselement 1_Q und kanonischer Konjugation τ $(\tau(1_Q) = 1_Q)$. Für die linkskonjugierte Algebra Q_* sei Z, ξ, η, ζ ein linksunitärer Erweiterungsannullator. (Vgl. 4.8, 10.2 und 10.6.)

Die Multiplikationsalgebra der Annullatorerweiterung $A := Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ wird als unitäre Teilalgebra der assoziativen R-Algebra $\mathrm{End}_R(A)$ durch Endomorphismen der folgenden acht Arten erzeugt:

$$\begin{array}{rrcrcll} \textbf{(i)} & \mathrm{L}_q \oplus \mathrm{O} & : & q' \oplus z' & \mapsto & q * q' \oplus 0 & \text{für } q \in Q, \\ \textbf{(ii)} & \mathrm{R}_{q'} \oplus \mathrm{O} & : & q \oplus z & \mapsto & q * q' \oplus 0 & \text{für } q' \in Q, \\ \textbf{(iii)} & \mathrm{D}\,\hat{\xi}\,(q \oplus 0, \cdot) & : & q' \oplus z' & \mapsto & \xi(q, z') \oplus 0 & \text{für } q \in Q, \\ \textbf{(iv)} & \mathrm{D}\,\hat{\xi}\,(\cdot, 0 \oplus z') & : & q \oplus z & \mapsto & \xi(q, z') \oplus 0 & \text{für } z' \in Z, \\ \textbf{(v)} & \mathrm{D}\,\hat{\eta}\,(q \oplus 0, \cdot) & : & q' \oplus z' & \mapsto & 0 \oplus \eta(q, z') & \text{für } q \in Q, \\ \textbf{(vi)} & \mathrm{D}\,\hat{\eta}\,(\cdot, 0 \oplus z') & : & q \oplus z & \mapsto & 0 \oplus \eta(q, z') & \text{für } z' \in Z, \\ \textbf{(vii)} & \hat{\zeta}\,(q \oplus 0, \cdot) & : & q' \oplus z' & \mapsto & 0 \oplus \zeta(q, q') & \text{für } q \in Q, \\ \textbf{(viii)} & \hat{\zeta}\,(\cdot, q' \oplus 0) & : & q \oplus z & \mapsto & 0 \oplus \zeta(q, q') & \text{für } q' \in Q. \end{array}$$

Für alle $q, q' \in Q$, $z, z' \in Z$ gilt dabei

$$\begin{array}{l} \mathrm{L}_{q \oplus z} \;= \mathrm{L}_q \oplus \mathrm{O} \,+\, \mathrm{D}\,\hat{\xi}(q \oplus 0, \cdot) \,+\, \mathrm{D}\,\hat{\eta}(q \oplus 0, \cdot) \,+\, \hat{\zeta}(q \oplus 0, \cdot), \\ \mathrm{R}_{q' \oplus z'} = \mathrm{R}_{q'} \oplus \mathrm{O} + \mathrm{D}\,\hat{\xi}(\cdot, 0 \oplus z') + \mathrm{D}\,\hat{\eta}(\cdot, 0 \oplus z') + \hat{\zeta}(\cdot, q' \oplus 0), \end{array}$$

also $\mathrm{R}_{1_Q \oplus 0}(q \oplus z) = \tau(q) \oplus 0$ *für alle $q \in Q$, $z \in Z$.*
(Links- und Rechtsmultiplikation sind gegeben durch $\mathrm{L}_q\, q' = \mathrm{R}_{q'}\, q = q * q'$ für alle $q, q' \in Q$, die Schreibweise ohne Υ wie in (i) und (ii) wurde in 10.5 eingeführt, die Definition der Abbildungen $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ und $\hat{\zeta}$ findet sich in 11.3.)

Beweis:
Die gewünschten Darstellungen der Links- und Rechtsmultiplikationen als Summen von Endomorphismen der angegebenen Arten (i) bis (viii) lässt sich elementweise verifizieren.

Wegen der Linksunitarität von Z, ξ, η, ζ ist $e := 1_Q \oplus 0$ Linkseinselement von A, daher haben wir (mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 8 und 9) die Zerlegung $A = A_1(e) = Q_e(A) \oplus Z_e(A)$ als direkte Summe von $\mathrm{S}_1(A)$-Untermoduln mit zugehörigen Projektionen $P_{\mathrm{Q}}(e) = \mathrm{R}_e^2$, $P_{\mathrm{Z}}(e) = \mathrm{Id} - \mathrm{R}_e^2$, also $P_{\mathrm{Q}}(e), P_{\mathrm{Z}}(e) \in \mathrm{M}(A)$. Nun zeigt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_e(q \oplus z) &= (q * 1_Q + \xi(q,0)) \oplus (\eta(q,0) + \zeta(q, 1_Q)) \\ &= \tau(q) \oplus 0,\end{aligned}$$

so dass $\mathrm{Q}_e(A) = Q \oplus \{0\}$ und $\mathrm{Z}_e(A) = \{0\} \oplus Z$ gilt.

Alle angegebenen Endomorphismen liegen in der Multiplikationsalgebra:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_q \oplus \mathrm{O} \quad &= P_{\mathrm{Q}}(e)\, \mathrm{L}_{q\oplus 0}\;\; P_{\mathrm{Q}}(e), \\
\mathrm{R}_{q'} \oplus \mathrm{O} \quad &= P_{\mathrm{Q}}(e)\, \mathrm{R}_{q'\oplus 0}\, P_{\mathrm{Q}}(e), \\
\mathrm{D}\,\hat{\xi}(q \oplus 0, \cdot) &= P_{\mathrm{Q}}(e)\, \mathrm{L}_{q\oplus 0}\;\; P_{\mathrm{Z}}(e)\,, \\
\mathrm{D}\,\hat{\xi}(\cdot, 0 \oplus z') &= P_{\mathrm{Q}}(e)\, \mathrm{R}_{0\oplus z'}\, P_{\mathrm{Q}}(e), \\
\mathrm{D}\,\hat{\eta}(q \oplus 0, \cdot) &= P_{\mathrm{Z}}(e)\; \mathrm{L}_{q\oplus 0}\;\; P_{\mathrm{Z}}(e)\,, \\
\mathrm{D}\,\hat{\eta}(\cdot, 0 \oplus z') &= P_{\mathrm{Z}}(e)\; \mathrm{R}_{0\oplus z'}\, P_{\mathrm{Q}}(e), \\
\hat{\zeta}(q \oplus 0, \cdot) \quad &= P_{\mathrm{Z}}(e)\; \mathrm{L}_{q\oplus 0}\;\; P_{\mathrm{Q}}(e), \\
\hat{\zeta}(\cdot, q' \oplus 0) \quad &= P_{\mathrm{Z}}(e)\; \mathrm{R}_{q'\oplus 0}\, P_{\mathrm{Q}}(e).
\end{aligned}$$

□

11.5 Bemerkungen (Konjugierte Multiplikationsalgebra)

(1) Ist Q eine quadratische Algebra mit kanonischer Konjugation τ, so entsteht die Multiplikationsalgebra der linkskonjugierten Algebra Q_* (vgl. 4.8) durch Adjunktion von τ zur Multiplikationsalgebra von Q:

$$\mathrm{M}(Q_*) = \mathrm{M}(Q)[\tau].$$

Wir werden die Abkürzung $\mathrm{M}_\tau(Q) := \mathrm{M}(Q)[\tau]$ verwenden und von der *konjugierten Multiplikationsalgebra* sprechen.

[Wir haben $\mathrm{M}(Q) = R[\{\, \mathrm{L}^{\boldsymbol{\cdot}}_q + \mathrm{R}^{\boldsymbol{\cdot}}_{q'} \mid q, q' \in Q \,\}]$ mit $\mathrm{L}^{\boldsymbol{\cdot}}_q\, x := q \cdot x$, $\mathrm{R}^{\boldsymbol{\cdot}}_{q'}\, x := x \cdot q'$ für alle $x \in Q$ $(q, q' \in Q)$. Wegen $\mathrm{L}_q = \mathrm{L}^{\boldsymbol{\cdot}}_{\tau(q)}$ und $\mathrm{R}_{q'} = \mathrm{R}^{\boldsymbol{\cdot}}_{q'}\,\tau$ mit $\tau = \mathrm{R}_{1_Q}$ $(q, q' \in Q)$ folgt die Behauptung.]

(2) Die $\mathrm{M}_\tau(Q)$-Untermoduln von Q sind gerade die τ-stabilen Ideale in Q.

(Eine Teilmenge U von Q heißt *τ-stabil*, wenn $\tau[U] \subseteq U$ gilt.)

(3) In der Situation von Proposition 11.4 gilt (mit der Schreibweise ohne Υ aus 10.5) $\psi \oplus \mathrm{O} \in \mathrm{M}(Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta])$ für alle $\psi \in \mathrm{M}_\tau(Q)$.

[$\mathrm{M}_\tau(Q)$ ist die lineare Hülle aller Endomorphismen der folgenden Form $\psi = \prod_{k=1}^{m} (\mathrm{L}_{q_k} + \mathrm{R}_{q'_k} + r_k\,\tau)$ mit $q_1,\ldots,q_m,q'_1,\ldots,q'_m \in Q$, $r_1,\ldots,r_m \in R$. Nun gilt $\psi\oplus\mathrm{O} \in \mathrm{M}(Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta])$ wegen 11.4, da $r\ \mathrm{Id} = \mathrm{L}_{r\,1_Q}$ für $r \in R$ und $\psi_1\psi_2 \oplus \mathrm{O} = (\psi_1 \oplus \mathrm{O})\,(\psi_2 \oplus \mathrm{O})$ für alle $\psi_1,\psi_2 \in \mathrm{End}_R(Q)$.]

11.6 Bezeichnungen (Monoidalgebra-Operation)
Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Sei Ω ein *Monoid*, also eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, für die es ein neutrales Element 1_Ω gibt. Die *Monoidalgebra* $R\,[\Omega]$ ist der freie R-Modul $R^{(\Omega)}$ versehen mit der durch bilineare Fortsetzung von $\mathrm{e}_\omega \cdot \mathrm{e}_{\omega'} := \mathrm{e}_{\omega\,\omega'}$ definierten Multiplikation, $(\mathrm{e}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ bezeichne hier die Standardbasis von $R^{(\Omega)}$. Es gilt also

$$\sum_{j=1}^{l} r_j\,\mathrm{e}_{\omega_j} \cdot \sum_{k=1}^{m} r'_k\,\mathrm{e}_{\omega'_k} = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} (r_j \cdot r_k)\,\mathrm{e}_{\omega_j\,\omega'_k}$$

für $r_1,\ldots,r_l,r'_1,\ldots,r'_m \in R$, $\omega_1,\ldots,\omega_l,\omega'_1,\ldots,\omega'_m \in \Omega$ $(l,m \in \mathbb{N})$.

Die R-Algebra $R\,[\Omega]$ ist assoziativ und hat $\mathrm{e}_\Omega := \mathrm{e}_{1_\Omega}$ als Einselement.

(2) Die Monoidalgebra $R\,[\Omega]$ aus (1) besitzt folgende *universelle Eigenschaft* (siehe [LehrbAlg2] Korollar 52.2).

Ist B eine assoziative R-Algebra mit Einselement 1_B und $h : \Omega \longrightarrow B$ eine multiplikative Abbildung mit $h(1_\Omega) = 1_B$, so gibt es genau einen R-Algebren-Homomorphismus $\phi_h : R\,[\Omega] \longrightarrow B$ mit $\phi_h(\mathrm{e}_\omega) = h(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

(Dabei heißt $h : \Omega \longrightarrow B$ *multiplikativ*, wenn $h(\omega\,\omega') = h(\omega) \cdot h(\omega')$ für alle $\omega,\omega' \in \Omega$ gilt.)

(3) Das *freie Monoid* $\mathrm{Mo}(X)$ einer Menge X besteht aus allen endlichen Folgen $(x_1,\ldots,x_l)$ von Elementen $x_1,\ldots,x_l \in X$ $(l \in \mathbb{N})$. Die *leere Folge* $(m = 0)$, die wir mit $()$ bezeichnen, ist dann neutrales Element bezüglich der durch $(x_1,\ldots,x_l)\,(x'_1,\ldots,x'_m) := (x_1,\ldots,x_l,x'_1,\ldots,x'_m)$

für alle $x_1, \ldots, x_l, x'_1, \ldots, x'_m \in X$ $(l, m \in \mathbb{N})$ definierten assoziativen Verknüpfung auf $\mathrm{Mo}(X)$.

Die Monoidalgebra $R\,[\,\mathrm{Mo}(X)\,]$ zum freien Monoid $\mathrm{Mo}(X)$ nennen wir kurz *freie Monoidalgebra*.

(4) Sei $f : X \times Y \longrightarrow Y$ eine R-bilineare Abbildung (mit R-Moduln X, Y).

Durch die rekursive Definition $f_\star() := \mathrm{Id}_Y$ und

$$f_\star(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) := f_\star(x_1, \ldots, x_m) \circ f(x_{m+1}, \cdot) \quad \text{für alle } x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} \in X,\ m \in \mathbb{N}$$

erhalten wir eine multiplikative Abbildung $f_\star : \mathrm{Mo}(X) \longrightarrow \mathrm{End}_R(Y)$.

Gemäß der universellen Eigenschaft der Monoidalgebra, vgl. (2), gibt es einen R-Algebren-Homomorphismus $f_\circ : R\,[\,\mathrm{Mo}(X)\,] \longrightarrow \mathrm{End}_R(Y)$ mit $f_\circ(\mathrm{e}_{(x_1,\ldots,x_l)}) = f_\star(x_1, \ldots, x_l)$ für alle $x_1, \ldots, x_l \in X$, $l \in \mathbb{N}$, also $f_\circ(\mathrm{e}_{()}) = \mathrm{Id}_Y$ und $f_\circ(\mathrm{e}_{(x_1,\ldots,x_l)}) = f(x_1, \cdot) \circ \cdots \circ f(x_l, \cdot)$.

11.7 Schreibweise (Vielfache in Moduln über Monoidalgeben)

Wenn aus dem Zusammenhang abgelesen werden kann, auf welche bilineare Abbildung $f : X \times Y \longrightarrow Y$ Bezug genommen wird, so bezeichnen wir mit $\omega.y$ das Produkt von $e_\omega \in R\,[\,\mathrm{Mo}(X)\,]$ $(\omega \in \Omega)$ und $y \in Y$ bezüglich der $R\,[\,\mathrm{Mo}(X)\,]$-Linksmodulstruktur auf Y, die zu der in 11.6 (3) eingeführten Abbildung $f_\circ : R\,[\,\mathrm{Mo}(X)\,] \longrightarrow \mathrm{End}_R(Y)$ gehört.

Wir haben also $(x).y = f(x, y)$ für alle $x \in X$, $y \in Y$, und schreiben wir einfach $\omega_1.\omega_2.y$ statt $\omega_1.(\omega_2.y)$ für $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{Mo}(X)$, $y \in Y$, so gilt

$$(x_1, \ldots, x_l).y = (x_1).\ \cdots\ .(x_l).y \quad \text{für alle } x_1, \ldots, x_l \in X,\ y \in Y.$$

Sind Teilmengen U von X und V von Y gegeben, so bezeichne

$$U.V := \mathrm{Lin}_R(\{\,(u_1, \ldots, u_l).v \mid u_1, \ldots, u_l \in U,\ l \in \mathbb{N},\ v \in V\,\})$$

die lineare Hülle der Menge aller Produkte von endlich vielen (eventuell auch gar keinen) Faktoren der Form (u), $u \in U$, mit einem $v \in V$.

11.8 Notiz (Untermoduln über der freien Monoidalgebra)

Die $R[\,\mathrm{Mo}(X)\,]$-Untermoduln von Y sind gerade diejenigen Untermoduln des R-Moduls Y, die X*-stabil* (bezüglich f) sind, für die also $f(X,V) \subseteq V$ gilt (und damit auch $X.V \subseteq V$). Demnach ist $X.V = R[\,\mathrm{Mo}(X)\,]\,V$ der durch V erzeugte X-stabile Untermodul von Y.

(Für jede Teilmenge V von Y haben wir $V \subseteq X.V$.)

11.9 Hilfssatz (Ideale semiquadratischer Algebren)

Sei R ein kommutativer Ring und Q sei eine quadratische Algebra über R mit Einselement 1_Q und kanonischer Konjugation τ $(\tau(1_Q) = 1_Q)$. Weiter sei Z, ξ, η, ζ ein linksunitärer Erweiterungsannullator für die linkskonjugierte Algebra Q_*. (Vgl. 4.8, 10.2 und 10.6.)

(1) *Für ein τ-stabiles Ideal U in Q ist*

$$\mathrm{I}_Q(U) := (U \oplus \mathrm{Z}_U) + \big(\xi(U,Z) + \xi(Q,\mathrm{Z}_U)\big)\,(Q \oplus Z)$$
$$\text{mit}\quad \mathrm{Z}_U := Q.\big(\eta(U,Z) + \zeta(U,Q) + \zeta(Q,U)\big)$$

das von $U \oplus \{0\}$ erzeugte Ideal in $Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$.

(Dabei bezeichnet $Q.V$ das in 11.7 eingeführte Produkt für den zu η gehörigen $R[\,\mathrm{Mo}(Q)\,]$-Linksmodul Z.)

(2) *Für einen Q-stabilen Untermodul V von Z ist*

$$\mathrm{I}_Z(V) := (\{0\} \oplus V) + \xi(Q,V)\,(Q \oplus Z)$$

das von $\{0\} \oplus V$ erzeugte Ideal in $Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$.

(3) *Für eine Teilmenge $W \subset Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$ ist*

$$\mathrm{I}(W) := \mathrm{I}_Q(\mathrm{M}_\tau(Q)\ \mathrm{pr}_Q[W]) + \mathrm{I}_Z(Q.\,\mathrm{pr}_Z[W])$$

das von W erzeugte Ideal in $Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$.

(Dabei bezeichnen $\mathrm{pr}_Q : Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta] \longrightarrow Q$, $\mathrm{pr}_Z : Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta] \longrightarrow Z$ die kanonischen Projektionen und $Q.\,\mathrm{pr}_Z[W]$ das in 11.7 eingeführte Produkt.)

Beweis:

Die Ideale von $Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$ sind die $\mathrm{M}(Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta])$-Untermoduln.

(1) Proposition 11.4 zeigt, dass $\xi(U,Z)\oplus\{0\}$, $\{0\}\oplus \mathrm{Z}_U$, $\xi(Q,\mathrm{Z}_U)\oplus\{0\}$ und damit auch $\xi(Q,\mathrm{Z}_U)\,(Q\oplus Z)$ in dem von $U\oplus\{0\}$ erzeugten Ideal enthalten sind.

Wegen $\xi(Q,Z)\subseteq \mathrm{Sq}(Q_*)$ ist $\big(\xi(U,Z)+\xi(Q,\mathrm{Z}_U)\big)\,(Q\oplus Z)$ ein Ideal in $Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$. Das ist nun auch für $\mathrm{I}_Q(U)$ der Fall, denn U ist ein $\mathrm{M}_\tau(Q)$-Untermodul und $\eta(Q,\mathrm{Z}_U)\subseteq Q.\mathrm{Z}_U\subseteq \mathrm{Z}_U$, weil Z_U ein Q-stabiler Untermodul von Z ist.

(2) Proposition 11.4 zeigt, dass $\xi(Q,V)\,(Q\oplus Z)$ in dem von $\{0\}\oplus V$ erzeugten Ideal enthalten sind.

Wegen $\eta(Q,V)\subseteq Q.V\subseteq V$ ist $\mathrm{I}_Z(V)$ ein Ideal in $Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$.

(3) Mit dem τ-stabilen Ideal $U := \mathrm{M}_\tau(Q)\,\mathrm{pr}_Q[W]$ von Q und dem Q-stabilen Untermodul $V := Q.\,\mathrm{pr}_Z[W]$ von Z ist $\mathrm{I}(W)$ die Summe der Ideale $\mathrm{I}_Q(U)$ und $\mathrm{I}_Z(V)$. Wegen $\mathrm{pr}_Q(q\oplus z)\oplus 0 = \mathrm{R}_e^2(q\oplus z)$ und $0\oplus\mathrm{pr}_Z(q\oplus z) = (\mathrm{Id}-\mathrm{R}_e^2)(q\oplus z)$ für alle $q\in Q$, $z\in Z$ sind $\mathrm{pr}_Q[W]\oplus\{0\}$ und $\{0\}\oplus\mathrm{pr}_Z[W]$, und damit auch $U\oplus\{0\}$ und $\{0\}\oplus V$, in dem von W erzeugten Ideal enthalten. Dieses ist gleich $\mathrm{I}(W)=\mathrm{I}_Q(U)+\mathrm{I}_Z(V)$, weil $\mathrm{I}_Q(U)$ und $\mathrm{I}_Z(V)$ nach (1) beziehungsweise (2) Ideale sind. □

Zusammenfassung (Die Multiplikationsalgebra)

Die Multipikationsalgebra $\mathrm{M}(A)$ einer Algebra der Form $A = Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$ mit quadratischer Algebra Q wird erzeugt von Endomorphismen-Arten, die in engem Zusammenhang mit der Multiplikation von Q oder mit einer der Abbildungen ξ, η oder ζ stehen (vgl. Proposition 11.4). Die Ideale solcher Algebren setzen sich aus zwei Anteilen I_Q und I_Z zusammen, die nur durch Elemente von Q bezeihungsweise von Z erzeugt werden. (Für die genaue Ideal-Darstellung siehe 11.9.)

12 Einfache semiquadratische Algebren

Dieser Abschnitt befasst sich mit Eigenschaften einfacher semiquadratischer Algebren und gibt ein Beispiel für derartige Algebren, bei dem der quadratische Anteil nicht einfach ist. Als das Hauptergebnis dieser Arbeit ist das *Einfachheitskriterium* 12.7 enthalten. Dieses läßt die große Wahlfreiheit sichtbar werden, die bei der Konstruktion einfacher semiquadratischer Algebren mit Linkseinselement vorhanden ist.

12.1 Erinnerung (Einfache Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring.

Eine R-Algebra mit Multiplikation $*$ heißt *einfach*, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(I) Das einzige von Null verschiedene Ideal von A ist gleich A.

(II) Es gilt $A * A \neq \{0\}$.

12.2 Notiz (Einfachheit als Modul)
Da die von Null verschiedenen Ideale gerade die von Null verschiedenen $\mathrm{M}(A)$-Moduln sind, bedeutet die Bedingung (I) aus 12.1, dass A als Linksmodul über der Multiplikationsalgebra $\mathrm{M}(A)$ einfach ist.
(Dabei heißt in von Null verschiedener Linksmodul X über einem Ring S *einfach*, wenn X der einzige von Null verschiedene Untermodul von X ist, wenn also $S\,x = X$ für alle $x \in X$ mit $x \neq 0$ gilt.)

12.3 Lemma (Zentroid einfacher Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring und A eine einfache R-Algebra.

Dann ist das Zentroid $\Gamma(A)$ ein Körper.

(Das Zentroid wurde in 6.7 (5) definiert.)

Beweis: (Den Beweis für den Körperfall $R = \Phi$ hat [Ja62], p. 290f.)

Es gilt $\Gamma(A) = \mathrm{End}_{\mathrm{M}(A)}(A)$, das heißt das Zentroid ist der Endomorphismenring von A als Linksmodul über der Multiplikationsalgebra $\mathrm{M}(A)$. (Der in der Theorie assoziativer Algebren gebräuchlichen Konvention, nach der Elemente des Zentroids von der rechten Seite operieren, wenn die Elemente der Multiplikationsalgebra von links operieren, schließen wir uns hier nicht an.)

Nach 12.2 ist A als $\mathrm{M}(A)$-Linksmodul einfach, folglich ist der Endomorphismenring $\mathrm{End}_{\mathrm{M}(A)}$ eine Divisionsalgebra. (Jedes von Null verschiedene $\gamma \in \Gamma(A)$ ist surjektiv, da $\gamma[A]$ ein von Null verschiedenes Ideal ist, und injektiv, weil der Kern von γ nicht von Null verschieden sein kann.)

Es ist $A * A$ ein Ideal der einfachen Algebra A, das nach 12.1 (II) von Null verschieden ist, daher haben wir $A * A = A$ gemäß 12.1 (I). In dieser Situation ist $\Gamma(A)$ kommutativ, denn es gilt

$$\begin{aligned}[\gamma_1, \gamma_2](a * b) &= \gamma_1(\gamma_2(a * b)) - \gamma_2(\gamma_1(a * b)) \\ &= \gamma_1(a * \gamma_2(b)) - \gamma_2(\gamma_1(a) * b) \\ &= \gamma_1(a) * \gamma_2(b) - \gamma_1(a) * \gamma_2(b) = 0\end{aligned}$$

für alle $a, b \in A$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(A)$. □

12.4 Proposition (Linksunitäre einfache semiquadratische Algebren)
Sei R ein kommutativer Ring.

Für eine einfache semiquadratische R-Algebra A sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) *A hat ein Linkseinselement.*

(b) *Es gilt* $\mathrm{S}(A) = \mathrm{S}_1(A)$.

(c) *Das Multiplikationsideal* $\mathrm{S}(A)$ *ist von Null verschieden.*

(d) *Es gilt* $\mathrm{Sq}(A) * A = A$.

(e) *Es gibt $a, b \in A$ mit* $a^2 * b \neq 0$.

Im Falle $\frac{1}{2} \in R$ sind dazu außerdem folgende Aussagen äquivalent.

(f) *Es gilt* $\mathrm{S}(A) = \Gamma(A)$.

(g) *Das Multiplikationsideal* $\mathrm{S}(A)$ *ist ein Körper.*

Beweis:
(a) $\Rightarrow$ (b): Ist e Linkseinselement, so gilt $\mathrm{Id} = \mathrm{L}_e \in \mathrm{S}(A) \lhd \mathrm{S}_1(A)$, s. 6.7 (5).
(b) $\Rightarrow$ (c): Es gilt $\mathrm{Id} \in \mathrm{S}_1(A) \lhd \mathrm{S}(A)$.

(c) $\Rightarrow$ (a):
Nach Voraussetzung gibt es ein $s \in \mathrm{Sq}(A)$ mit von Null verschiedener Linksmultiplikation $\mathrm{L}_s \in \mathrm{S}(A) \subseteq \Gamma(A)$. Nun liefert Lemma 12.3 ein $\gamma \in \Gamma(A)$ mit $\gamma\,\mathrm{L}_s = \mathrm{Id}$, also gilt $x = \gamma(s * x) = \gamma(s) * x$ für alle $x \in A$, das heißt $\gamma(s)$ ist Linkseinselement von A.

(a) $\Rightarrow$ (d): Ist e Linkseinselement, so gilt $e = e * e \in \mathrm{Sq}(A)$ und $e * A = A$.

(d) $\Rightarrow$ (e) ist klar.

(e) $\Rightarrow$ (c): Wegen $a^2 * b \neq 0$ ist $\mathrm{L}_{a^2} \in \mathrm{S}(A)$ von Null verschieden.

(a) $\Rightarrow$ (f): Ist e Linkseinselement, so gilt $\mathrm{Id} = \mathrm{L}_e \in \mathrm{S}(A) \lhd \Gamma(A)$, s. 6.7 (6).

(f) $\Rightarrow$ (g) gilt nach 12.3.

(g) $\Rightarrow$ (c) ist klar. □

12.5 Bemerkung (Zentral-einfache semiquadratische Algebren)

Sei R ein kommutativer Ring mit $\frac{1}{2} \in R$.

Nach 12.4 (f) sind einfache semiquadratische R-Algebren mit Linkseinselement als $\mathrm{S}_1(A)$-Algebren zentral-einfach, denn $\mathrm{S}(A) \subseteq \mathrm{S}_1(A) \subseteq \Gamma(A)$ gilt nach 6.7.

(Eine S-Algebra A heißt *zentral*, wenn $\Gamma(A) = S\,\mathrm{Id}$ gilt, und sie wird *zentral-einfach* genannt, wenn sie zentral und einfach ist.)

12.6 Beobachtung (Skalarer Anteil ist Körper)

Sei R ein kommutativer Ring mit $\frac{1}{2} \in R$ und Q sei eine quadratische Algebra über R mit Einselement 1_Q und kanonischer Konjugation τ $(\tau(1_Q) = 1_Q)$. Weiter sei Z, ξ, η, ζ ein linksunitärer Erweiterungsannullator für die linkskonjugierte Algebra Q_*.

Wenn die Annullatorerweiterung $A := Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ einfach ist, dann ist

$$\mathrm{Sq}(Q_*) = \mathrm{S}(Q) = R\,1_Q \ \text{ ein Körper.}$$

[Sei $r\,1_Q$ von Null verschieden $(r \in R)$. Dann gilt $rA = A$, da rA ein von Null verschiedenes Ideal in A ist. Nun gibt es $s \in \mathrm{S}(Q)$, $v \in \mathrm{V}(Q)$, $z \in Z$ mit $r((s+v) \oplus z) = 1_Q \oplus 0$, d. h. $r\,1_Q \cdot s = rs = 1_Q$ wegen $Q = \mathrm{S}(Q) \oplus \mathrm{V}(Q)$.]

12.7 Satz (Einfachheitskriterium)
Sei F ein Körper, Q sei eine quadratische Algebra über F mit Einselement 1_Q und kanonischer Konjugation τ $(\tau(1_Q) = 1_Q)$ und für die linkskonjugierte Algebra Q_* sei Z, ξ, η, ζ ein linksunitärer Erweiterungsannullator, $Z \neq \{0\}$. (Vgl. 4.8, 10.2 und 10.6.)

Dann ist die semiquadratische F-Algebra $Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ genau dann einfach, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

(A) *Für jedes $z \in Z$ mit $z \neq 0$ gibt es $q_0, q_1, \dots, q_l \in Q$, $l \in \mathbb{N}$, mit*

$$\xi(q_0, (q_1, \dots, q_l).z) \neq 0.$$

(Vgl. 11.7 wegen der Schreibweise $(q_1, \dots, q_l).z$ für $\eta_\star(q_1, \dots, q_l)z$.)

(B) *Für jedes von Null verschiedene τ-stabile Ideal I in Q ist eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt:*

(i) $\xi(I, Z) \neq \{0\}$,

(ii) $\eta(I, Z) + \zeta(I, Q) + \zeta(Q, I) \neq \{0\}$.

Beweis: Setze $A := Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ und $e := 1_Q \oplus 0$.
Wir bemerken zunächst, dass die Bedingung (A) äquivalent ist zur folgenden Bedingung (A′).

(A′) Für jeden von Null verschiedenen Q-stabilen Untermodul V von Z gilt $\xi(Q, V) \neq \{0\}$.

Jetzt zeigen wir die *Notwendigkeit*, der Bedingungen (A′) und (B).

(A′) : Weil $\mathrm{I}_Z(V) = (\{0\} \oplus V) + \xi(Q, V)\,(Q \oplus Z)$ aus 11.9 (2) ein von Null verschiedenes Ideal der einfachen Algebra A ist, haben wir $\mathrm{I}_Z(V) = A$, also $\xi(Q, V) \neq \{0\}$.

(B) : Angesichts 11.5 (2) haben wir nach 11.9 (1) für $U := I$ folgendes von Null verschiedenes Ideal in A

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_Q(U) &= (U \oplus \mathrm{Z}_U) + \big(\xi(U, Z) + \xi(Q, \mathrm{Z}_U)\big)\,(Q \oplus Z) \\ &= (U + T_U\, Q) \oplus (\mathrm{Z}_U + T_U\, Z) \end{aligned}$$

mit $T_U := \xi(U, Z) + \xi(Q, \mathrm{Z}_U)$, also gilt $\mathrm{I}_Q(U) = A$, das heißt wir haben $Z = \mathrm{Z}_I + T_I\, Z$. Wegen $Z \neq \{0\}$ erhalten wir $\mathrm{Z}_I \neq \{0\}$ oder $T_I \neq \{0\}$; im ersten Fall folgt (ii), da $\mathrm{Z}_I = Q.\big(\eta(I, Z) + \zeta(I, Q) + \zeta(Q, I)\big)$, der zweite Fall führt zu (i) oder zu (ii), je nach dem ob $\xi(I, Z) \neq \{0\}$ oder $\xi(Q, \mathrm{Z}_I) \neq \{0\}$ gilt.

Nun zeigen wir, dass die Bedingungen (B) und (C) auch *hinreichend* sind.

Sei $q \oplus z$ ein von Null verschiedenes Element von A ($q \in Q$, $z \in Z$). Wir weisen nach, dass ein $\varphi \in \mathrm{M}(A)$ existiert mit $\varphi(q \oplus z) = e$.

1. Fall: $z \neq 0$.

Nach (B) gibt es $q_0, q_1, \dots, q_l \in Q$ mit $s := \xi\big(q_0, (q_1, \dots, q_l).z\big) \neq 0$ und $s \in \mathrm{Sq}(Q_*) = F\,1_Q$, also gilt $\varphi(q \oplus z) = e$, mit dem (unter Verwendung der Bezeichnungen aus Proposition 11.4) wie folgt definierten Endomorphismus

$$\varphi := s^{-1}\, \mathrm{D}\,\hat{\xi}(q_0 \oplus 0, \cdot)\; \mathrm{D}\,\hat{\eta}(q_1 \oplus 0, \cdot) \cdots \mathrm{D}\,\hat{\eta}(q_l \oplus 0, \cdot) \in \mathrm{M}(A).$$

2. Fall: $q \neq 0$.

Das von q erzeugte τ-stabile Ideal in Q bezeichnen wir mit $I := \mathrm{M}_\tau(Q)\, q$ (vgl. 11.5). Dann ist eine der Bedingungen (i) oder (ii) aus (C) erfüllt.

(i): Es gibt $x \in I$ und $z' \in Z$ mit $s_0 := \xi(x, z') \neq 0$. Wähle $\psi_0 \in \mathrm{M}_\tau(Q)$ mit $x = \psi_0(q)$. Dann ist $e = \varphi_0(q \oplus z)$ für

$$\varphi_0 := s_0^{-1}\, \mathrm{D}\,\hat{\xi}(\cdot, 0 \oplus z')\, (\psi_0 \oplus \mathrm{O}) \in \mathrm{M}(A) \qquad \text{nach 11.5 (3).}$$

(ii): Die folgenden drei Möglichkeiten kommen in Betracht.

- Es gibt $x_1 \in I$ und $z_1' \in Z$ mit $z_1 := \eta(x_1, z_1') \neq 0$.
  Wähle ein $\psi_1 \in \mathrm{M}_\tau(Q)$ mit $x_1 = \psi_1(q)$. Dann haben wir
  $$\varphi_1 := \mathrm{D}\,\hat{\eta}(\cdot, 0 \oplus z_1')\, (\psi_1 \oplus \mathrm{O}) \in \mathrm{M}(A)$$
  und $0 \oplus z_1 = \varphi_1(q \oplus z)$. Durch Anwendung des obigen 1. Falles finden wir ein $\varphi_1' \in \mathrm{M}(A)$ mit $e = \varphi_1'(0 \oplus z_1) = \varphi(q \oplus z)$, für $\varphi := \varphi_1'\, \varphi_1 \in \mathrm{M}(A)$.
- Es gibt $x_2 \in I$ und $q_2' \in Q$ mit $z_2 := \zeta(x_2, q_2') \neq 0$.
  Wähle ein $\psi_2 \in \mathrm{M}_\tau(Q)$ mit $x_2 = \psi_2(q)$. Dann haben wir
  $$\varphi_2 := \hat{\zeta}(\cdot, q_2' \oplus 0)\, (\psi_2 \oplus \mathrm{O}) \in \mathrm{M}(A)$$
  und $0 \oplus z_2 = \varphi_2(q \oplus z)$. Anwendung des 1. Falles liefert auch hier die Behauptung.
- Es gibt $q_3 \in Q$ und $x_3' \in I$ mit $z_3 := \zeta(q_3, x_3') \neq 0$.
  Auch hier kann ähnlich wie in den vorigen Punkten argumentiert werden.

□

12.8 Hinweis (Nicht einfache quadratische Algebra)
Eine semiquadratische Algebra der Form $Q_*[Z,\xi,\eta,\zeta]$ kann einfach sein, auch wenn Q echte von Null verschiedene τ-stabile Ideale besitzt.

Sei dazu $Q := F[\varepsilon]$, die Algebra der dualen Zahlen über einem Körper F (vgl. 2.3 (5)), in der $F\,\varepsilon$ ein τ-stabiles Ideal ist. Mit $Z := F$, $S := F\,1_Q$, $\xi : Q \times Z \longrightarrow S$, $\xi(q,z) := \beta(q,z)\,1_Q$, wobei $\beta(r\,1_Q + s\,\varepsilon, t) := s \cdot t$ und $\eta(r\,1_Q + s\,\varepsilon, t) := r \cdot t$ für alle $r,s,t \in F$ (sowie $\zeta = 0$), betrachten wir die Annullatorerweiterung $A := Q_*[Z,\xi,\eta,0]$. Dann ist A eine semiquadratische Algebra mit Basis $e,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ für $e := 1_Q \oplus 0$, $\varepsilon_1 := \varepsilon \oplus 0$ und $\varepsilon_2 := 0 \oplus 1_F$, wobei e Linkseinselement von A ist und die folgenden Gleichungen gelten $\varepsilon_1 * e = -\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 * \varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 * \varepsilon_2 = e$, $\varepsilon_2 * x = 0$ für alle $x \in A$. Nach dem Einfachheitskriterium 12.7 ist A einfach, da (A) erfüllt ist, weil $\xi(\varepsilon,t) = t\,1_Q$ für alle $t \in F$ gilt, und (B) erfüllt ist, weil für $q = r\,1_Q + s\,\varepsilon \in Q$ mit $q \neq 0$ stets $\xi(r\,1_Q + s\,\varepsilon, 1_F) = s\,e \neq 0$ oder $\eta(r\,1_Q + s\,\varepsilon, 1_F) = r \neq 0$ gilt.

12.9 Spezialfälle (Einfachheitsbedingungen)
Sei F ein Körper.

(1) Die Bedingung (A) aus dem Einfachheitskriterium 12.7 ist jedenfalls dann erfüllt, wenn ξ von Null verschieden ist und für jedes $z \in Z \setminus \{0\}$ gilt $Q.z = Z$.

Falls die Abbildung $Q \longrightarrow \mathrm{Abb}(Z,Q)$, $q \mapsto \xi(q,\cdot)$ für jedes $q \in Q$ injektiv ist, gilt (A), ohne dass eine Forderung an die durch η induzierte Operation von Q auf Z zu stellen wäre.

(2) Die Bedingung (B) aus dem Einfachheitskriterium 12.7 ist jedenfalls dann erfüllt, wenn mindestens eine der Abbildungen ξ,η,ζ von Null verschieden ist, und Q sich als das einzige τ-stabile Ideal in Q erweist, das von Null verschieden ist. Letzteres ist sicherlich gewährleistet, falls die quadratische Algebra Q einfach ist, da ja Q in diesem Fall bereits das einzige von Null verschiedene Ideal in Q ist.

Zusammenfassung (Einfache semiquadratische Algebren)

Zunächst konnten wir feststellen, dass einfache semiquadratische Algebren im Falle $\mathrm{Sq}(A) * A \neq \{0\}$ ein Linkseinselement besitzen (vgl. Proposition 12.5). Als Hauptresultat dieser Arbeit erlaubt es das *Einfachheitskriterium* 12.7 viele einfache semiquadratische Algebren mit Linkseinselement zu konstruieren. Dieses *Ergebnis* wird nun noch etwas ausführlicher diskutiert.

Diskussion

Die in dieser Arbeit eingeführte und untersuchte Klasse der semiquadratischen Algebren enthält viele einfache Algebren mit Linkseinselement.

Ausgehen können wir dabei von einer einfachen quadratischen Algebra Q beliebiger Dimension d. Für $d \geqq 3$ sind beispielsweise die quadratischen Algebren $\mathrm{Q}_e(X, \vartheta)$ mit Basispunkt e und symmetrischer Bilinearform ϑ, aus 2.7 (1) einfach, wenn ϑ *nichtausgeartet* ist (siehe [BrKoe66] Kap. VI § 5 Satz 5.7, Seite 197), das heißt wenn $\vartheta(x, Q) = \{0\}$ nur mit $x = 0$ gilt. Für die linkskonjugierte Algebra Q_* einer solchen einfachen quadratischen Algebra Q können wir eine Annullatorerweiterung mit einem linksunitären Erweiterungsannullator Z, ξ, η, ζ vornehmen und erhalten eine linksunitäre semiquadratische Algebra $A := Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$. Das Einfachheitskriterium (Satz 12.7) gibt zwei Bedingungen (A) und (B) an, deren Vorliegen garantiert, dass A einfach ist. (Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist $A := Q_*[Z, \xi, \eta, \zeta]$ als $\mathrm{S}_1(A)$-Algebra zentral-einfach nach 12.5, falls der Grundkörper F von *Charakteristik ungleich* 2 ist, das heißt wenn $1_F + 1_F \neq 0$ gilt.)

Die Bedingung (B) ist wegen der Einfachheit von Q automatisch erfüllt, wenn mindestens eine der bilinearen Abbildungen ξ, η, ζ von Null verschieden ist. Wir wenden uns nun der Bedingung (A) zu. Ist $1_Q, b_1, \ldots, b_\ell$ eine Basis von Q (also $d = \ell + 1$), und sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell \in \mathrm{End}_F(Z)$ gegeben, so können wir $\eta(b_j, \cdot) = \varphi_j$ für $1 \leqq j \leqq \ell$ wählen (wegen Linksunitarität ist $\eta(1_Q, \cdot) = \mathrm{Id}_Z$). Die zu (A) gleichwertige Bedingung (A$'$) aus dem Beweis von Satz 12.7 ist dann erfüllt, wenn für jedes $z \in Z \smallsetminus \{0\}$ die Menge $\xi(Q, F[\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell]\, z)$ von Null verschieden ist. Durch Übergang zur Matrizendarstellung linearer und bilinearer Abbildungen wird deutlich, wie leicht es für endlich-dimensionales Z ist, Endomorphismen $\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell$ und eine Bilineareform β zu konstruieren, für die Bedingung (A$'$) erfüllt ist mit $\xi(q, z) := \beta(q, z)\, 1_Q$ für alle $q \in Q$, $z \in Z$.

Die Klasse der semiquadratischen Algebren hat sich somit als eine beachtenswerte Quelle einfacher nicht-assoziativer Algebren erwiesen.

A Algebren

In dieser Arbeit betrachten wir Algebren, in denen das Assoziativgesetz für die Multiplikation nicht zu gelten braucht. Hier werden die *Grundbegriffe* aus der Theorie der nicht notwendig assoziativen Algebren bereitgestellt.

Wie auch sonst in dieser Arbeit nehmen wir an, dass Ringe R immer ein Einselement besitzen und dass R-Moduln stets unitär sind.

A.1 Nicht-assoziative Algebren Sei R ein kommutativer Ring. Eine (nicht notwendig assoziative, kurz *nicht-assoziative*) *R-Algebra* ist ein R-Modul A, der mit einer (als *Multiplikation* bezeichneten) R-bilinearen Abbildung $\mu_A : A \times A \longrightarrow A$ versehen ist. Es gilt also

(Alg1) $\quad (x + x') * y = x * y + x' * y \quad$ für alle $x, x', y \in A$,

(Alg2) $\quad x * (y + y') = x * y + x * y' \quad$ für alle $x, y, y' \in A$,

(Alg3) $\quad r(x * y) = (r\,x) * x = x * (r\,y) \quad$ für alle $r \in R$, $x, y \in A$.

Statt $\mu_A(x, y)$ werden wir meist $x \cdot y$ oder $x * y$ schreiben.

A.2 Kommutativität, Assoziativität

Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra mit Multiplikation $*$.

Dann heißt A *kommutativ*, wenn gilt

(Komm) $\quad x * y = y * x \quad$ für alle $x, y \in A$

und A heißt *assoziativ*, wenn gilt

(Ass) $\quad (x * y) * z = x * (y * z) \quad$ für alle $x, y, z \in A$.

Da diese Identitäten in jeder Variable linear sind, genügt es, den Nachweis für die Elemente eines Erzeugendensystems zu erbringen (also Elemente einer Teilmenge E von A mit $\mathrm{Lin}_R(E) = A$).

Von einer *kommutativ-assoziativen* Algebra wollen wir dann sprechen, wenn sowohl (Komm) als auch (Ass) erfüllt sind.

Abweichungen von der Kommutativität (Assoziativität) zeigen sich im Vorhandensein von *Kommutatoren* $[x, y] := x*y - y*x$ ungleich 0_A (bzw. von *Assoziatoren* $[x, y, z] := (x*y)*z - x*(y*z)$ ungleich 0_A). Eine R-Algebra ist also genau dann kommutativ (assoziativ), wenn alle ihre Kommutatoren (bzw. alle Assoziatoren) verschwinden.

A.3 Einselemente

Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra mit Multiplikation $*$.

Ein bezüglich $*$ neutrales Element wird als *Einselement* von A bezeichnet, das heißt e ist genau dann Einselement von A, wenn $e * x = x * e = e$ für alle $x \in A$ gilt. Gilt für alle $x \in A$ nur $e * x = x$ (oder $x * e = x$), so wird e als *Linkseinselement* (beziehungsweise *Rechtseinselement*) von A bezeichnet.

Eine R-Algebra wird *unitär* genannt, falls sie ein Einselement besitzt. In diesem Fall wird für das (eindeutig bestimmte) Einselement von A oft die Bezeichnung 1_A verwendet. Allgemeiner könnte man von einer *linksunitären* (*rechtsunitären*) Algebra A sprechen, falls in A ein Linkseinselement (beziehungsweise ein Rechtseinselement) existiert.

Jede R-Algebra lässt sich in eine unitäre R-Algebra einbetten, nämlich in die *Dorrohsche Oberalgebra*, den R-Modul $R \oplus A$ versehen mit Multiplikation $(r \oplus a) * (r' \oplus a') := (r \cdot r', r\, a' + r'\, a + a * a')$ für alle $r, r' \in R$, $a, a' \in A$.

A.4 Entgegengesetzte Algebra

Sei R ein kommutativer Ring.

Wird in einer R-Algebra A die Multiplikation μ_A durch die *entgegengesetzte Multiplikation* μ_A^{op} ersetzt, wobei $\mu_A^{\mathrm{op}}(x, y) := \mu_A(y, x)$ für $x, y \in A$ gesetzt wird, so ergibt sich wiederum eine R-Algebra, die *entgegengesetzte Algebra* A^{op}, mit Multiplikation $\mu_{A^{\mathrm{op}}}(x, y) = \mu_A(y, x)$ für alle $x, y \in A$.

Genau dann ist A^{op} kommutativ (assoziativ) wenn A kommutativ (bzw. assoziativ) ist. Die (Links-/Rechts-)Einselemente von A^{op} sind gerade die (Rechts-/Links-)Einselemente von A.

A.5 Verknüpfung von Teilmengen

Sei R ein Ring und X ein R-Modul.

Die *Summe* der Teilmengen V_1 und V_2 von X wird definiert durch

$$V_1 + V_2 := \{\, v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2 \,\}.$$

Sind V_1 und V_2 *additiv abgeschlossen* (das heißt $\mathbb{Z}$-Untermoduln von X), so ist das auch für $V_1 + V_2$ der Fall.

Seien nun R-Moduln X, Y, Z gegeben, $f : X \times Y \longrightarrow Z$ eine R-bilineare Abbildung und $V \subset X$, $W \subset Y$ Teilmengen.Im Gegensatz zur soeben besprochenen Situation braucht dann $f[V \times W]$, das Bild des kartesischen Produktes von V und W unter f, nicht additiv abgeschlossen zu sein, selbst wenn V und W es sind. Daher bezeichnen wir mit $f(V, W)$ die kleinste additiv abgeschlossenen Teilmenge von Z, die $f[V \times W]$ enthält:

$$f(V,W) := \{\, \sum_{k=1}^{m} f(v_k, w_k) \mid v_k \in V,\ w_k \in W \text{ für alle } 1 \leqq k \leqq m,\ m \in \mathbb{N} \,\}.$$

Insbesondere haben wir das *skalare Vielfache* für $T \subset R$ und $W \subset Y$

$$T\,W = \{\, \sum_{k=1}^{m} t_k\, w_k \mid t_k \in P,\ w_k \in W \text{ für alle } 1 \leqq k \leqq m,\ m \in \mathbb{N} \,\}.$$

Speziell für $T = R$ ist $R\,W$ also die *lineare Hülle* von W in Y, der kleinste W enthaltende Untermodul: $R\,W = \mathrm{Lin}_R(W)$.

Weiterhin erhalten wir für Teilmengen U und U' einer R-Algebra Amit Multiplikation $*$ das *Produkt*

$$U * U' = \{\, \sum_{k=1}^{m} u_k * u'_k \mid u_k, u'_k \in V \text{ für alle } 1 \leqq k \leqq m,\ m \in \mathbb{N} \,\}.$$

Wird das Produkt der Algebra mit dem Multiplikationspunkt $\cdot$ statt mit $*$ bezeichnet, so schreiben wir das obige Produkt natürlich in der Form $U \cdot U'$.

Bei einelementigen Teilmengen $\{x\}$ oder $\{y\}$ $(x \in X,\ y \in Y)$ tritt die oben geschilderte Schwierigkeit nicht auf, wir notieren daher einfach $x + V'$, $f(x,W)$ und $f(V,y)$ statt $\{x\} + V'$, $f[\{x\} \times W]$ bzw. $f[V \times \{y\}]$, das heißt für $r \in R$, $W \subset Y$ und für $T \subset R$, $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} r\,W &= \{\, r\,w \mid w \in W \,\}, \\ T\,y &= \{\, t\,y \mid t \in T \,\}, \end{aligned}$$

und für $a, a' \in A$, $U, U' \subset A$ ergeben sich

$$\begin{aligned} a * U' &= \{\, a * u \mid u \in U' \,\}, \\ U * a' &= \{\, u * a' \mid u \in U \,\}. \end{aligned}$$

A.6 Teilalgebren

Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra mit Multiplikation $*$.

Ein Untermodul B von A heißt *Teilalgebra* von A, wenn $B * B \subseteq B$ gilt. Besitzt A ein Einselement 1_A, so wird eine Teilalgebra B von A *unitär* genannt, falls $1_A \in B$ gilt.

Sei A eine assoziative R-Algebra und U eine Teilmenge von A. Dann ist

$$\mathrm{Env}(U) := \mathrm{Lin}_R(\{\, u_1 * \cdots * u_l \mid u_1, \ldots, u_l \in U,\ l \geqq 1 \,\})$$

die von U *erzeugte Teilalgebra* von A (*einhüllende Algebra*).

Ist A eine assoziative unitäre R-Algebra, B eine unitäre Teilalgebra von A und U eine Teilmenge von A, so bezeichne

$$B[U] := \mathrm{Env}(B + R\,U)$$

die aus B *durch Adjunktion* von U *erzeugte unitäre Teilalgebra* von A. Die Elemente von $B[U]$ sind also Linearkombinationen endlicher Produkte von Elementen der Form $b + \sum\limits_{j=1}^{m} r_j\, u_j$ mit $b \in B$, $r_1, \dots, r_m \in R$, $u_1, \dots, u_m \in U$, $m \geqq 1$. Ist $U = \{a_1, \dots, a_k\}$ endlich, so setzen wir

$$B[a_1, \dots, a_k] := B[\{a_1, \dots, a_k\}].$$

Ist speziell $B = R\,1_A$, so schreiben wir kurz $R[U]$ (oder $R[a_1, \dots, a_k]$) für $R\,1_A[U]$ (beziehungsweise für $R\,1_A[a_1, \dots, a_k]$), die durch die Teilmenge U (beziehungsweise durch die Elemente $a_1, \dots, a_k$) *erzeugte unitäre Teilalgebra*.

A.7 Multiplikationsalgebra

Sei R ein kommutativer Ring und A eine beliebige R-Algebra.

Die assoziative unitäre *Multiplikationsalgebra* ist die durch die Links- und Rechtsmultiplikationen $\mathrm{L}_a, \mathrm{R}_b \in \mathrm{End}_R(A)$ mit $a, b \in A$ erzeugte unitäre Teilagebra der R-Algebra $\mathrm{End}_R(A)$, also

$$\mathrm{M}(A) := R[\{\, \mathrm{L}_a + \mathrm{R}_b \mid a, b \in A\,\}].$$

Dann ist A ein $\mathrm{M}(A)$-Modul mit $\varphi\, x = \varphi(x)$ für alle $\varphi \in \mathrm{M}(A)$, $x \in A$.

A.8 Ideale

Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra.

Dann wird eine Teilalgebra I von A als *Linksideal* (*Rechtssideal*) bezeichnet, wenn $A * I \subseteq I$ gilt (beziehungsweise $I * A \subseteq I$). Sind beide Bedingungen erfüllt, so wird I als *Ideal* in A bezeichnet. Wenn es sich dabei um einen R-Untermodul von A handelt, so sprechen wir von einem *R-Ideal*. Die R-Ideale in A sind gerade die $\mathrm{M}(A)$-Untermoduln, vgl. A.7.

A.9 Algebren-Homomorphismen

Sei R ein kommutativer Ring und A, A' seien R-Algebren.

Dann wird eine R-lineare Abbildung $h : A \longrightarrow A'$ als *R-Algebren-Homomorphismus* (oder *R-Algebren-anti-Homomorphismus*) bezeichnet, wenn für alle $a, b \in A$ gilt $h(a*b) = h(a)*h(b)$ (beziehungsweise $h(a*b) = h(b)*h(a)$).

Unter einem *R-Algebren-Isomorphismus* wird ein bijektiver R-Algebren-Homomorphismus verstanden.

B Bemerkungen zum konstruktiven Ansatz

Der hier gewählte *konstruktive Zugang* zu einer Theorie der semiquadratischen Algebren soll sicherstellen, dass theoretische Vorhersagen auch stets zu berechenbaren Ergebnissen führen. So wird in Beweisen nach Möglichkeit darauf verzichtet, das Auswahlaxiom oder das logische Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten zu verwenden, da anderenfalls Aussagen, die Berechnungsvorschriften für die vorkommenden Daten enthalten, nicht mehr von solchen Aussagen unterschieden werden könnten, für die Berechenbarkeit nicht zu erwarten ist. (Fred Richman macht in [Ri90] deutlich, dass bei Annahme der allgemeinen Gültigkeit des logischen Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten — englisch *law of excluded middle* (LEM) — keine Berechenbarkeit mehr gewährleistet ist.)

Ob die Darstellung in dieser Arbeit noch konstruktive Lücken aufweist, ließe sich durch *Formalisierung* in konstruktivem Rahmen feststellen, etwa in Martin-Löfs Typentheorie (vgl. [ML84] und [NoPeSm90]) oder einem Computersystem wie `ALF` ([MaNo94]), `Moscow ML` ([RoRuSe1], [RoRuSe2]) oder `Isabelle` ([Pa94]). Eine derartige Formalisierung würde den Rahmen dieser Dissertation sprengen.

Ausführlichere *Darstellungen der konstruktiven Mathematik* finden sich bei Beeson, der in [Be85] eine allgemeine Übersicht gibt, bei Bridges und Richman, die in [BrRi87] verschiedene konstruktive Richtungen vergleichen, bei Bishop und Bridges zur *konstruktiven Analysis* (cf. [BiBr85]), sowie bei Mines, Richman und Ruitenburg zur *konstruktiven Algebra* (cf. [MiRiRu88]).

C Computerberechnungen mit `Albert`

C.1 Eine Beispielsitzung mit `Albert`

Das nach A. Adrian Albert benannte Computerprogramm `Albert` kann *Berechnungen in nicht-assoziativen Algebren* durchführen (cf. [JaMuOf92], der Algorithmus wird in [HeJa91] beschrieben).

Nach Aufruf des (in der Programmiersprache `C` geschriebenen) Programmes `Albert` mit dem Befehl

```
albert
```

könnte sich folgende *Beispielsitzung* ergeben (unter dem Betriebssystem `UNIX` auf dem FernUni-Rechner *bonsai*).

```
         ((Albert)), Version 3.0, 1994
Dept. of Computer Science, Clemson University


Dimension Limit: 500.
Using /export/home/rosemei/Albert/Albertsource/.albert
Type h for help.


-->identity (xx)(yz) - ((xx)y)z

     (xx)(yz)  -   ((xx)y)z
Entered as identity 1.


-->identity (xx)(yz) - y((xx)z)

     (xx)(yz)  -   y((xx)z)
Entered as identity 2.


-->generators 10a

Problem type stored.
```

```
-->build

Building the Multiplication Table.

Build begun at Thu Feb 28 10:26:39 2002

Degree    Current Dimension   Elapsed Time(in seconds)
   1               1                0
   2               2                0
   3               4                0
   4               7                0
   5              12                0
   6              19                0
   7              30                0
   8              45                0
   9              67                1
  10              97                2
Build completed. Last Matrix 3.43% dense.


-->display

Defining identities are:
  1. (xx)(yz)-((xx)y)z
  2. (xx)(yz)-y((xx)z)
Field = 251.
Using Sparse matrix structure.
Problem type = [10a]; Total degree = 10.
Multiplication table present.

-->view b

Basis Table:
   1.     0   0   1    a
   2.     1   1   2    (aa)
   3.     1   2   3    (a(aa))
   4.     2   1   3    ((aa)a)
   5.     4   1   4    (((aa)a)a)
   6.     1   3   4    (a(a(aa)))
   7.     3   1   4    ((a(aa))a)
   8.     4   2   5    (((aa)a)(aa))
```

9.	5	1	5	((((aa)a)a)a)
10.	7	1	5	(((a(aa))a)a)
11.	1	6	5	(a(a(a(aa))))
12.	6	1	5	((a(a(aa)))a)
13.	4	3	6	(((aa)a)(a(aa)))
14.	7	2	6	(((a(aa))a)(aa))
15.	9	1	6	(((((aa)a)a)a)a)
16.	10	1	6	((((a(aa))a)a)a)
17.	12	1	6	(((a(a(aa)))a)a)
18.	1	11	6	(a(a(a(a(aa)))))
19.	11	1	6	((a(a(a(aa))))a)
20.	4	6	7	(((aa)a)(a(a(aa))))
21.	7	3	7	(((a(aa))a)(a(aa)))
22.	10	2	7	((((a(aa))a)a)(aa))
23.	12	2	7	(((a(a(aa)))a)(aa))
24.	14	1	7	((((a(aa))a)(aa))a)
25.	15	1	7	((((((aa)a)a)a)a)a)
26.	16	1	7	(((((a(aa))a)a)a)a)
27.	17	1	7	((((a(a(aa)))a)a)a)
28.	19	1	7	(((a(a(a(aa))))a)a)
29.	1	18	7	(a(a(a(a(a(aa))))))
30.	18	1	7	((a(a(a(a(aa)))))a)
31.	4	11	8	(((aa)a)(a(a(a(aa)))))
32.	7	6	8	(((a(aa))a)(a(a(aa))))
33.	10	3	8	((((a(aa))a)a)(a(aa)))
34.	12	3	8	(((a(a(aa)))a)(a(aa)))
35.	17	2	8	((((a(a(aa)))a)a)(aa))
36.	19	2	8	(((a(a(a(aa))))a)(aa))
37.	23	1	8	((((a(a(aa)))a)(aa))a)
38.	24	1	8	(((((a(aa))a)(aa))a)a)
39.	25	1	8	(((((((aa)a)a)a)a)a)a)
40.	26	1	8	((((((a(aa))a)a)a)a)a)
41.	27	1	8	(((((a(a(aa)))a)a)a)a)
42.	28	1	8	((((a(a(a(aa))))a)a)a)
43.	30	1	8	(((a(a(a(a(aa)))))a)a)
44.	1	29	8	(a(a(a(a(a(a(aa)))))))
45.	29	1	8	((a(a(a(a(a(aa))))))a)
46.	4	18	9	(((aa)a)(a(a(a(a(aa))))))
47.	7	11	9	(((a(aa))a)(a(a(a(aa)))))
48.	10	6	9	((((a(aa))a)a)(a(a(aa))))
49.	12	6	9	(((a(a(aa)))a)(a(a(aa))))

50.	17	3	9	((((a(a(aa))a)a)(a(aa)))
51.	19	3	9	(((a(a(a(aa)))a)(a(aa)))
52.	24	2	9	(((((a(aa))a)(aa))a)(aa))
53.	26	2	9	((((((a(aa))a)a)a)a)(aa))
54.	28	2	9	((((a(a(a(aa)))a)a)(aa))
55.	30	2	9	(((a(a(a(a(aa))))a)(aa))
56.	34	1	9	((((a(a(aa))a)(a(aa)))a)
57.	36	1	9	((((a(a(a(aa)))a)(aa))a)
58.	37	1	9	(((((a(a(aa))a)(aa))a)a)
59.	38	1	9	((((((a(aa))a)(aa))a)a)a)
60.	39	1	9	(((((((aa)a)a)a)a)a)a)a)
61.	40	1	9	(((((((a(aa))a)a)a)a)a)a)
62.	41	1	9	((((((a(a(aa))a)a)a)a)a)
63.	42	1	9	(((((a(a(a(aa)))a)a)a)a)
64.	43	1	9	((((a(a(a(a(aa))))a)a)a)
65.	45	1	9	(((a(a(a(a(a(aa)))))a)a)
66.	1	44	9	(a(a(a(a(a(a(a(aa))))))))
67.	44	1	9	((a(a(a(a(a(a(aa)))))))a)
68.	4	29	10	(((aa)a)(a(a(a(a(a(aa))))))
69.	7	18	10	(((a(aa))a)(a(a(a(a(aa)))))
70.	10	11	10	((((a(aa))a)a)(a(a(a(aa))))
71.	12	11	10	(((a(a(aa))a)(a(a(a(aa))))
72.	17	6	10	((((a(a(aa))a)a)(a(a(aa)))
73.	19	6	10	(((a(a(a(aa)))a)(a(a(aa)))
74.	24	3	10	(((((a(aa))a)(aa))a)(a(aa)))
75.	26	3	10	((((((a(aa))a)a)a)a)(a(aa)))
76.	28	3	10	((((a(a(a(aa)))a)a)(a(aa)))
77.	30	3	10	(((a(a(a(a(aa))))a)(a(aa)))
78.	37	2	10	(((((a(a(aa))a)(aa))a)(aa))
79.	41	2	10	((((((a(a(aa))a)a)a)a)(aa))
80.	43	2	10	((((a(a(a(a(aa))))a)a)(aa))
81.	45	2	10	(((a(a(a(a(a(aa)))))a)(aa))
82.	51	1	10	((((a(a(a(aa)))a)(a(aa)))a)
83.	52	1	10	((((((a(aa))a)(aa))a)(aa))a)
84.	55	1	10	((((a(a(a(a(aa))))a)(aa))a)
85.	56	1	10	(((((a(a(aa))a)(a(aa)))a)a)
86.	57	1	10	(((((a(a(a(aa)))a)(aa))a)a)
87.	58	1	10	((((((a(a(aa))a)(aa))a)a)a)
88.	59	1	10	(((((((a(aa))a)(aa))a)a)a)a)
89.	60	1	10	((((((((aa)a)a)a)a)a)a)a)a)
90.	61	1	10	((((((((a(aa))a)a)a)a)a)a)a)

```
 91.    62   1   10    (((((((a(a(aa)))a)a)a)a)a)a)
 92.    63   1   10    ((((((a(a(a(aa))))a)a)a)a)a)
 93.    64   1   10    (((((a(a(a(a(aa)))))a)a)a)a)
 94.    65   1   10    ((((a(a(a(a(a(aa))))))a)a)a)
 95.    67   1   10    (((a(a(a(a(a(a(aa)))))))a)a)
 96.     1  66   10    (a(a(a(a(a(a(a(a(aa)))))))))
 97.    66   1   10    ((a(a(a(a(a(a(a(aa))))))))a)


-->quit
```

C.2 Erläuterung der `Albert`-Sitzung

Mit Hilfe des Befehls `identity` wurden die beiden semiquadratischen Identitäten (SQ1) und (SQ2) eingegeben. Durch den Befehl `generators` wird Art und Anzahl der Erzeugenden festgelegt. In unserem Fall ist a das einzige Erzeugende, das bis zu 10-mal auftreten darf. (Ebenso würde `generators 2a4b3c` die drei Erzeugenden a, b und c einführen, wobei a höchstens 2-mal, b höchstens 4-mal, und c höchstens 3-mal vorkommen dürfte. In diesem Fall hätten wir also Berechnungen mit bis zu 9 Exemplaren dieser drei Erzeugenden gestattet.) Mit dem Befehl `build` bekommt `Albert` die Anweisung, die entsprechende Multiplikationstabelle zu berechnen. Nachdem mit `display` die Korrektheit der Eingabe kontrolliert wurde, wird mit `view b` die zuvor berechnete Multiplikationstabelle in Basisform ausgegeben. (Mit `view m` erhielte man die Darstellung als Multiplikationstafel.) Schließlich beendet `quit` unsere kleine Sitzung mit `Albert`.

C.3 Interpretation des Ergebnisses der `Albert`-Sitzung

Die obige `Albert`-Sitzung führte zu Berechnungen in der freien semiquadratischen Algebra mit einem Erzeugenden a über dem Körper $\mathbb{F}_{251}$. (251 ist die kleinste Primzahl unter $256 = 2^8$, die nächste wäre 257. Es ist auch möglich `Albert` dazu zu bewegen über $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ mit einer kleineren Primzahl p zu rechen.) Dabei wurden Produkte mit bis zu zehn Faktoren a berücksichtigt. Die oben wiedergegebene Basistabelle zeigt eine Basis des Untervektorraums aller (nicht-assoziativen) a-Potenzen bis zum Grad 10. Da die Basiselemente nach wachsendem Grad geordnet sind, können auch die Basen der entsprechenden Unterräume U_k, die von allen Potenzen vom Grad k erzeugt sind, abgelesen werden ($1 \leqq k \leqq 10$). Für $d_k := \dim U_k$ ergeben sich folgende Werte

$$\begin{aligned}
d_1 &= \ \ 1\\
d_2 &= \ \ 1\\
d_3 &= \ \ 2\\
d_4 &= \ \ 3\\
d_5 &= \ \ 5\\
d_6 &= \ \ 7\\
d_7 &= 11\\
d_8 &= 15\\
d_9 &= 22\\
d_{10} &= 30.
\end{aligned}$$

Ein Blick in die Enzyklopädie der ganzzahligen Folgen von Sloane,Plouffe oder eine e-Mail der Form

```
lookup 1 1 2 3 5 7 11 15 22 30
```

an `superseeker@research.att.com` führt zu der Erkenntnis, dass diese Werte mit den ersten zehn Gliedern der Folge der *Partitionszahlen* $(p_k)_{k\geqq 1}$ übereinstimmt (Folge M0663 in [SlPl95]). Weitere Berechnungen mit `Albert` haben gezeigt, dass diese Übereinstimmung bis $k = 17$ erhalten bleibt, da $d_{11} = 42$, $d_{12} = 56$, $d_{13} = 77$, $d_{14} = 101$, $d_{15} = 135$, $d_{16} = 176$, $d_{17} = 231$. Die *semiquadratische Partitionszahl-Vermutung*, dass $d_k = p_{k-1}$ für alle $k \geqq 1$ gilt, ist meines Wissens weder bewiesen noch wiederlegt.

D DIN-Standardnotationen

Wir verwenden in dieser Arbeit die folgenden (in [DIN 5473] empfohlenen) *Standardbezeichnungen* ohne weiteren Hinweis.

D.1 Mengen

$a \in A$	a ist *Element* von A	[DIN 5473, 4.1]
$a \notin A$	a ist *nicht Element* von A	[DIN 5473, 4.2]
$\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$	*Menge* aller x aus A mit $\varphi(x)$	[DIN 5473, 4.3]
$\{\, \tau(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) \,\}$		[DIN 5473, 4.4]
	Menge aller $\tau(x_1, \dots, x_n)$ mit $\varphi(x_1, \dots, x_n)$	
$\{a_1, \dots, a_n\}$	*Menge* mit den Elementen $a_1, \dots, a_n$	[DIN 5473, 4.5]
$\emptyset$	*leere Menge*	[DIN 5473, 4.6]
$A \subseteq B$ oder $A \subset B$,		[DIN 5473, 4.7]
$B \supseteq A$	A ist *Teilmenge* von B	
$A \subsetneqq B$	A ist *echte Teilmenge* von B	[DIN 5473, 4.8]
$A \cap B$	A geschnitten mit B,	[DIN 5473, 4.9]
	Durchschnitt von A und B	
$A \cup B$	A vereinigt mit B,	[DIN 5473, 4.10]
	Vereinigung von A und B	
$A \smallsetminus B$	A ohne B,	[DIN 5473, 4.11]
	relatives Komplement von B bzgl. A	
$A \times B$	A Kreuz B,	[DIN 5473, 6.5]
	(kartesisches) Produkt von A und B	

D.2 Standard-Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Menge der *natürlichen Zahlen* $0, 1, 2, \dots$	[DIN 5473, 5.1]
$\mathbb{Z}$	Menge der *ganzen Zahlen*	[DIN 5473, 5.2]
$\mathbb{Q}$	Menge der *rationalen Zahlen*	[DIN 5473, 5.3]
$\mathbb{R}$	Menge der *rellen Zahlen*	[DIN 5473, 5.4]
$\mathbb{C}$	Menge der *komplexen Zahlen*	[DIN 5473, 5.5]

D.3 Abbildungen

$f : A \longrightarrow B$	f ist *Abbildung* von A in B	[DIN 5473, 7.7]
$f(a)$	f *angewendet* auf a (Funktionswert)	[DIN 5473, 7.4]
$x \mapsto a(x)$	*Funktion*, die x auf $a(x)$ abbildet	[DIN 5473, 7.12]

E Erläutertes Symbolverzeichnis

Wir unterteilen die hier erläuterten Zeichen in folgende drei *Gruppen*:

Sonderzeichen	wie	$+$, $-$, $\cdot$, $:$, $*$,
Zahlen	wie	1, 2, $\frac{1}{2}$,
Buchstaben	wie	D, n, Q_*, $\tilde{\mathrm{S}}(A)$, $X_0[\vartheta_0, \mu_0]$, $\mathrm{Abb}(X, Y)$, $\mathrm{Mat}_\ell(R)$, $\mathrm{Sq}_0(A)$, $\mathrm{Qu}_R(X, Y)$, (K1), (Q′), (QΣ), α, β_M, Δ^*, $\mu_A(x, y)$.

Es folgt jeweils eine kurze Erklärung zu jeder Bezeichnung sowie die Angabe der Seite, auf der sie eingeführt wird.

Sonderzeichen

$()$	leere Folge	60
$(x_1, \ldots, x_l)\,(x'_1, \ldots, x'_m)$	Verknüpfung zweier endlicher Folgen (Aneinanderreihung)	61
$\emptyset$	leere Menge	82
$A \cap B$	Durchschnitt der Mengen A und B	82
$A \cup B$	Vereinigung der Mengen A und B	82
$A \smallsetminus B$	relatives Komplement der Mengen B bzgl. A	82
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge der Menge B	82
$A \subsetneqq B$	A ist echte Teilmenge der Menge B	82
$B \supseteq A$	A ist Teilmenge der Menge B	82
$a \in A$	a ist Element der Menge A	82
$\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$	Menge aller x aus A mit $\varphi(x)$	82
$\{\, \tau(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n) \,\}$	Menge aller $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$	82
$\{a_1, \ldots, a_n\}$	Menge mit den Elementen $a_1, \ldots, a_n$	82
$V_1 + V_2$	Summe der Teilmengen V_1, V_2	72
$X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$	(innere) direkte Summe von Untermoduln	40
$\omega.y$	Produkt von ω und y $\quad(\omega \in \Omega,\ y \in Y)$	61
$*$	Multiplikation einer (meist semiquadratischen) Algebra	71
$x * y$	Produkt von x und y in einer (semiquadratischen) Algebra	71
$U * U'$	Produkt der Teilmengen U, U'	73
$\cdot$	Multiplikation einer (meist linksquadratischen) Algebra	71
$x \cdot y$	Produkt von x und y in einer (linksquadratischen) Algebra	71
$\cdot_s$	Multiplikation zu s aus dem quadratischen Kern	33
$\circ$	Komposition von Abbildungen	5
$[x, y, z]$	Assoziator von x, y und z	71
$[x, y]$	Kommutator von x und y	71

Zahlen

Buchstaben

A

$\mathrm{AltBil}_R(X{\times}X, Y)$		
	Modul aller alternierenden bilinearen Abbildungen	7
$\mathrm{AltMat}_\ell(R)$	Modul aller alternierenden $\ell{\times}\ell$-Matrizen über R	9
$\mathrm{Ann}_A(c)$	Annullator von c in A	44
A^{op}	entgegengesetzte Algebra von A	72
$\mathrm{A}(Q)$	antikommutativer Anteil einer quadratischen Algebra Q	21
(Ass)	Assoziativität (siehe Anh. F)	71
$A[Z, \xi, \eta, \zeta]$	Annullatorerweiterung von A um Z, ξ, η, ζ	52
B		
B	eine assoziative Algebra mit Einselement	60
β	Spurparameter einer quadratischen Algebra vom Typ (α, β)	12
$\beta.$	Modul-Isomorphismus $\mathrm{Mat}_{\ell,m}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}_R(R^\ell{\times}R^m, R)$	9
β_M	Bilinearform zur Matrix $M \in \mathrm{Mat}_\ell(R)$	9
$\mathrm{Bil}_R(X{\times}Y, Z)$		
	Modul aller bilinearen Abbildungen $f : X \times Y \longrightarrow Z$	7
$B[U]$	durch Adjunktion erzeugte unitäre Teilalgebra	74
C		
C	eine Kompositionsalgebra (in [Pe71])	1
c	ein idempotentes Element von A	39
C^{op}	entgegengesetzte Algebra von C	1
D		
D	Bilinearisierungsabbildung $g \mapsto \mathrm{D}g$	7
d	Dimension einer einfachen quadratischen Algebra	70
Δ	Diagonalabbildung $x \mapsto (x, x)$	6
Δ^*	Quadraturabbildung $f \mapsto \Delta^* f$	7
$\Delta^* f$	Quadratur einer bilinearen Abbildung f	6
$\mathrm{D}g$	Bilinearisierung einer quadratischen Abbildung g	6
E		
e	Linkseinselement einer semiquadratischen Algebra	51
$\mathrm{End}_R(X)$	Endomorphismenring eines R-Linksmoduls X	5
$\mathrm{Env}_R(U)$	einhüllende Algebra von U	73
e_ω	Standardbasiselement der Monoidalgebra $R[\Omega]$	60
e_Ω	Einselement der Monoidalgebra $R[\Omega]$	60
ε	Basiselement von $R[\varepsilon]$	12
η	eine $\mathrm{S}_1(A)$-bilineare Abbildung (zum Erweiterungsannullator)	51
η_e	$\eta_e : A \times Z \longrightarrow Z$, Bilinearform zum Linkseinselement e	51

$P^1(c)$	Projektion von A auf $A^1(c)$	40
$P_1(c)$	Projektion von A auf $A_1(c)$	40
Φ	ein Körper (in [Ja62])	64
ϕ_h	Homomorphismus von $R\,[\Omega]$ nach B	60
p_k	die k-te Partitionszahl	81
$P_{\mathrm{Q}}(c)$	Projektion von $A_1(c)$ auf den quadratischen Anteil $\mathrm{Q}_c(A)$	49
pr_A	kanonische Projektion von $A[Z,\xi,\eta,m\zeta]$ auf A	54
pr_Z	kanonische Projektion von $A[Z,\xi,\eta,\zeta]$ auf Z	54
P_{S}	Projektion auf den skalaren Anteil $\mathrm{S}(Q)$	20
ψ	ein Element von $\mathrm{M}(A)$	60
P_{V}	Projektion auf den vektoriellen Anteil $\mathrm{V}(Q)$	20
$P_{\mathrm{Z}}(c)$	Projektion von $A_1(c)$ auf den Annullator-Anteil $\mathrm{Z}_c(A)$	49

Q

Q	eine quadratische Algebra	11
(Q)	charakteristische Gleichung quadr. Algebren (siehe Anh. F)	11
(Q′)	linearisierte charakteristische Gleichung (siehe Anh. F)	13
Q_*	linkskonjugierte Algebra	24
(QA1)	Homogenität quadratischer Abbildungen (siehe Anh. F)	6
(QA2)	Bilinearisierung quadratischer Abbildungen (siehe Anh. F)	6
$\mathrm{Q}_{(\alpha,\beta)}$	quadratische Algebra vom Typ (α,β)	12
(QAΣ)	Summenformel für quadratische Abbildungen (siehe Anh. F)	8
$\mathrm{Q}_c(A)$	quadratischer Anteil (zu c) einer semiquadr. Algebra A	47
$\mathrm{Q}_e(X,\vartheta)$	quadratische Algebra mit Basispunkt	14
(Q_τ)	transformierte charakteristische Gleichung (siehe Anh. F)	16
$\mathrm{Qu}_R(X)$	Modul aller quadratischen Formen auf X	9
$\mathrm{Qu}_R(X,Y)$	Modul aller quadratischen Abbildungen $g: X \longrightarrow Y$	7

R

R	ein (stets ass., meist komm.) Ring mit Einselement	5
$R[a_1,\dots,a_k]$	von $a_1,\dots,a_k$ erzeugte unitäre Teilalgebra	74
$R[\sqrt{\alpha}]$	reinquadratische Algebra	12
R_b	Rechtsmultiplikation mit b $(a \in A)$	30
$R[\varepsilon]$	Algebra der dualen Zahlen	12
$R[\Omega]$	Algebra des Monoids Ω über dem komm. Ring R	60
$R[U]$	durch U erzeugte unitäre Teilalgebra	74
$R[x]$	von x erzeugte unitäre Teilalgebra	11

S

$\mathrm{S}_1(A)$	quadratischer Multiplikationsring von A	32
$\mathrm{S}(A)$	(quadratisches) Multiplikationsideal von A	33

F Formelverzeichnis

G Glossar

Einige grundlegende *algebraische Begriffe und Strukturen* werden in diesem Anhang zusammengestellt.

Abelsche Gruppe [Bourbaki, Alg. I 4.2]
: Unter einer *abelschen Gruppe* X wird eine (in der Regel additiv geschriebene) Gruppe verstanden, deren Verknüpfung (*Addition*) kommutativ ist: $x + x' = x' + x$ für alle $x, y \in X$.

Additivität [LexAlg, S. 19]
: Eine Abbildung $h : X \longrightarrow X'$ zwischen zwei abelschen Gruppen heißt *additiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$.

Assoziativität [Bourbaki, Alg. I 1.3]
: Eine zweistellige Verknüpfung $\top : E \times E \longrightarrow E$ auf einer Menge E heißt *assoziativ*, wenn $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$ für alle $x, y, z \in E$ gilt.

Biadditivität [Bourbaki, Alg. II 3.1]
: Eine Abbildung $h : X \times Y \longrightarrow Z$ mit abelschen Gruppen X, Y, Z heißt *biadditiv*, wenn die Abbildungen $h(x, \cdot) : Y \longrightarrow Z,\ y \mapsto h(x, y)$ und $h(\cdot, y) : X \longrightarrow Z,\ x \mapsto h(x, y)$ für alle $x \in X$, $y \in Y$ additiv sind.

Gruppe [Bourbaki, Alg. I 2.3]
: Eine *Gruppe* ist eine Menge G zusammen mit einer assoziativen zweistelligen Verknüpfung $\top : G \times G \longrightarrow G$, die ein neutrales Element hat und für die es zu jedem Element ein inverses Element gibt.

Inverses Element [Bourbaki, Alg. I 2.3]
: Ist $\top : E \times E \longrightarrow E$ eine zweistellige Verknüpfung auf einer Menge E mit neutralem Element $e \in E$, so heißt eine Element $x' \in E$ (bzgl. $\top$) *invers* zu $x \in E$, wenn $x \top x' = x' \top x = e$ gilt.

Kommutativität [Bourbaki, Alg. I 1.5]
: Eine zweistellige Verknüpfung $\top : E \times E \longrightarrow E$ auf einer Menge E heißt *kommutativ*, wenn $x \top y = y \top x$ für alle $x, y \in E$ gilt.

Monoid [Bourbaki, Alg. I 2.1]
: Ein Monoid ist eine Menge mit einer assoziativen zweistelligen Verknüpfung, die ein neutrales Element besitzt.

Neutrales Element [Bourbaki, Alg. I 2.1]
: Ist $\top : E \times E \longrightarrow E$ eine zweistellige Verknüpfung auf einer Menge E, so heißt eine Element $e \in E$ (bzgl. $\top$) *neutral*, wenn $e \top x = x \top e = x$ für alle $x \in E$ gilt.

Ring [Bourbaki, Alg. I 8.1]

Unter einem *Ring* verstehen wir eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe R zusammen mit einer biadditiven Multiplikationsabbildung $R \times R \longrightarrow R$, $(r, r') \mapsto r \cdot r'$, die assoziativ ist und ein neutrales Element besitzt (das *Einselement* 1_R des Ringes).

Verknüpfung [DIN 13 302, Nr. 1.2]

Eine *zweistellige Verknüpfung* auf einer Menge A ist eine Abbildung von $A \times A$ nach A. Allgemeiner versteht man unter einer *m-stelligen Verknüpfung* auf einer Menge A eine Abbildung des m-fachen kartesischen Produktes $A^m = A \times \cdots \times A$ nach A.

Literaturverzeichnis

[Al61] A. Adrian Albert:
Structure of algebras.
American Mathematical Society, Providence R. I. 1961.
(AMS Colloquium Publications XXIV.)

[BaNi94] Hendrik P. Barendregt, Tobias Nipkow (eds.):
The Formal Proceedings of the 1993 Workshop on Types for Proofs and Programs.
Nijmegen (Niederlande) 1994.

[Be85] Michael J. Beeson:
Foundations of constructive mathematics.
Springer-Verlag, Berlin 1985.

[BiBr85] Errett Bishop, Douglas Bridges:
Constructive Analysis.
Springer-Verlag, Berlin 1985.

[Bourbaki] Nicolas Bourbaki:
Éléments de mathématique: Algèbre. Chapitres 1 à 3.
Hermann, Paris 1970.

[BrKoe66] Hel Braun, Max Koecher:
Jordan-Algebren.
Springer-Verlag, Berlin 1966.

[BrRi87] Douglas Bridges, Fred Richman:
Varieties of constructive mathematics.
Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987.

[DIN 5473] DIN 5473: *Logik und Mengenlehre.*
DIN Deutsches Institut für Normung, Juli 1992.
[DINTB 202], Seite 195–223.

[DIN 13 302] DIN 13 302: *Mathematische Strukturen.*
DIN Deutsches Institut für Normung, Juni 1978.
[DINTB 202], Seite 273–301.

[DINTB 202] DIN-Taschenbuch 202: *Formelzeichen, Formelsatz, mathematische Zeichen und Begriffe.*
Beuth Verlag, Berlin 1994 (2. Auflage).

[HeJa91] Irvin Roy Hentzel, David Pokrass Jacobs:
A dynaymic programming method for building free algebras.
Computers Math. Applic. **22** (1991), 61–66.

[JaMuOf92] D. Pokrass Jacobs, Sekhar V. Muddana, A. Jefferson Offutt:
A computer algebra system for nonassociative identites.
[My93], p. 185–195.

[Ja62] Nathan Jacobson:
Lie algebras.
Interscience Publishers, New York 1962.

[Ja68] Nathan Jacobson:
Structure and representations of Jordan algebras.
American Mathematical Society, Providence R. I. 1968.
(AMS Colloquium Publications XXXIX.)

[KnMeRoTi98] Max-Albert Knus, Alexander Merkurjev, Markus Rost, Jean-Pierre Tignol:
The Book of Involutions.
American Mathematical Society, Providence R. I. 1998.
(AMS Colloquium Publications Volume 44.)

[La91] Tsit Yuen Lam:
A First Course in Noncommutative Rings.
Springer-Verlag, New York 1991.

[LexAlg] Günther Eisenreich:
Lexikon der Algebra.
Akademie-Verlag, Berlin 1989.

[MaNo94] Lena Magnusson, Bengt Nordström:
The ALF proof editor and ists proof engine.
[BaNi94], p. 213–237.

[ML84] Per Martin-Löf:
Intuitionistic type theory.
Bibliopolis, Napoli (Italien) 1984.

[MiRiRu88] Ray Mines, Fred Richman, Wim Ruitenburg:
A couse in constructive Algebra.
Springer-Verlag, New York 1988.

[My93] H. C. Myung (ed.)
Proceedings of the Fifth International Conference
Hadronic Mechanics and Nonpotential Interactions.
(Cedar Falls 1992)
Part 1: Mathematics
Nova Science Publishers, New York 1993.

[NoPeSm90] Bengt Nordström, Kent Petersson, Jan M. Smith:
Programming in Martin-Löf's type theory.
Clarendon Press, Oxford (England) 1990.

[Pa94] Lawrence C. Paulson:
Isabelle: A Generic Theorem Prover.
Springer-Verlag, Berlin 1994, LNCS 828.

[Pe69] Holger P. Petersson:
Eine Identität fünften Grades, der gewisse Isotope von Kompositionsalgebren genügen.
Math. Z. **109** (1969), 217–238.

[Pe71] Holger P. Petersson:
Quasi composition algebras.
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **35** (1971), 215–222.

[Ri90] Fred Richman:
Intuitionism as Generalization.
Philosophia mathematica **5** (1990), 124–128.

[RoRuSe1] Sergei Romanenko, Claudio Russo, Peter Sestoft:
Moscow ML Owner's Manual, version 2.00, June 2000.
`ftp://ftp.dina.kvl.dk/pub/mosml/doc/manual.pdf`
im Internet.

[RoRuSe2] Sergei Romanenko, Claudio Russo, Peter Sestoft:
Moscow ML Language Overview, version 2.00, June 2000.
`ftp://ftp.dina.kvl.dk/pub/mosml/doc/mosmlref.pdf`
im Internet.

[Scha66] Richard D. Schafer:
An introduction to nonassociative algebras.
Academic Press, New York 1966.

[LehrbAlg1] Günter Scheja, Uwe Stroch:
Lehrbuch der Algebra, Teil 1.
Teubner-Verlag, Stuttgart 1994 (2. Auflage).

[LehrbAlg2] Günter Scheja, Uwe Stroch:
Lehrbuch der Algebra, Teil 2.
Teubner-Verlag, Stuttgart 1988.

[SlPl95] Neil James Alexander Sloane, Simon Plouffe:
Encyclopedia of integer sequences.
Academic Press, San Diego 1995.

[Wi88] Robert Wisbauer:
Grundlagen der Modul- und Ringtheorie.
Verlag Reinhard Fischer, München 1988.

[Wi96] Robert Wisbauer:
Modules and Algebras:
Bimodule Stucture and Group Actions on Algebras.
Addison Wesley Longmann, Harlow (England) 1996.

Index

Inhaltsverzeichnis

Lebenslauf

von Frank Rosemeier, geb. Müller

15. Januar 1963
Frank Josef Müller wird in Düsseldorf geboren als Sohn von Heinz Müller und Irene Müller, geb. Jux.

1969–1973
Besuch der Marienschule am Rheindorfer Weg in Düsseldorf.

1973–1982
Besuch des Lessing-Gymnasiums an der Ellerstraße in Düsseldorf.

1982–1990
Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Universität Düsseldorf, Abschluß mit Diplom.

1991–1992
Zivildienst in den Gemeinnützigen Werkstätten Neuss.

1992–1996
Lehramtsstudium an der Universität zu Köln und der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Abschluß ohne Staatsexamen.

16. September 1994
Heirat mit Monika Rosemeier.

1996–2003
Mitarbeiter des Lehrgebietes Algebra/Geometrie an der FernUniversität Hagen.

10. Februar 2000
Geburt der Tochter Lena Tabea Rosemeier.

Frank Rosemeier
Lehrgebiet Algebra/Geometrie
FernUniversität Hagen
D-58084 Hagen
E-Mail: `Frank.Rosemeier@FernUni-Hagen.de`

Mathematics Subject Classification (2000):
primary **17 A 30**, 17 A 60, 17 A 75; secondary 05 A 17, 17 A 50