Zufällige Binärfolgen und zufällige reelle Zahlen. *

Frank Rosemeier

Meinem Doktorvater Prof. Dr. H. P. Petersson
zu seinem 65. Geburtstag in Dankbarkeit gewidmet.

Abstract. This is a self-contained survey of a randomness theory for binary sequences and for real numbers, which is intended to be a first step to provide a formalization in (e. g. Bishop style) constructive mathematics. The notions of left-computable real number, Ω-number and Ω-like number are defined. For $0 < \alpha < 1$ we prove the following (well known) result:

$$\begin{aligned} \alpha \text{ is random and left-computable} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ is an } \Omega\text{-number} \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ is } \Omega\text{-like.} \end{aligned}$$

Einleitung

In diesem Beitrag befassen wir uns mit der Frage, wann eine unendliche Binärfolge zufällig ist. Zunächst scheint anschaulich klar zu sein:

10110010111011000111 ... ist wohl zufällig,

10101010101010101010 ... dagegen nicht.

Dass diese Unterscheidung noch nicht genau genug ist, zeigen Zweifelsfälle wie 10110101000001001111 . . .; hier könnte es sich um die Nachkommastellen der Binärdarstellung von $\sqrt{2}/2$ handeln.

*Diese Ausarbeitung basiert auf Vorträgen, die ich im Sommersemester 2001 an der FernUniversität Hagen gehalten habe. Ich danke den Betreuern des Seminars „Der algorithmische Zufallsbegriff“, Prof. Dr. Klaus Weihrauch und Dr. Peter Hertling, sowie den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Oberseminars Algebra/Topologie für ihre Unterstützung und ihr Interesse. Ferner bedanke ich mich bei Petra Dittmer für die Hilfe beim Setzen des Manuskriptes in LaTeX, bei Manfred Schulte für Hinweise zum Erzeugen von Hyperlinks, bei Reinhard Börger für einige anregende Fragen und Anmerkungen, sowie schließlich bei meiner Schwiegermutter Thea Rosemeier für ihre Gastfreundschaft beim Korrigieren dieses Artikels.

Wir werden den Begriff der zufälligen unendlichen Binärfolge auf mehrere äquivalente Weisen präzise definieren (Martin-Löf-, Solovay- und Chaitin-Zufälligkeit). Eine reelle Zahl wird als *zufällig* bezeichnet, wenn sie eine Binärdarstellung besitzt, deren Nachkommastellen eine zufällige Binärfolge bilden. Da zufällige reelle Zahlen nicht berechenbar sein können (eine Berechnungsvorschrift würde die Konstruktion eines Martin-Löf-Zufallstests erlauben, der zeigt, dass die Zahl nicht zufällig ist), werden wir uns anschließend mit zufälligen reellen Zahlen befassen, die der schwächeren Bedingung der Linksberechenbarkeit genügen. Durch die Charakterisierung der linksberechenbaren reellen Zahlen als Ω-Zahlen nach Chaitin erhalten wir die Möglichkeit tatsächlich zufällige reelle Zahlen anzugeben.

Nach Einführung der Grundbegriffe (nämlich Binärwörter und Binärfolgen in *Abschnitt 1*, Zufälligkeit von Binärfolgen in *Abschnitt 2*, präfix-freie Mengen von Binärwörtern in *Abschnitt 3*, und Chaitin-Zufälligkeit in *Abschnitt 4)* wenden wir uns in *Abschnitt 5* dem Begriff der Linksberechenbarkeit zu. Anschließend werden in *Abschnitt 6* die Ω-Zahlen nach Chaitin sowie die Ω-ähnlichen Zahlen nach Solovay vorgestellt. Schließlich folgt in *Abschnitt 7* der Nachweis, dass sich die linksberechenbaren zufälligen Zahlen einerseits als Ω-Zahlen und andererseits als Ω-ähnliche Zahlen kennzeichnen lassen.

1 Binärwörter und Binärfolgen

1.1 Notation

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$ das *Binäralphabet*. Dann bezeichne Σ^* die Menge aller *Binärwörter* (endlicher Zeichenketten über Σ). Für $w = w_0 \cdots w_{\ell-1} \in \Sigma^*$ ($\ell \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$) sei $\mathrm{l}_2(w) := \ell$ die *Länge* von w; weiter sei $\langle w \rangle_2$, der *Wert* von w, die rationale Zahl mit Binärdarstellung $0{,}w_0 \cdots w_{\ell-1}$, wir setzen also $\langle w \rangle_2 := \sum\limits_{k=0}^{\ell-1} w_k 2^{-(k+1)}$. Das leere Wort ϵ hat die Länge $\mathrm{l}_2(\epsilon) = 0$ und den Wert $\langle \epsilon \rangle_2 = 0$.

Mit Σ^ω werde die Menge aller (unendlichen) *Binärfolgen* bezeichnet. Für $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots) \in \Sigma^\omega$ und $n \geqq 0$ sei $s_{0:n} := s_0 \cdots s_n$ das *Anfangsstück* der Länge $n + 1$ von s; wir setzen $\langle s \rangle_2 := \sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k 2^{-(k+1)}$, so dass $\langle s \rangle_2 \in [0, 1]$, der *Wert* von s, die reelle Zahl mit Binärdarstellung $0{,}s_0 s_1 s_2 \cdots$ ist.

Für die beiden *konstanten Binärfolgen* schreiben wir $0^\omega := (0, 0, 0, \ldots)$ und $1^\omega := (1, 1, 1, \ldots)$.

1.2 Bemerkungen

(1) Mit der Komposition $(v_0 \cdots v_m)(w_0 \cdots w_n) := v_0 \cdots v_m w_0 \cdots w_n$ und dem *leeren Wort* ϵ als neutralem Element ist die Menge Σ^* ein *Monoid*:

Für alle $v, w, x \in \Sigma^*$ gilt

(i) $(vw)x = v(wx)$,

(ii) $\epsilon w = w = w\epsilon$.

(2) Durch $(w_0 \cdots w_n)(s_0, s_1, s_2, \ldots) := (w_0, \ldots, w_n, s_0, s_1, s_2, \ldots)$ wird eine *Operation* von Σ^* auf Σ^ω erklärt:

Für alle $v, w \in \Sigma^*$ und alle $s \in \Sigma^\omega$ gilt

(i) $(vw)s = v(ws)$,

(ii) $\epsilon s = s$.

(3) Für alle $w \in \Sigma^*$, $s \in \Sigma^\omega$, $n \geqq 0$ gilt $(ws)_{0:n} = w$, falls $\mathrm{l}_2(w) = n + 1$. Außerdem gilt $\langle s \rangle_2 = \lim_{n\to\infty} \langle s_{0:n} \rangle_2$, und mit $\iota_0 : \Sigma^* \to \Sigma^\omega$, $w \mapsto w0^\omega$ haben wir $\langle \iota_0(w) \rangle_2 = \langle w \rangle_2$.

1.3 Notiz (Vgl. [1] Lemma 2.11)

Die (bijektive) berechenbare Funktion $\sigma_2 : \Sigma^* \to \mathbb{N}_0$ mit $\sigma_2(\epsilon) := 0$ und $\sigma_2(w_0 w_1 \cdots w_{n-1} w_n) := 2^n(w_0+1)+2^{n-1}(w_1+1)+\ldots+2(w_{n-1}+1)+(w_n+1)$ induziert die durch

$$v \underset{\mathrm{llex}}{\leq} w \;:\Longleftrightarrow\; \sigma_2(v) \leqq \sigma_2(w).$$

definierte *längen-lexikographische Ordnung* auf Σ^*. Wir haben also $v \underset{\mathrm{llex}}{\leq} w$, wenn $\mathrm{l}_2(v) < \mathrm{l}_2(w)$ gilt, oder wenn $\mathrm{l}_2(v) = \mathrm{l}_2(w)$ gilt und v im Lexikon vor w stünde (vorausgesetzt 0 steht vor 1):

$$\epsilon \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 0 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 1 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 00 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 01 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 10 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 11 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 000 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 001 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 010 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} 011 \underset{\mathrm{llex}}{\leq} \cdots.$$

1.4 Bezeichnungen

Die Menge Σ^ω wird auch als *Cantor-Raum* bezeichnet. Sie lässt sich als cartesisches Produkt $\prod_{i=0}^{\infty} \{0,\, 1\}$ abzählbar unendlich vieler Kopien des Binäralphabetes $\Sigma = \{0,\, 1\}$ auffassen.

(1) Versieht man $\Sigma = \{0,\, 1\}$ mit der diskreten *Topologie* $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Sigma\}$, so bilden die Mengen $w\Sigma^\omega := \{\, ws \,|\, s \in \Sigma^\omega \,\}$ eine Basis der Produkttopologie auf Σ^ω. Für jede Teilmenge $A \subset \Sigma^*$ können wir daher folgende offene Teilmenge von Σ^ω definieren

$$A\Sigma^\omega := \{\, ws \,|\, w \in A, s \in \Sigma^\omega \,\}.$$

(2) Das vom *Maß* λ auf $\Sigma = \{0,\, 1\}$ mit $\lambda(\{0\}) = \lambda(\{1\}) = \frac{1}{2}$ induzierte Produktmaß μ auf Σ^ω hat die Eigenschaft

$$\mu(w\Sigma^\omega) = 2^{-\mathrm{l}_2(w)} \qquad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$

1.5 Hinweis (vgl. [1] 5.1–5.3)

Als topologischer Raum ist Σ^ω separabel, metrisierbar und kompakt; Σ^ω ist die Vervollständigung von Σ^*.

(Die abzählbare Teilmenge $\iota_0[\Sigma^*] = \{\, w0^\omega \,|\, w \in \Sigma^* \,\} \subset \Sigma^\omega$ liegt dicht, und

$$d(s, s') := \begin{cases} 2^{-\min\left\{\, i \geqq 0 \,\middle|\, s_i \neq s'_i \,\right\}} & \text{für } s \neq s' \\ 0 & \text{für } s = s' \end{cases} \qquad (s, s' \in \Sigma^\omega)$$

definiert eine *Metrik* auf Σ^ω.)

2 Zufällige Binärfolgen

2.1 Definition (Hertling [8] Definition 1)

Sei $(\, V_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ eine Familie von (offenen) Teilmengen $V_n \subset \Sigma^\omega$.

Dann wird $(\, V_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ als *gleichmäßig rekursiv aufzählbar* bezeichnet, wenn es eine rekursiv aufzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{N} \times \Sigma^*$ gibt mit

$$V_n = A_n\Sigma^\omega \qquad \text{für alle } n \geqq 1,$$
$$\text{wobei } A_n := \{\, w \in \Sigma^* \,|\, (n, w) \in A \,\}.$$

2.2 Definition (Martin-Löf [10])

(1) Eine gleichmäßig rekursiv aufzählbare Familie $(\, V_n \,|\, n \geqq 1\,)$ von offenen Teilmengen $V_n \subset \Sigma^\omega$ heißt *Martin-Löf-Test*, wenn

$$\mu(V_n) \leq 2^{-n} \qquad \text{für alle } n \geqq 1.$$

(2) Wir sagen, dass eine Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ den Martin-Löf-Test $(\, V_n \,|\, n \geqq 1\,)$ *besteht*, wenn es ein $n \geqq 1$ gibt mit $s \notin V_n$.

(3) Eine Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ wird *Martin-Löf-zufällig* genannt, wenn sie jeden Martin-Löf-Test besteht.

2.3 Bemerkungen

(1) Für jedes Binärwort $w = w_0 \cdots w_n \in \Sigma^*$ ist die Binärfolge

$$w^\omega := (w_0, \ldots, w_n,\, w_0, \ldots, w_n,\, \ldots) \qquad \textit{nicht} \text{ Martin-Löf-zufällig.}$$

(2) Allgemeiner können berechenbare Binärfolgen *nicht* Martin-Löf-zufällig sein, denn aus jeder Berechnungsvorschrift läßt sich ein Martin-Löf-Test konstruieren, den die Folge nicht besteht.

2.4 Definition (Solovay [12])

(1) Eine gleichmäßig rekursiv aufzählbare Familie $(\, W_n \,|\, n \geqq 1\,)$ von offenen Teilmengen $W_n \subset \Sigma^\omega$ heißt *Solovay-Test*, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(W_n)$ konvergiert.

(2) Wir sagen, dass eine Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ den Solovay-Test $(\, W_n \,|\, n \geqq 1\,)$ *besteht*, wenn es ein $n_0 \geqq 1$ gibt mit $s \notin W_n$ für alle $n \geqq n_0$.

(3) Eine Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ wird *Solovay-zufällig* genannt, wenn sie jeden Solovay-Test besteht.

2.5 Lemma (Hertling [8] Lemma 20)

Sei $(\,X_n \,|\, n \geqq 1\,)$ *eine Familie von* μ*-messbaren Teilmengen* $X_n \subset \Sigma^\omega$*, für die* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(X_n)$ *konvergiert. Ferner sei* $m \geqq 0$ *eine natürliche Zahl und es sei* $Y \subset \Sigma^\omega$ *eine* μ*-messbare Teilmenge mit der Eigenschaft, dass es für jedes* $s \in Y$ *mindestens* m *verschiedene Zahlen* $n \geqq 1$ *mit* $s \in X_n$ *gibt.*

Dann gilt $\quad m \cdot \mu(Y) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(X_n).$

Beweis:

Vollständige Induktion nach m:

Für $m = 0$ ist nichts zu zeigen.

$m - 1 \,\to\, m$:
Definiere eine Familie $(\,Z_n \,|\, n \geqq 1\,)$ von μ-messbaren Teilmengen $Z_n \subseteq Y$ durch

$$Z_n := X_n \cap Y \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} Z_k \qquad \text{für alle } n \geqq 1.$$

Dann gibt es für jedes $s \in Y$ genau ein $n \geqq 1$ mit $s \in Z_n$, daher gilt $\mu(Y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(Z_n)$. Außerdem haben die μ-messbaren Teilmengen $X_n \setminus Z_n$ die Eigenschaft, dass es für jedes $s \in Y$ mindestens $m - 1$ verschiedene Zahlen $n \geqq 1$ mit $s \in X_n \setminus Z_n$ gibt. Die Induktionsannahme liefert nun

$$(m-1) \cdot \mu(Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n \setminus Z_n),$$

woraus sich wegen $\mu(X_n \setminus Z_n) + \mu(Z_n) = \mu(X_n)$ für alle $n \geqq 1$ die Behauptung ergibt. □

2.6 Satz (cf. Solovay [12])

Eine Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ *ist genau dann Martin-Löf-zufällig, wenn sie Solovay-zufällig ist.*

Beweis:

Da jeder Martin-Löf-Test auch ein Solovay-Test ist, ist jede Solovay-zufällige Binärfolge auch Martin-Löf-zufällig.

Sei $s \in \Sigma^\omega$ eine Martin-Löf-zufällige Binärfolge und sei $(\, W_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ ein Solovay-Test. Wir haben zu zeigen, dass es ein $n_0 \geqq 1$ gibt mit $s \notin W_n$ für alle $n \geqq n_0$.

Sei dazu $A \subset \mathbb{N} \times \Sigma^*$ eine rekursiv aufzählbare Teilmenge mit $W_n = A_n \Sigma^\omega$, $A_n := \{\, w \in \Sigma^* \,|\, (n, w) \in A \,\}$ für alle $n \geqq 1$.

Wähle eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(W_n) < 2^m$.

Nun definieren wir eine rekursiv aufzählbare Teilmenge $B \subset \mathbb{N} \times \Sigma^*$ durch

$$B_n := \bigcup_{1 \leqq k_1 < \cdots < k_{2^{m+n}}} \bigcap_{i=1}^{2^{m+n}} A_{k_i} \Sigma^* \qquad \text{für alle } n \geqq 1$$

und $B := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\{n\} \times B_n)$. Nach Lemma 2.5 gilt

$$2^{m+k} \cdot \mu(B_k \Sigma^\omega) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(W_n) < 2^m \qquad \text{für jedes } k \geqq 1,$$

also $\mu(B_k \Sigma^\omega) < 2^{-k}$.

Durch $V_n := B_n \Sigma^\omega$ für alle $n \geqq 1$ wird somit ein Martin-Löf-Test $(\, V_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ definiert. Weil s Martin-Löf-zufällig ist, gibt es ein $n \geqq 1$ mit $s \notin V_n$, also $s \notin B_n \Sigma^\omega$. Aufgrund der Definition von B_n ist s in höchstens $2^{m+n} - 1$ verschiedenen der Mengen $A_k \Sigma^\omega = W_k$ enthalten, das heißt es gibt ein $n_0 \geqq 1$ mit $s \notin W_n$ für alle $n \geqq n_0$. □

2.7 Vereinbarung

Als *zufällig* wollen wir Binärfolgen bezeichnen, die Martin-Löf-zufällig sind (und damit nach Satz 2.6 auch Solovay-zufällig).

2.8 Hinweis

Beispiele für zufällige Binärfolgen lassen sich nicht ohne weiteres angeben. Die in 6.1 definierten Ω-Zahlen werden sich in Satz 7.3 als zufällig erweisen.

3 Präfix-freie Mengen

3.1 Beobachtung

Es gibt eine berechenbare Funktion $h : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $v, w \in \Sigma^*$ gilt

(0) $h(v,w) = 0 \iff v\Sigma^\omega \cap w\Sigma^\omega = \emptyset$ (keine Anfangsstücke voneinander),

(1) $h(v,w) = 1 \iff v\Sigma^\omega \subsetneqq w\Sigma^\omega$ (w ist echtes Anfangsstück von v),

(2) $h(v,w) = 2 \iff w\Sigma^\omega \subsetneqq v\Sigma^\omega$ (v ist echtes Anfangsstück von w),

(3) $h(v,w) = 3 \iff v\Sigma^\omega = w\Sigma^\omega$ (v ist gleich w).

(Stelle fest, ob eine Stelle $0 \leqq i \leqq \min(\mathrm{l}_2(v), \mathrm{l}_2(w))$ existiert, an der sich v von w unterscheidet; wenn ja, setze $h(v,w) := 0$, anderenfalls setze $h(v,w) := 1$, falls $\mathrm{l}_2(v) > \mathrm{l}_2(w)$ gilt, $h(v,w) := 2$, falls $\mathrm{l}_2(v) < \mathrm{l}_2(w)$ gilt, und $h(v,w) := 3$, falls $\mathrm{l}_2(v) = \mathrm{l}_2(w)$ gilt.)

3.2 Definition

(1) Ein Binärwort $w \in \Sigma^*$ wird als *Präfix* des Binärwortes $v \in \Sigma^*$ bezeichnet, wenn $v\Sigma^\omega \subseteq w\Sigma^\omega$ gilt.

(2) Zwei Binärwörter $v, w \in \Sigma^*$ mögen *präfix-fremd* heißen, wenn $v\Sigma^\omega$ und $w\Sigma^\omega$ disjunkt sind.

(3) Eine Teilmenge $A \subset \Sigma^*$ wird *präfix-frei* genannt, wenn zwei verschiedene Elemente von A stets präfix-fremd sind.

(4) Eine Folge von Binärwörtern $(w_i)_{i \geqq 0}$ heißt *präfix-frei*, wenn die Teilmenge $\{ w_i \mid i \geqq 0 \} \subset \Sigma^*$ präfix-frei ist.

3.3 Lemma ([8] Lemma 10)

Für jede präfix-freie Teilmenge $A \subset \Sigma^*$ gilt die Kraft-Ungleichung

$$\sum_{w \in A} 2^{-\mathrm{l}_2(w)} = \mu(A\Sigma^\omega) \leq 1.$$

Beweis:

Für verschiedene Elemente $v, w \in A$ sind $v\Sigma^\omega$ und $w\Sigma^\omega$ disjunkt. Daher gilt

$$\sum_{w\in A} 2^{-\mathrm{l}_2(w)} = \sum_{w\in A} \mu(w\Sigma^\omega) = \mu(\bigcup_{w\in A} w\Sigma^\omega) = \mu(A\Sigma^\omega)$$

mit $\mu(A\Sigma^\omega) \leq \mu(\Sigma^\omega) = 1$. □

3.4 Bezeichnung

Für jede präfix-freie Teilmenge $A \subset \Sigma^*$ setzen wir

$$2^{-A} := \sum_{w\in A} 2^{-\mathrm{l}_2(w)}.$$

3.5 Bemerkung

Zu jeder endlichen Teilmenge $E \subset \Sigma^*$ lassen sich paarweise präfix-fremde Binärwörter $w_1, \ldots, w_n \in E$ berechnen mit

$$E\Sigma^\omega = \bigcup_{i=1}^{n} w_i\Sigma^\omega;$$

dabei gilt $E = \{w_1, \ldots, w_n\}$, falls E präfix-frei ist.

(Setze $S_0 := \emptyset$, $w_i := \min\limits_{\text{llex}} \{\, w \in E \setminus \{w_1, \ldots, w_{i-1}\} \,|\, w\Sigma^\omega \cap S_{i-1}\Sigma^\omega = \emptyset \,\}$ und $S_i := S_{i-1} \cup \{w_i\}$ für alle $i \geqq 1$.)

3.6 Satz (Effektives Kraft-Chaitin-Theorem, [8] Theorem 11)

Sei $(n_k)_{k\geqq 0}$ eine berechenbare Folge natürlicher Zahlen, für die $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k}$ konvergiert mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k} \leq 1$.

Dann gibt es eine präfix-freie, berechenbare Folge von Binärwörtern $(w_k)_{k\geqq 0}$ mit $\mathrm{l}_2(w_k) = n_k$ für alle $k \geqq 0$.

Beweis:

Konstruiert wird eine berechenbare Folge von Binärwörtern $(w_k)_{k \geqq 0}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften ($m \geqq 0$):

(A_m) $\mathrm{l}_2(w_k) = n_k$ für alle $0 \leqq k < m$.

(B_m) Sei $I_m \subset \mathbb{N}_0$ die eindeutige endliche Menge mit $\sum\limits_{i \in I_m} 2^{-i} = 1 - \sum\limits_{k=0}^{m-1} 2^{-n_k}$.
Es gibt $v_i^{(m)} \in \Sigma^*$ mit $\mathrm{l}_2(v_i^{(m)}) = i$ für alle $i \in I_m$, derart dass die Menge $\{w_0, \ldots, w_{m-1}\} \cup \left\{ v_i^{(m)} \,\middle|\, i \in I_m \right\}$ präfix-frei ist.

Vollständige Induktion nach m:

$m = 0$: Trivialerweise ist (A_0) erfüllt. Es gilt $I_0 = \{0\}$; wähle $v_0^{(0)} \in \Sigma^*$ mit $\mathrm{l}_2(v_0^{(0)}) = n_0$, dann ist $\left\{ v_0^{(0)} \right\}$ präfix-frei und damit auch (B_0) erfüllt.

$m \to m+1$: Die Binärwörter $w_0, \ldots, w_{m-1} \in \Sigma^*$ mögen (A_m) und (B_m) erfüllen. Wir bemerken $\sum\limits_{k=0}^{m-1} 2^{-n_k} + 2^{-n_m} \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k} \leq 1$ und erhalten $2^{-n_m} \leq 1 - \sum\limits_{k=0}^{m-1} 2^{-n_k} = \sum\limits_{i \in I_m} 2^{-i}$ nach Wahl von I_m, also gibt es ein $i \in I_m$ mit $i \leqq n_m$. Setze $i_m := \max\{\, i \in I_m \,|\, i \leqq n_m \,\}$, das heißt es gilt $i_m \leqq n_m$, $i_m \in I_m$ und $i_m + 1, \ldots, m_n \notin I_m$.

Mit einer disjunkten Zerlegung $v_{i_m}^{(m)} \Sigma^\omega = w_m \Sigma^\omega \cup \bigcup\limits_{i=i_m+1}^{n_m} v_i^{(m+1)} \Sigma^\omega$, wobei $\mathrm{l}_2(w_m) = n_m$ (so dass (A_m) erfüllt ist) und $\mathrm{l}_2(v_i^{(m+1)}) = i$ für alle $i_m + 1 \leqq i \leqq n_m$ gelte, erhalten wir die präfix-freie Menge $\{w_0, \ldots, w_m\} \cup \left\{ v_{i_m+1}^{(m+1)}, \ldots, v_{m_n}^{(m+1)} \right\}$ und es gilt

$$1 - \sum_{k=0}^{m} 2^{-n_k} = \sum_{i \in I_m} 2^{-i} - 2^{-n_m} = \sum_{i \in I_{m+1}} 2^{-i}$$

mit $I_{m+1} := (I_m \setminus \{i_m\}) \cup \{i_m + 1, \ldots, n_m\}$. Setze $v_i^{(m+1)} := v_i^{(m)}$ für $i \in I_m \setminus \{i_m\}$.

□

3.7 Lemma (Hertling [8] Lemma 15)
Sei $A \subset \Sigma^*$ eine rekursiv aufzählbaren Teilmenge.

(1) *Es lässt sich eine präfix-freie rekursiv aufzählbare Teilmenge $B \subseteq A$ berechnen, wobei $A = B$ gilt, wenn A bereits präfix-frei ist.*

(2) *Es lässt sich eine präfix-freie rekursiv aufzählbare Teilmenge $B' \subset \Sigma^*$ berechnen mit $A\Sigma^\omega = B'\Sigma^\omega$, wobei $A = B'$ gilt, wenn A bereits präfix-frei ist.*

Beweis:
Sei $(w_i)_{i \geqq 0}$ eine berechenbare Folge von Binärwörtern mit $A = \{\, w_i \,|\, i \geqq 0 \,\}$.
(1) Sei $B_0 := \{w_0\}$. Für $n \geqq 1$ definieren wir $B_n := B_{n-1} \cup \{w_n\}$, falls $w_n\Sigma^\omega \cap B_{n-1}\Sigma^\omega = \emptyset$ gilt, anderenfalls $B_n := B_{n-1}$. Dann ist $B_n \subseteq A$ für jedes $n \geqq 0$ präfix-frei. Nun hat $B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ die gewünschten Eigenschaften.
(2) Wir setzen $A_n := \{w_0, \ldots, w_n\}$, $l_n := \max\{\, \mathrm{l}_2(w) \,|\, w \in A_n) \,\}$ für alle $n \geqq 0$ und definieren $B'_0 := \{w_0\}$ sowie

$$B'_n := \{\, v \in \Sigma^* \,|\, \mathrm{l}_2(v) \leqq l_n,\ v\Sigma^\omega \cap A_n\Sigma^\omega \neq \emptyset,\ v\Sigma^\omega \cap A_{n-1}\Sigma^\omega = \emptyset \,\}$$

für alle $n \geqq 1$. Dann ist $B' := \bigcup_{n=0}^{\infty} B'_n$ präfix-frei, und es gilt $B'_n\Sigma^\omega = A_n\Sigma^\omega$ für alle $n \geqq 0$, also $B'\Sigma^\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_n\Sigma^\omega = A\Sigma^\omega$. Wenn A präfix-frei ist, gilt $B'_n = A_n$ für alle $n \geqq 0$ und wir haben $A = B'$. □

4 Chaitin-Zufälligkeit

4.1 Definition

Sei $f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine berechenbare partielle Funktion mit Definitionsbereich $\mathrm{Def}(f) := \{\, w \in \Sigma^* \,|\, f(w) \text{ ist definiert} \,\}$.

Dann heißt f *selbstbegrenzend*, wenn $\mathrm{Def}(f)$ präfix-frei ist.

(Diese Definition wird durch das Turingmaschinen-Modell von Chaitin motiviert, das neben dem unendlichen Arbeitsband noch ein endliches Programm-Leseband besitzt. Beendet eine derartige Turingmaschine ihre Berechnung, nachdem sie ein gegebenes Programm vollständig abgearbeitet hat, so hält sie bei keinem echten Anfangsstück dieses Programmes an, und kann auch kein längeres Programm vollständig abarbeiten, wenn dieses das Ausgangsprogramm als Anfangsstück enthält.)

4.2 Definition (Chaitin [4])

Sei $f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine selbstbegrenzende Funktion.

Die *Kolmogorov-Komplexität* (bezüglich f) eines Binärwortes $w \in \Sigma^*$ wird definiert als

$$K_f(w) := \begin{cases} \min \{\, \mathrm{l}_2(v) \,|\, f(v) = w \,\} & \text{für } w \in f[\Sigma^*], \\ \infty & \text{für } w \notin f[\Sigma^*]. \end{cases}$$

4.3 Definition (Chaitin [4])

Eine berechenbare partielle Funktion $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ wird *Chaitin-universell* genannt, wenn sie selbstbegrenzend ist und für jede selbstbegrenzende Funktion $f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$K_u(w) \leq K_f(w) + c \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$

4.4 Bemerkung

Eine Chaitin-universelle Funktion $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ ist surjektiv, daher ist ihr Definionsbereich $\mathrm{Def}(u)$ unendlich.

(Für jedes $w \in \Sigma^*$ ist die Funktion $f_w : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ mit $\mathrm{Def}(f_w) = \{\epsilon\}$ und $f_w(\epsilon) := w$ selbstbegrenzend, und es gilt $K_{f_w}(w) = 0$. Daraus folgt $K_u(w) \leq c$, also $w \in u[\Sigma^*]$.)

4.5 Proposition

Es gibt eine Chaitin-universelle berechenbare Funktion $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$.

Beweis: (cf. Chaitin [4] p. 46, Proof of Proposition 14 in Hertling [8])

Sei $\psi : \mathbb{N}_0 \to \{\, f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^* \,|\, f \text{ ist berechenbar} \,\}$ eine Aufzählung aller berechenbaren Funktionen. Daraus erhalten wir eine Aufzählung

$$\phi : \mathbb{N}_0 \to \{\, f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^* \,|\, f \text{ ist selbstbegrenzend} \,\}$$

aller selbstbegrenzenden Funktionen, indem wir den Definitionsbereich jeder berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ wie in Lemma 3.7 (1) präfix-frei machen.

Definiere nun $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ durch

$$u(0^m 1 v) := \phi_m(v) \qquad \text{für alle } m \geqq 0 \text{ und alle } v \in \Sigma^*.$$

Diese Funktion ist Chaitin-universell, denn

$$\mathrm{Def}(u) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \{\, 0^m 1 v \,|\, v \in \mathrm{Def}(\phi_m) \,\}$$

ist präfix-frei ($0^m 1 v \neq 0^n 1 w \Longrightarrow m \neq n$ oder $m = n, v \neq w$) und für jede selbstbegrenzende Funktion $f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ gibt es ein $n \geqq 0$ mit $f = \phi_n$, also

$$\begin{aligned} K_u(w) &= \min \left\{ \mathrm{l}_2(0^m 1 v) \,\middle|\, m \geqq 0, v \in \Sigma^*, u(0^m 1 v) = w \right\} \\ &\leq \min \left\{ \mathrm{l}_2(v) \,\middle|\, v \in \Sigma^*, \phi_m(v) = w \right\} + (m+1) = K_f(w) + c \end{aligned}$$

mit $c = m + 1$. □

4.6 Lemma

Sei $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ *eine Chaitin-universelle Funktion und sei* $f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ *eine beliebige berechenbare partielle Funktion.*

Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ *mit*

$$K_u(f(w)) \leq K_u(w) + c \qquad \textit{für alle } w \in \mathrm{Def}(f).$$

Beweis:

Die Funktion $f \circ u$ ist selbstbegrenzend ($\mathrm{Def}(f \circ u) \subseteq \mathrm{Def}(u)$ ist präfix-frei). Für alle $w \in \mathrm{Def}(f)$ gilt $K_{f\circ u}(f(w)) \leq K_u(w)$. Weil u Chaitin-universell ist, gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ mit $K_u(w) \leq K_{f\circ u}(w) + c$ für alle $w \in \Sigma^*$. Insgesamt erhalten wir

$$K_u(f(w)) \leq K_{f\circ u}(f(w)) + c \leq K_u(w) + c \quad \text{für alle } w \in \mathrm{Def}(f). \qquad \square$$

4.7 Feststellung

Seien $u, u' : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ Chaitin-universelle Funktionen.

Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ mit

$$|K_u(w) - K_{u'}(w)| \leq c \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$

(Gilt $K_u(w) \leq K_{u'}(w) + c_1$ und $K_{u'}(w) \leq K_u(w) + c_2$ für alle $w \in \Sigma^*$, so setze $c := \max(c_1, c_2)$.)

4.8 Definition (Hertling [8] Definition 18)

Sei $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine Chaitin-universelle Funktion.

(1) Eine Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ heißt *Chaitin-zufällig*, wenn es eine Konstante $c_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\quad K_u(s_{0:i}) \geq i - c_0 \quad$ für alle $i \geqq 0$.

(2) Eine Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ heißt *stark Chaitin-zufällig*, wenn die Folge $(K_u(s_{0:i}) - i)_{i \geqq 0}$ über alle Schranken wächst, also $\lim\limits_{i\to\infty} (K_u(s_{0:i}) - i) = \infty$ gilt.

(Wegen Feststellung 4.7 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Chaitin-universellen Funktion u.)

4.9 Satz

Für eine Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) *s ist zufällig.*

(b) *s ist Chaitin-zufällig.*

(c) *s ist stark Chaitin-zufällig.*

Beweis:

Wir zeigen (a) ⇒ (c) ⇒ (b) ⇒ (a). Zusätzlich geben wir einen direkten Beweis von (a) ⇒ (b).

(a) ⇒ (c):

Sei $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine Chaitin-universelle Funktion und $k \geqq 1$ fest. Wir definieren eine rekursiv aufzählbare Teilmenge $B \subset \mathbb{N} \times \Sigma^*$ durch

$$B_n := \{\, w \in \Sigma^* \,|\, \mathrm{l}_2(w) = n,\ K_u(w) \leq n + k \,\} \qquad \text{für alle } n \geqq 1$$

und $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{n\} \times B_n)$.

Wir weisen nun nach, dass die Familie $(\, W_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ mit $W_n := B_n \Sigma^\omega$ für alle $n \geqq 1$ ein Solovay-Test ist.

Wähle für jedes $w \in \Sigma^*$ ein $v_w \in \Sigma^*$ mit $u(v_w) = w$ und $K_u(w) = \mathrm{l}_2(v_w)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mu(W_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{w \in B_n} 2^{-n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{w \in B_n} 2^{k - \mathrm{l}_2(v_w)} \\ &= 2^k \cdot \sum_{v \in \mathrm{Def}(u)} 2^{-\mathrm{l}_2(v)} \\ &\leq 2^k \qquad \text{(Kraft-Ungleichung 3.3).} \end{aligned}$$

Sei nun $s \in \Sigma^\omega$ eine Solovay-zufällige Binärfolge. Dann gibt es ein $n \geqq 1$ mit $s \notin W_{n+1} = B_{n+1}\Sigma^\omega$ für alle $i \geqq n$. Nun gilt $K_u(s_{0:i}) > i + 1 + k$ für alle $i \geqq n$, das heißt s ist stark Chaitin-zufällig.

(c) ⇒ (b):

Sei $s \in \Sigma^\omega$ stark Chaitin-zufällig. Dann wächst die Folge $\big(K_u(s_{0:i}) - i\big)_{i \geqq 0}$ über alle Schranken, ist also insbesondere nach unten beschränkt.

(b) ⇒ (a):

Sei $s \in \Sigma^\omega$ Chaitin-zufällig und sei $(\, V_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ ein Martin-Löf-Test. Dann ist auch $(\, V'_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ mit $V'_n := V_{2n+1}$ für alle $n \geqq 1$ ein Martin-Löf-Test. Lemma 3.7 (2) liefert eine rekursiv aufzählbare Teilmenge $A' \subset \mathbb{N} \times \Sigma^*$ mit präfixfreien Mengen $A'_n := \{\, w \in \Sigma^* \,|\, (n, w) \in A' \,\}$ und $V'_n = A'_n \Sigma^\omega$ für alle $n \geqq 1$.

Seien $(n_i)_{i \geqq 0}$ und $(w_i)_{i \geqq 0}$ berechenbare Folgen mit $A' = \{\, (n_i, w_i) \,|\, i \geqq 0 \,\}$, also

$$A'_n = \{\, w_i \in \Sigma^* \,|\, i \geqq 0,\ n_i = n \,\} \qquad \text{für alle } n \geqq 1.$$

Wegen $\mu(V'_n) \leq 2^{-(2n+1)}$ für alle $n \geqq 1$ gilt

$$2^{-\mathrm{l}_2(w_i)} = \mu(w_i \Sigma^\omega) \leq \mu(A'_{n_i} \Sigma^\omega) = \mu(V'_{n_i}) \leq 2^{-(2n_i+1)}$$

für alle $i \geqq 0$, also $\mathrm{l}_2(w) \geq 2n + 1$ für alle $w \in A'_n$.

Wir setzen $m_i := \mathrm{l}_2(w_i) - n_i$ für alle $i \geqq 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-m_i} &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\mathrm{l}_2(w_i)+n_i} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sum_{\{\, i \geqq 0 \,|\, n_i = n \,\}} 2^{-\mathrm{l}_2(w_i)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sum_{w \in A'_n} 2^{-\mathrm{l}_2(w)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(V'_n) \\
&\leq 1 \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{wegen } \mu(V'_n) \leq 2^{-(2n+1)}).
\end{aligned}$$

Nach dem effektiven Kraft-Chaitin-Theorem 3.6 gibt es nun eine präfix-freie berechenbare Folge $(v_i)_{i \geqq 0}$ mit $\mathrm{l}_2(v_i) = m_i$ für alle $i \geqq 0$.

Durch $g(v_i) := w_i$ für alle $i \geqq 0$ definieren wir nun eine selbstbegrenzende Funktion $g : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ mit $\mathrm{Def}(g) = \{\, v_i \,|\, i \geqq 0 \,\}$. Wir erhalten dann

$$K_g(w) \leq \mathrm{l}_2(w) - n \qquad \text{für alle } w \in A'_n,\ n \geqq 1.$$

Sei $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine Chaitin-universelle Funktion. Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ mit $\quad K_u(w) \leq K_g(w) + c \quad$ für alle $w \in \Sigma^*$, also haben wir

$$K_u(w) \leq \mathrm{l}_2(w) - n + c \qquad \text{für alle } w \in A'_n,\ n \geqq 1.$$

Da $s \in \Sigma^\omega$ Chaitin-zufällig ist, gibt es ein $c_0 \in \mathbb{N}$ mit $K_u(s_{0:n}) \geq n - c_0$ für alle $n \geqq 0$. Setze $n_0 := c + c_0 + 2$. Wäre $s_{0:i} \in A'_{n_0}$ für ein $i \geqq 0$, so folgte $i - c_0 \leq K_u(s_{0:k}) \leq i + 1 - n_0 + c$, also $n_0 \leqq c + c_0 + 1$, in Widerspruch zur Wahl von n_0. Folglich gilt $s_{0:i} \notin A'_{n_0}$ für alle $i \geqq 0$, also

$$s \notin A'_{n_0} \Sigma^\omega = V'_{n_0} = V_{2n_0+1},$$

das heißt s besteht den Martin-Löf-Test $(\, V_n \,|\, n \geqq 1 \,)$.

(a) $\Rightarrow$ (b):

Sei $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine Chaitin-universelle Funktion. Wir definieren eine rekursiv aufzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{N} \times \Sigma^*$ durch

$$A_n := \{\, w \in \Sigma^* \,|\, K_u(w) \leq \mathrm{l}_2(w) - n \,\} \qquad \text{für alle } n \geqq 1$$

und $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{n\} \times A_n)$.

Wir weisen nun nach, dass die Familie $(\, U_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ mit $U_n := A_n \Sigma^\omega$ für alle $n \geqq 1$ ein Martin-Löf-Test ist.

Wähle für jedes $w \in \Sigma^*$ ein $v_w \in \Sigma^*$ mit $u(v_w) = w$ und $K_u(w) = \mathrm{l}_2(v_w)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu(U_n) &\leq \sum_{w \in A_n} \mu(w\Sigma^\omega) \\
&= \sum_{w \in A_n} 2^{-\mathrm{l}_2(w)} \\
&\leq \sum_{w \in A_n} 2^{-n-K_u(w)} \\
&= 2^{-n} \cdot \sum_{w \in A_n} 2^{-\mathrm{l}_2(v_w)} \\
&\leq 2^{-n} \cdot \sum_{v \in \mathrm{Def}(u)} 2^{-\mathrm{l}_2(v)} \\
&\leq 2^{-n} \qquad\qquad \text{(Kraft-Ungleichung 3.3).}
\end{aligned}$$

Sei nun $s \in \Sigma^\omega$ eine Martin-Löf-zufällige Binärfolge. Dann gibt es ein $n \geqq 1$ mit $s \notin V_n = A_n \Sigma^\omega$, also $K_u(s_{0:i}) > i + 1 - n$ für alle $i \geqq 1$, das heißt s ist Chaitin-zufällig. □

4.10 Zusatz

Es gibt einen Martin-Löf-Test $(\, U_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ mit der Eigenschaft, dass jede Binärfolge, die den Test $(\, U_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ besteht, auch jeden anderen Martin-Löf-Test $(\, V_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ besteht (*universeller Martin-Löf-Test*).

(Der Test $(\, U_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ aus (a) $\Rightarrow$ (b) im Beweis von Satz 4.9 hat diese Eigenschaft, denn jede Binärfolge die ihn besteht ist Chaitin-zufällig.)

5 Linksberechenbarkeit

5.1 Definition

Sei α eine reelle Zahl.

(1) α wird *berechenbar* genannt, wenn es eine berechenbare Folge rationaler Zahlen $(a_n)_{n \geqq 0}$ gibt mit $|\alpha - a_n| < 2^{-n}$ für alle $n \geqq 0$.

(Dabei heißt eine Folge rationaler Zahlen $(a_n)_{n \geqq 1}$ *berechenbar*, wenn es berechenbare Folgen natürlicher Zahlen $(i_n)_{n \geqq 0}$, $(j_n)_{n \geqq 0}$ und $(k_n)_{n \geqq 0}$ gibt mit $a_n = \frac{i_n - j_n}{1+k_n}$ für alle $n \geqq 0$.)

(2) Unter einer *aufsteigenden Approximation* von α wollen wir eine streng monoton wachsende berechenbare Folge rationaler Zahlen verstehen, die gegen α konvergiert.

(3) Eine reelle Zahl α heißt *linksberechenbar*, wenn es eine aufsteigende Approximation von α gibt.

5.2 Beispiel

Jede rationale Zahl ist berechenbar.

(Für $\alpha = q \in \mathbb{Q}$ hat die Folge $(q_n)_{n \geqq 0}$ mit $q_n := q - 2^{-(n+1)}$ für alle $n \geqq 0$ die gewünschte Eigenschaft.)

5.3 Bemerkungen

Sei α eine reelle Zahl.

(1) α ist genau dann berechenbar, wenn es eine berechenbare Folge von Binärwörtern $(w_n)_{n \geqq 0}$ gibt mit $|\alpha - \langle w_n \rangle_2| < 2^{-n}$ für alle $n \geqq 0$.

(Wähle $w_n \in \Sigma^*$ mit $|a_{n+1} - \langle w_n \rangle_2| < 2^{-(n+1)}$ für alle $n \geqq 0$.)

(2) α ist genau dann berechenbar, wenn sowohl α als auch $-\alpha$ linksberechenbar sind.

(Vgl. [1] Lemma 4.31.)

5.4 Proposition (vgl. [2] Theorem 4.1)
Für eine reelle Zahl $0 < \alpha \leq 1$ sind folgende Aussagen äquivalent*:*

(a) *α ist linksberechenbar.*

(b) *Es gibt eine berechenbare Folge von Binärwörtern $(w_n)_{n \geqq 0}$ mit der Eigenschaft, dass $(\langle w_n \rangle_2)_{n \geqq 0}$ eine aufsteigende Approximation von α ist.*

(c) *Es gibt eine monoton wachsende berechenbare Folge rationaler Zahlen, die gegen α konvergiert.*

(d) *Es gilt $\alpha = 2^{-A}$ mit einer unendlichen präfix-freien rekursiv aufzählbaren Teilmenge $A \subset \Sigma^*$.*

(e) *Es gilt $\alpha = 2^{-A}$ mit einer unendlichen präfix-freien rekursiv entscheidbaren Teilmenge $A \subset \Sigma^*$.*

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Berechne $w_n \in \Sigma^*$ mit $a_n < \langle w_n \rangle_2 < a_{n+1}$ für alle $n \geqq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) ist klar.

(c) $\Rightarrow$ (a):

Sei $(a_n)_{n \geqq 0}$ eine monoton wachsende berechenbare Folge rationaler Zahlen, die gegen α konvergiert. Setze $a'_n := \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \geqq 0$. Wegen $a_0 + \cdots + a_n - 1 < (n+1)a_{n+1}$ für alle $n \geqq 0$ ist $(a'_n)_{n \geqq 0}$ streng monoton wachsend und wegen $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} = \alpha$ konvergiert auch $(a'_n)_{n \geqq 0}$ gegen α.

(a) $\Rightarrow$ (e):

Sei $(a_n)_{n \geqq 0}$ eine aufsteigende Approximation von α mit $0 < a_n < \alpha \leq 1$ für alle $n \geqq 0$. (Gilt nicht $a_0 > 0$, so setze $m := \min \{ n \geqq 0 \,|\, a_n > 0 \}$ und betrachte $(a_{m+n})_{n \geqq 0}$.)

Konstruiere eine monoton über alle Schranken wachsende berechenbare Folge $(n_k)_{k \geqq 0}$ und eine streng monoton wachsende berechenbare Folge $(m_k)_{k \geqq 0}$ mit

$$\sum_{k=0}^{m_j} 2^{-n_k} < a_j < 2^{-j} + \sum_{k=0}^{m_j} 2^{-n_k} \qquad \text{für alle } j \geqq 0,$$

insbesondere also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k} = \alpha$. Das Effektive Kraft-Chaitin-Theorem 3.6 liefert nun eine berechenbare Folge $(w_k)_{k \geqq 0}$ mit $\mathrm{l}_2(w_k) = n_k$ für alle $k \geqq 0$. Für die präfix-freie Menge $A := \{\, w_k \,|\, k \geqq 0 \,\}$ gilt $2^{-A} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k} = \alpha$. Sie ist rekursiv entscheidbar und unendlich, weil die Folge $(\mathrm{l}_2(w_k))_{k \geqq 0}$ monoton über alle Schranken wachsend ist.

(e) $\Rightarrow$ (d) ist klar.

(d) $\Rightarrow$ (a):

Sei $(v_k)_{k \geqq 0}$ eine injektive berechenbare Aufzählung von A. Dann liefert

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} 2^{-\mathrm{l}_2(v_k)} \qquad \text{für alle } n \geqq 0$$

eine aufsteigende Approximation von $\alpha = 2^{-A}$. $\square$

6 Ω-Zahlen und Ω-ähnliche Zahlen

6.1 Bezeichnungen (Chaitin [4] p. 48)

(1) Sei $f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine selbstbegrenzende Funktion.

Unter einer *Haltewahrscheinlichkeit* von f versteht man die reelle Zahl

$$\mu(\mathrm{Def}(f)\Sigma^\omega) = \sum_{w \in \mathrm{Def}(f)} 2^{-\mathrm{l}_2(w)} = 2^{-\mathrm{Def}(f)}.$$

(2) Als Ω-*Zahl* bezeichnet man die Haltewahrscheinlichkeit einer Chaitin-universellen (siehe 4.3) Funktion $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$, also

$$\Omega_u := 2^{-\mathrm{Def}(u)}.$$

6.2 Definition (cf. Kučera/Slaman [11] Def. 1.13, Hertling [8] Def. 22)

Seien α und β linksberechenbare reelle Zahlen.

(1) Seien $(a_n)_{n \geqq 0}$ und $(b_n)_{n \geqq 0}$ aufsteigende Approximationen von α beziehungsweise β (vgl. 5.1 (2)).

$(a_n)_{n \geqq 0}$ *dominiert* $(b_n)_{n \geqq 0}$, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$c(\alpha - a_n) \geq (\beta - b_n) \text{ für alle } n \geqq 0.$$

(2) α *dominiert* β, wenn es aufsteigende Approximationen $(a_n)_{n \geqq 0}$ von α und $(b_n)_{n \geqq 0}$ von β gibt mit $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(b_n)_{n \geqq 0}$.

Wir schreiben dann $\alpha \geq_{\mathrm{dom}} \beta$.

6.3 Beobachtung

Seien $(a_n)_{n \geqq 0}$, $(b_n)_{n \geqq 0}$ und $(c_n)_{n \geqq 0}$ aufsteigende Approximationen von linksberechenbaren reellen Zahlen α, β beziehungsweise γ.

(1) Es gilt $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(a_n)_{n \geqq 0}$.

(2) Gilt $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(b_n)_{n \geqq 0}$ und $(b_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(c_n)_{n \geqq 0}$, so auch $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(c_n)_{n \geqq 0}$.

(Für (1) wähle $c = 1$; für (2) bemerke, dass aus $c(\alpha - a_n) \geq (\beta - b_n)$ und $c'(\beta - b_n) \geq (\gamma - c_n)$ folgt $cc'(\alpha - a_n) \geq (\gamma - c_n)$.)

6.4 Feststellung

Ist α eine linksberechenbare reelle Zahl, und sind $(a_n)_{n \geqq 0}$ und $(a'_n)_{n \geqq 0}$ aufsteigende Approximationen von α, so gibt es eine streng monoton wachsende berechenbare Folge natürlicher Zahlen $(m_n)_{n \geqq 0}$, so dass $(a_n)_{n \geqq 0}$ die Teilfolge $(a'_{m_n})_{n \geqq 0}$ dominiert.

(Durch $m_0 := \min\{\, k \geqq 0 \,|\, a'_k > a_0 \,\}$ und $m_n := \min\{\, k > m_{n-1} \,|\, a'_k > a_n \,\}$ für alle $n \geqq 0$ wird eine streng monoton wachsende berechenbare Folge natürlicher Zahlen $(m_n)_{n \geqq 0}$ definiert. Dann gilt $(\alpha - a_n) > (\alpha - a'_{m_n})$ für alle $n \geqq 0$.)

6.5 Folgerung (Hertling [8] Lemma 24)

Die Relation $\geq_{\mathrm{dom}}$ ist reflexiv und transitiv.

Beweis:

Reflexivität ist klar nach 6.3 (1).

Für die Transitivität seien α, β und γ linksberechenbare reelle Zahlen mit $\alpha \geq_{\mathrm{dom}} \beta$ und $\beta \geq_{\mathrm{dom}} \gamma$. Weiter seien $(a_n)_{n \geqq 0}$, $(b_n)_{n \geqq 0}$, $(b'_n)_{n \geqq 0}$ und $(c_n)_{n \geqq 0}$ aufsteigende Approximationen von α, β, β beziehungsweise γ, $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiere $(b_n)_{n \geqq 0}$ und $(b'_n)_{n \geqq 0}$ dominiere $(c_n)_{n \geqq 0}$.

Nach 6.4 gibt es eine Teilfolge $(b'_{m_n})_{n \geqq 0}$, die von $(b_n)_{n \geqq 0}$ dominiert wird. Dann ist $(b'_{m_n})_{n \geqq 0}$ eine aufsteigende Approximation von β, und $(b'_{m_n})_{n \geqq 0}$ dominiert die aufsteigende Approximation $(c_{m_n})_{n \geqq 0}$ von γ. Wegen $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(c_{m_n})_{n \geqq 0}$ (nach Beobachtung 6.3 (2)) folgt $\alpha \geq_{\mathrm{dom}} \gamma$. $\square$

6.6 Definition (cf. Kučera/Slaman [11] Def. 1.13, Hertling [8] Def. 22)

(1) Sei $(a_n)_{n \geqq 0}$ eine aufsteigende Approximation (einer linksberechenbaren reellen Zahl α), also eine konvergente streng monoton wachsende berechenbare Folge rationaler Zahlen.

Dann heiße $(a_n)_{n \geqq 0}$ *universell*, wenn $(a_n)_{n \geqq 0}$ jede aufsteigende Approximation $(b_n)_{n \geqq 0}$ (einer rellen Zahl β) dominiert.

(2) Sei α eine reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$.

Dann wird α als Ω-*ähnlich* bezeichnet, wenn es eine universelle aufsteigende Approximation $(a_n)_{n \geqq 0}$ gibt, die gegen α konvergiert.

6.7 Lemma (cf. Hertling [8] Lemma 26)

Seien $(a_n)_{n \geqq 0}$ und $(b_n)_{n \geqq 0}$ aufsteigende Approximationen von linksberechenbaen reellen Zahlen α beziehungsweise β, es gelte $\alpha > 0$ und $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiere $(b_n)_{n \geqq 0}$.

Dann gibt es eine berechenbare Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k \geqq 0}$ und eine Konstante $c_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k} = \alpha$ und

$$2^{c_0} \cdot 2^{-n_k} > (b_k - b_{k-1}) \quad \textit{für alle } k \geqq 1.$$

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $a_0 > 0$. (Gilt $a_0 \leq 0$, so setze $m := \min \{ n \geqq 0 \,|\, a_n > 0 \}$. Dann wird $(b_{m+n})_{n \geqq 0}$ von $(a_{m+n})_{n \geqq 0}$ dominiert, und ist $c_0' \in \mathbb{N}$ mit $2^{c_0'} \cdot 2^{-n_k} > (b_{k+1} - b_k)$ für alle $k \geqq m$, so wähle $c_0 \geqq c_0'$ mit $2^{c_0} > \max \{ 2^{n_k}(b_{k+1} - b_k) \,|\, 0 \leqq k < m \}$.)

Sei $c \in \mathbb{N}$ mit $c(\alpha - a_n) \geq (\beta - b_n)$ für alle $n \geqq 0$. Wähle ein $c_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{c_0 - 1} > c$, also

$(*) \qquad 2^{c_0-1}(\alpha - a_n) > (\beta - b_n) \quad$ für alle $n \geqq 0$.

Zunächst definieren wir rekursiv eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(m_k)_{k \geqq 0}$ mit $m_0 := 0$ und

$$m_{k+1} := \min \{ m > m_k \,|\, 2^{c_0-1}(a_m - a_{m_k}) > (b_m - b_{m_k}) \}.$$

(Wegen $(*)$ ist die Menge nicht leer.)

Weiter definieren wir eine berechenbare Folge positiver rationaler Zahlen $(q_i)_{i \geqq 0}$ durch $q_0 := a_0$ und für jedes $i \geqq 0$

$$q_{i+1} := (b_{i+1} - b_i)\frac{a_{m_{k+1}} - a_{m_k}}{b_{m_{k+1}} - b_{m_k}}, \qquad \text{falls } m_k \leqq i < m_{k+1} \ \ (k \geqq 0).$$

Dann gilt $\sum\limits_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} q_{i+1} = a_{m_{k+1}} - a_{m_k}$ für alle $k \geqq 0$, also $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i = \alpha$ und

$$2^{c_0 - 1} q_{i+1} > (b_{i+1} - b_i) \qquad \text{für alle } i \geqq 0.$$

Schließlich definieren wir die berechenbare Folge $(n_k)_{k \geqq 0}$ durch

$$n_k := \min \left\{ j \geqq 0 \,\middle|\, 2^{-j} \leq \sum_{i=0}^{k} q_i - \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-n_i} \right\} \qquad \text{für alle } k \geqq 0.$$

Nach Konstruktion haben wir

$$\sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i} \leq \sum_{i=0}^{k} q_i < \sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i} + 2^{-n_k} \qquad \text{für alle } k \geqq 0$$

und $2^{-(n_i - 1)} \geq q_i$ für alle $i \geqq 0$ (vollständige Induktion), also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k} = \alpha$ (wegen $\sum\limits_{i=0}^{k} 2^{-n_i} \leq \alpha$ für alle $k \geq 0$ ist $(n_k)_{k \geqq 0}$ eine Nullfolge) und

$$2^{c_0} \cdot 2^{-n_{i+1}} > (b_{i+1} - b_i) \qquad \text{für alle } i \geqq 0. \qquad \square$$

7 Linksberechenbare zufällige Zahlen

7.1 Definition

Eine reelle Zahl $\alpha \geq 0$ heiße *zufällig*, wenn es eine ganze Zahl $k \geqq 0$ und eine zufällige Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ gibt mit $\alpha = k + \langle s \rangle_2$, wenn sie also eine Binärdarstellung besitzt, deren Nachkommastellen eine zufällige Binärfolge bilden.

7.2 Feststellung

Eine berechenbare reelle Zahl α kann nicht zufällig sein.

(Mit Hilfe von Hinweis 5.3 (1) erhalten wir eine Folge von Binärwörtern $(w_n)_{n \geqq 0}$ mit $|\alpha - \langle w_n \rangle_2| < 2^{-n}$ für alle $n \geqq 0$. Nun definiert

$$V_n := \{\, s \in \Sigma^\omega \,|\, d(s_{0:n}, w_n) < 2^{-n} \,\} \qquad \text{für alle } n \geqq 1$$

einen Martin-Löf-Test, den die Nachkommastellen einer Binärdarstellung von α nicht bestehen können.)

7.3 Satz (Calude et al. [2] Theorem 6.6, Kučera/Slaman [11] Theorem 2.1)
Für eine reelle Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) *α ist linksberechenbar und zufällig.*

(b) *α ist linksberechenbar und jede aufsteigende Approximation von α ist universell.*

(c) *α ist Ω-ähnlich.*

(d) *α ist eine Ω-Zahl.*

(e) *α ist $\geq_{\text{dom}}$ -maximal, das heißt α ist linksberechenbar mit $\alpha \geq_{\text{dom}} \beta$ für alle linksberechenbaren reellen Zahlen β.*

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b):

Sei $(a_n)_{n \geqq 0}$ eine aufsteigende Approximation von α. Um nachzuweisen, dass $(a_n)_{n \geqq 0}$ universell ist, betrachten wir eine beliebige aufsteigende Approximation $(b_n)_{n \geqq 0}$ (einer reellen Zahl β) und zeigen: $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(b_n)_{n \geqq 0}$.

Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sämtliche Zahlen a_n und b_n *dyadisch* sind, also die Form $z/2^k$ haben mit einer ganzen Zahl z und einer natürlichen Zahl k.

(Berechne dyadische Zahlen a'_n und b'_n mit $a_n < a'_n < a_{n+1}$, $b'_0 < b_0$ und $b_n < b'_{n+1} < b_{n+1}$ für alle $n \geqq 0$. Dann sind $(a'_n)_{n \geqq 0}$ und $(b'_n)_{n \geqq 0}$ streng monoton wachsend mit $\lim\limits_{n \to \infty} a'_n = \alpha$ und $\lim\limits_{n \to \infty} b'_n = \beta$. Weisen wir $(a'_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(b'_n)_{n \geqq 0}$ nach, so folgt auch $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(b_n)_{n \geqq 0}$.)

Weiter dürfen wir $0 = a_0 < a_1 < \cdots < \alpha < 1$ und $0 = b_0 < b_1 < \cdots < \beta < 1$ annehmen.

(Für $m \geqq 0$ mit $2^m > \max(\alpha - a_0, \beta - b_0)$ betrachte $\tilde{a}_n := \dfrac{a_n - a_0}{2^m}$ und $\tilde{b}_n := \dfrac{b_n - b_0}{2^m}$ für alle $n \geqq 0$. Dann gilt $\tilde{\alpha} := \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{a}_n = \dfrac{\alpha - a_0}{2^m} < 1$ und $\tilde{\beta} := \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{b}_n = \dfrac{\beta - b_0}{2^m} < 1$.)

Zunächst konstruieren wir eine Familie $(\, A_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ von rekursiv aufzählbaren Teilmengen $A_n \subseteq \Sigma^*$, dann durch $V_n := A_n \Sigma^\omega$ für alle $n \geqq 1$ einen Martin-Löf-Test.

Sei $n \geqq 1$ fest. Wir definieren rekursiv eine aufsteigende Folge von Teilmengen $A_n^{(i)} \subset \Sigma^*$ für alle $i \geqq 0$. Parallel dazu definieren wir eine aufsteigende Folge von Teilmengen $C_n^{(i)} \subset [0,\,1]$ mit $C_n^{(i)} = \left\{ \langle s \rangle_2 \,\middle|\, s \in A_n^{(i)}\Sigma^\omega \right\}$ für alle $i \geqq 0$. Außerdem konstruieren wir eine (von n abhängige) Folge $(m_i)_{i \geqq 0}$, die angibt, in wievielen der Schritte, die zur Berechnung von $A_n^{(i)}$ geführt haben, Elemente zur vorhergehenden Menge hinzugefügt worden sind. Schließlich definieren wir eine (von n abhängige) Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightharpoonup \mathbb{N}_0$, $m \mapsto f(m)$, die angibt, bei welchem Index $i = f(m)$ zum m-ten Male Elemente zur vorhergehenden Menge hinzugefügt wurden.

Wir setzen $A_n^{(0)} := \emptyset$, $C_n^{(0)} := \emptyset$, $m_0 := 0$ und $f(0) := 0$. Für $i \geqq 1$ setzen wir $A_n^{(i)} := A_n^{(i-1)}$ und $m_i := m_{i-1}$, falls a_i im Inneren von $C_n^{(i-1)}$ liegt; anderenfalls bestimmen wir eine endliche präfix-freie Teilmenge $B_n^{(i)} \subset \Sigma^*$ mit

$$\left\{ \langle s \rangle_2 \,\middle|\, s \in B_n^{(i)}\Sigma^\omega \right\} = \left[a_n, a_n + 2^{-n}(b_n - b_{f(m_{i-1})})\right]$$

und setzen $A_n^{(i)} := A_n^{(i-1)} \cup B_n^{(i)}$, $C_n^{(i)} := C_n^{(i-1)} \cup \left[a_n, a_n + 2^{-n}(b_n - b_{f(m_{i-1})})\right]$, $m_i := m_{i-1} + 1$ sowie $f(m_i) := i$.

Ist $n \geqq 1$, so gilt für $A_n := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_n^{(k)}$ die folgende Abschätzung

$$\mu(A_n\Sigma^\omega) = \sum_{0 < m \in \operatorname{Def}(f)} \frac{b_{f(m)} - b_{f(m-1)}}{2^n} \leq \frac{\beta - b_0}{2^n} \leq 2^{-n}.$$

Durch $V_n := A_n\Sigma^\omega$ für alle $n \geqq 1$ erhalten wir daher einen Martin-Löf-Test $(\, V_n \,|\, n \geqq 1\,)$. Weil α eine zufällige reelle Zahl ist, gibt es eine zufällige Binärfolge $s \in \Sigma^\omega$ mit $\langle s \rangle_2 = \alpha$ und ein $n \geqq 1$ mit $s \notin V_n$, also

$$\alpha = \langle s \rangle_2 \notin C_n := \bigcup_{i=0}^{\infty} C_n^{(i)}.$$

Nun zeigen wir $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(b_n)_{n \geqq 0}$ durch Nachweis der Abschätzung $2^n(\alpha - a_k) \geq (\beta - b_k)$ für alle $k \geqq 0$.

Wegen $\alpha \notin C_n$ gibt es zu jedem $i \geqq 0$ ein $i' > i$ mit $a_{i'} \notin C_n$. Nach Konstruktion gilt daher $\operatorname{Def}(f_n) = \mathbb{N}_0$, das heißt bei der Konstruktion der $A_n^{(i)}$ sind unendlich oft Elemente hinzugefügt worden. Daher ist die Folge $(f(j))_{j \geqq 0}$ streng monoton wachsend und es gilt $a_{f(j+2)} \geq a_{f(j+1)} + 2^{-n} \cdot (b_{f(j+1)} - b_{f(j)})$ für alle $j \geqq 0$, also

$$\begin{aligned} 2^n \cdot (\alpha - a_{f(m+1)}) &= 2^n \cdot \sum_{j=m}^{\infty} (a_{f(j+2)} - a_{f(j+1)}) \\ &\geq \sum_{j=m}^{\infty} (b_{f(j+1)} - b_{f(j)}) = (\beta - b_{f(m)}) \end{aligned}$$

für alle $m \geqq 0$. Ist nun $k \geqq 0$ gegeben, so haben wir $f(j_k) \leqq k < f(j_k + 1)$ mit $j_k := \max\{\, j \geqq 0 \,|\, f(j) \leqq k \,\}$, also

$$2^n \cdot (\alpha - a_k) \geq 2^n \cdot (\alpha - a_{f(j_k+1)}) \geq (\beta - b_{f(j_k)}) \geq (\beta - b_k).$$

(b) $\Rightarrow$ (c) ist klar.

(c) $\Rightarrow$ (d):

Sei $(a_n)_{n \geqq 0}$ eine universelle aufsteigende Approximation von α. Weiter sei $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine Chaitin-universelle Funktion und $\Omega_u := 2^{-\mathrm{Def}(u)}$ sei ihre Ω-Zahl.

Sei $(v_k)_{k \geqq 0}$ eine berechenbare Folge von Binärwörtern, in der jedes Element von $\mathrm{Def}(u)$ genau einmal vorkommt. Wegen der Universalität von $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiert $(a_n)_{n \geqq 0}$ die Folge $(b_n)_{n \geqq 0}$ mit $b_n := \sum_{k=0}^{n} 2^{-\mathrm{l}_2(v_k)}$ für alle $n \geqq 0$.

Lemma 6.7 liefert nun eine berechenbare Folge $(n_k)_{k \geqq 0}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k} = \alpha$ und eine Konstante $c_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{c_0} \cdot 2^{-n_k} > 2^{-\mathrm{l}_2(v_k)}$ für alle $k \geqq 1$, also gibt es ein $c \in \mathbb{N}$ mit

$$c - n_k > -\mathrm{l}_2(v_k) \qquad \text{für alle } k \geqq 0.$$

Das Effektive Kraft-Chaitin-Theorem 3.6 liefert eine berechenbare Folge von Binärwörtern $(w_k)_{k \geqq 0}$ mit $\mathrm{l}_2(w_k) = n_k$ für alle $k \geqq 0$, derart dass $\{\, w_k \,|\, k \geqq 0 \,\}$ präfix-frei ist. Wir definieren nun eine berechenbare Funktion $\tilde{u} : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ mit $\mathrm{Def}(\tilde{u}) = \{\, w_k \,|\, k \geqq 0 \,\}$ durch $\tilde{u}(w_k) := u(v_k)$ für alle $k \geqq 0$. Die Funktion $\tilde{u}$ ist selbstbegrenzend, und wegen $\mathrm{l}_2(w_k) < \mathrm{l}_2(v_k) + c$ für alle $k \geqq 0$ gilt

$$K_{\tilde{u}}(w) \leq K_u(w) + c \qquad \text{für alle } w \in \Sigma^*,$$

also ist auch $\tilde{u}$ Chaitin-universell. Schließlich gilt

$$\Omega_{\tilde{u}} = 2^{-\mathrm{Def}(\tilde{u})} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\mathrm{l}_2(w_k)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k} = \alpha,$$

das heißt α ist eine Ω-Zahl.

(d) $\Rightarrow$ (a):

Sei $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine Chaitin-universelle Funktion und $\Omega_u := 2^{-\mathrm{Def}(u)}$ sei ihre Ω-Zahl.

Nach Proposition 5.4 ist Ω_u linksberechenbar. Wir zeigen nun, dass die Folge der Nachkommastellen $s \in \Sigma^\omega$ einer Binärdarstellung von $\Omega_u = \langle s \rangle_2$ Chaitin-zufällig sind.

Sei $(v_k)_{k \geqq 0}$ eine injektive berechenbare Aufählung von $\mathrm{Def}(u)$. Dann liefert $a_n := \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\mathrm{l}_2(v_k)}$ für alle $n \geqq 0$ eine aufsteigende Approximation von Ω_u.

Definiere nun eine berechenbare Funktion $g : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ mit Definitionsbereich $\mathrm{Def}(g) = \{\, w \in \Sigma^* \,|\, \langle w \rangle_2 < \Omega_u \,\}$ und Werten

$$g(w) := \min_{\text{llex}}(\Sigma^* \setminus \{u(v_0), \ldots, u(v_{\ell_w})\}, \quad \ell_w := \min \{\, n \geqq 0 \,|\, \langle w \rangle_2 \leq a_n \,\},$$

für alle $w \in \Sigma^*$ mit $\langle w \rangle_2 < \Omega_u$, wobei das Minimum $\min\limits_{\text{llex}}$ bezüglich der längen-lexikographischen Ordnung (vgl. 1.3) zu bilden ist.

Wir weisen nun folgende Abschätzung nach

$$K_u(g(s_{0:n})) \geq n \qquad \text{für alle } n \geqq 0.$$

Mit $m_n := \min \{\, m \geqq 0 \,|\, \langle s_{0:n} \rangle_2 \leq a_m \,\}$ gilt $\ell_{s_{0:n}} \geqq m_n$ und

$$\langle s_{0:n} \rangle_2 \leq a_{m_n} < a_{m_n} + \sum_{k=m_n}^{\infty} 2^{-\mathrm{l}_2(v_k)} = \Omega_u \leq \langle s_{0:n} \rangle_2 + 2^{-n},$$

also $\mathrm{l}_2(v_k) \geqq n$ für alle $k \geqq m_n$, woraus sich nach Definition von g die behauptete Abschätzung der Kolmogorov-Komplexität ergibt.

Lemma 4.6 liefert nun eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} K_u(s_{0:n}) &\geq K_u(g(s_{0:n})) - c \\ &\geq n - c \qquad\qquad \text{für alle } n \geqq 0. \end{aligned}$$

Die Binärfolge s ist also (Chaitin-)zufällig.

(b) $\Rightarrow$ (e) ist klar.

(e) $\Rightarrow$ (c):

Die linksberechenbare reelle Zahl α sei $\geq_{\text{dom}}$ -maximal. Sei $u : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ eine Chaitin-universelle Funktion mit Ω-Zahl $\Omega_u := 2^{-\mathrm{Def}(u)}$. Wegen (d) $\Rightarrow$ (a) ist Ω_u linksberechenbar, daher gilt $\alpha \geq_{\text{dom}} \Omega_u$.

Seien $(a_n)_{n \geqq 0}$ und $(b_n)_{n \geqq 0}$ aufsteigende Approximationen von α beziehungsweise Ω_u, und $(a_n)_{n \geqq 0}$ dominiere $(b_n)_{n \geqq 0}$. Wegen (d) $\Rightarrow$ (b) ist $(b_n)_{n \geqq 0}$ und damit auch $(a_n)_{n \geqq 0}$ universell. $\square$

7.4 Ausblick

Kučera und Slaman geben eine weitere Bedingung an, die zu denen aus 7.3 äquivalent ist (Theorem 3.3 in [11]):

(f) Es gibt einen universellen Martin-Löf-Test $(\, U_n \,|\, n \geqq 1 \,)$ mit

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n).$$

Literatur

[1] Vasco Brattka, Peter Hertling, Klaus Weihrauch: *Einführung in die Berechenbare Analysis.*
Kurs 01681 der FernUniversität: Hagen, Wintersemester 1999/2000.

[2] Christian S. Calude, Peter H. Hertling, Bakhadyr Khoussainov, Yongge Wang: Recursively Enumerable Reals and Chaitin Ω-Numbers.
Theor. Comp. Sci. **225** (2001) 125-149.

[3] Gregory J. Chaitin: A theory of program size formally identical to information theory. *Journal of the ACM* **22** (1975) 329–340.
(Reprinted in [5] 107–122.)

[4] Gregory J. Chaitin: Algorithmic Information Theory.
IBM Journal of Research and Development **21** (1977) 350–359, 496.
(Reprinted in [5] 38–52.)

[5] Gregory J. Chaitin: *Information, Randomness and Incompleteness.*
Papers on Algorithmic Information Theory.
World Scientific: Signapore, 1987.

[6] Richard L. Epstein, Walter A. Carnielli: *Computability.*
Computable Functions, Logic, and the Foundations of Mathematics.
Wadsworth&Brooks: Pacific Grove, California, 1989.

[7] Hans Hermes: *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit.*
Springer: Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.

[8] Peter Hertling: Characterizations of Effectively Random Sequences and of Omega Numbers. Preprint, preliminary, incomplete version.
FernUniversität: Hagen, 8. Mai 2001.

[9] Ming Li, Paul Vitányi: *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications.*
2nd ed. Springer: New York, 1997.

[10] Per Martin-Löf: The Definition of Random Sequences.
Information and Control **9** (1966) 602–619.

[11] Antonín Kučera, Theodore A. Slaman: Randomness and Recursive Enumerability. Preprint, April 2001.
http://math.berkeley.edu/~slaman/papers/random.pdf

[12] Robert M. Solovay: *Draft of a paper (or series of papers) on Chaitin's work ... done for the most part during the period of Sept.–Dec. 1974.*
Unpublished manuscript, 215 pp.
IBM Thomas J. Watson Research Center: Yorktown Heights, New York, May 1975.

[13] Ingrid Voigt: *Der algorithmische Zufallsbegriff.*
Ausarbeitung des ersten Vortrages im Seminar 01929, FernUniversität Hagen, Sommersemester 2001.
Unveröffentlichtes Manuskript, 12 Seiten.