KONDITIONAL-VERBÄNDE

FRANK ROSEMEIER

ZUSAMMENFASSUNG. Eine Modifikation des bekannten Axiomen-Systems für Hilbert-Algebren wird vorgeschlagen. Erste Untersuchungen der sich dabei ergebenden Klasse der *Konditional-Algebren* werden durchgeführt.

1. EINLEITUNG

In den folgenden Zeilen möchte ich die Aufmerksamkeit auf eine Klasse von logischen Algebren richten, die meines Wissens noch nicht untersucht wurde. Unter einer *logischen Algebra* verstehe ich dabei eine Algebra (im Sinne der universellen Algebra), deren Verknüpfungen gewisse Eigenschaften von logischen Operationen (wie Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Negation etc.) besitzen.

Die klassische Definition von *Hilbert-Algebren* (einer bekannten Klasse von logischen Algebren mit einer implikativen Verknüpfung) wird in Abschnitt 2 wiederholt und elementare Eigenschaften von Hilbert-Algebren werden in Erinnerung gerufen. Anschließend wird in Abschnitt 3 eine Definition für *Konditional-Algebren* vorgeschlagen. Diese Algebren haben ebenfalls eine implikationsartige Verknüpfung, die jedoch schwächere Eigenschaften besitzt als die einer Hilbert-Algebra. Sie sollen, wie der Name andeutet, das Verhalten von Konditional-Verknüpfungen (vgl. [1]) repräsentieren. Erste Eigenschaften von Konditional-Algebren werden bewiesen und die Klasse aller Hilbert-Algebren als Teilklasse der Klasse aller Konditional-Algebren charakterisiert. Schließlich folgen in Abschnitt 4 mögliche Definitionen von *Konditional-Halbverbänden* und von *Konditional-Verbänden*, deren weitere Untersuchung noch aussteht.

2. HILBERT-ALGEBREN

Hilbert-Algebren besitzen neben einer zweistelligen inneren Verknüpfung, die Eigenschaften der logischen Implikation hat, eine weitere nullstellige Verknüpfung (d.h. ein kanonisches Element), das dem Wahrheitswert "wahr" entspricht. Wir übernehmen die Bezeichnungen von [3].

2.1. Definition (vgl. [3], p. 4)**.**
Ist A eine Menge, $1 \in A$ und $\Rightarrow$ eine zweistellige Verknüpfung auf A, so nennt man $(A, 1, \Rightarrow)$ eine *Hilbert-Algebra*, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(h_1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) = 1$;
(h_2) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) = 1$;
(h_3) aus $p \Rightarrow q = q \Rightarrow p = 1$ folgt $p = q$.

2.2. *Bemerkung* (vgl. [3], p. 4f).
Für jede Hilbert-Algebra ist die durch $p \Rightarrow q = 1$ definierte Relation $p \leq q$ eine Halbordnungs-Relation auf A mit größtem Element 1. Für alle $p, q, r \in A$ gilt nämlich:

(i) $p \Rightarrow 1 = 1$;
(ii) $p \Rightarrow p = 1$;
(iii) aus $p \Rightarrow q = q \Rightarrow r = 1$ folgt $p \Rightarrow r = 1$.

2.3. Proposition (vgl. [3], p. 5f)**.**
In jeder Hilbert-Algebra gelten folgende Aussagen und Identitäten:

(1) *aus* $p \leq q \Rightarrow r$ *folgt* $q \leq p \Rightarrow r$*;*
(2) *aus* $p \leq q$ *folgt* $r \Rightarrow p \leq r \Rightarrow q$*;*
(3) *aus* $p \leq q$ *folgt* $q \Rightarrow r \leq p \Rightarrow r$*;*
(4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) = q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$*;*
(5) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$*;*
(6) $1 \Rightarrow p = p$*;*
(7) $p \Rightarrow (p \Rightarrow r) = p \Rightarrow r$*.*

3. Konditional-Algebren

3.1. Definition.
Ist A eine Menge, $1 \in A$ und $\rightarrow$ eine zweistellige Verknüpfung auf A, so nennen wir $(A, 1, \rightarrow)$ eine *Konditional-Algebra*, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind.

(k_1) $1 \rightarrow p = p$;
(k_2) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) = 1$;
(k_3) $p \rightarrow (p \rightarrow r) = p \rightarrow r$;
(k_4) aus $p \rightarrow q = q \rightarrow p = 1$ folgt $p = q$.

3.2. *Beispiele.*
(1) Jede Hilbert-Algebra ist nach 2.3 eine Konditional-Algebra.
(2) Durch die folgende Verknüpfungstafel wird eine Verknüpfung $\rightarrow$ auf der Menge $A = \{1, \mathrm{a}, \mathrm{b}, 0\}$ bestimmt, die diese zu einer Konditional-Algebra macht, welche wegen $\mathrm{a} \rightarrow (\mathrm{b} \rightarrow \mathrm{a}) = 0$ keine Hilbert-Algebra ist.

$\rightarrow$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	1	1	0	0
b	1	0	1	0
0	1	1	1	1

3.3. Proposition.
In jeder Konditional-Algebra gelten folgende Identitäten und Aussagen:

(1) $r \rightarrow r = 1$*;*
(2) $p \rightarrow 1 = 1$*;*
(3) *aus* $p \rightarrow (q \rightarrow r) = 1$ *folgt* $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r) = 1$*;*
(4) *aus* $p \rightarrow q = q \rightarrow r = 1$ *folgt* $p \rightarrow r = 1$*;*
(5) *aus* $p \rightarrow (q \rightarrow r) = 1$ *und* $q \rightarrow (p \rightarrow q) = 1$ *folgt* $q \rightarrow (p \rightarrow r) = 1$*;*
(6) *aus* $p \rightarrow q = 1$ *folgt* $(r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q) = 1$.

Beweis:
(1) folgt wegen (k_1) aus (k_2) mit $p = q = 1$.
(2) folgt mit (k_3) aus (1), denn $p \rightarrow 1 = p \rightarrow (p \rightarrow p) = p \rightarrow p = 1$
(3) folgt mit (k_1) aus (k_2).
(4) folgt mit (k_1) und (2) aus (k_2).
(5) folgt aus (3) und (4).
(6) folgt mit (1) aus (k_2) nach zyklischer Variablenvertauschung. □

3.4. *Folgerung.*
Für jede Konditional-Algebra ist die durch $p \rightarrow q = 1$ definierte Relation $p \leq q$ eine Halbordnungs-Relation auf A mit größtem Element 1.

3.5. Satz.
Sei $(A, 1, \rightarrow)$ *eine Konditional-Algebra. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig.*

(a) $p \to (q \to p) = 1$ *gilt für alle* $p, q \in A$*;*
(b) $p \to (q \to r) = q \to (p \to r)$ *gilt für alle* $p, q, r \in A$*;*
(c) $p \to (q \to r) = (p \to q) \to (p \to r)$ *gilt für alle* $p, q, r \in A$*;*
(d) *aus* $p \leq q$ *folgt* $q \to r \leq p \to r$*;*
(e) *aus* $p \leq q \to r$ *folgt* $q \leq p \to r$*.*

Beweis:
Wenn (a) erfüllt ist, gelten (b), (c), (d) und (e) nach Proposition 2.3, denn dann ist $(A, 1, \to)$ eine Hilbert-Algebra.
Um (a) aus (b) oder aus (c) herzuleiten setzt man $r = p$.
Aus (d) mit $q = 1$ ergibt sich (a), und (e) angewandt auf $q \leq p \to p$ führt ebenfalls zu (a). □

4. Zur Definition von Konditional-Verbänden

Unter einem *Konditional-Verband* wird man eine Algebra $(A, 1, \to, \wedge)$ verstehen, für die $(A, 1, \to)$ eine Konditional-Algebra und $q \wedge r$ stets Infimum von q und r bezüglich $\leq$ ist, d.h. es soll $p \to (q \wedge r) = 1$ genau dann gelten, wenn $p \to q = p \to r = 1$ ist. Die axiomatische Beschreibung der Klasse aller Konditional-Halbverbände dürfte Ähnlichkeiten mit derjenigen von Hertz-Algebren aufweisen (vgl. [2]).

Unter einem *Konditional-Verband* wäre dann eine Algebra $(A, 1, \to, \wedge, \vee)$ zu verstehen, für die $(A, 1, \to, \wedge)$ ein Konditional-Halbverband und $p \vee q$ stets Supremum von p und q bezüglich $\leq$ ist, d.h. es soll $(p \vee q) \to r = 1$ genau dann gelten, wenn $p \to r = q \to r = 1$ ist. Die Einbeziehung einer Negationsoperation und die Klärung des Zusammenhangs mit der Quanten-Logik (vgl. [4]) wären Ziele weiterführender Untersuchungen.

Danksagung

In Dankbarkeit für seine vielfältige Unterstützung widme ich diesen Beitrag Prof. Holger P. Petersson zu seinem 60. Geburtstag.

Literatur

[1] Ernest W. Adams: *The Logic of Conditionals.* Synthese Library Vol. 86, Dordrecht: Reidel 1975.
[2] Dumitru Buesnag: Hertz Algebras of Fractions and Maximal Hertz Algebras of Quotients. *Math. Japonica* **39**, No. 3 (1993), 461–469.
[3] Antonio Diego: *Sur les algèbras de Hilbert.* Collection de Logique Math. Série A **XXI** , Paris: Gauthier-Villars 1966.
[4] Peter Mittelstaedt: *Quantum Logic.* Synthese Library Vol. 126, Dordrecht: Reidel 1978.

Frank Rosemeier
Lehrgebiet Algebra/Geometrie
FernUniversität Hagen
D-58084 Hagen
(E-Mail: **Frank.Rosemeier@FernUni-Hagen.de**)