MATHEMATIK FÜR INGENIEURE I/II

Prüfungsklausur am 01. Oktober 2005

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

Aufgabe 1

Schreiben wir $z = x + iy$, so sind alle reellen x und y zu bestimmen, die

$$(x + iy)^2 = -4(x - iy)$$

erfüllen, d.h.

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -4x + 4iy \ .$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil führt zum Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = -4x, \ 2xy = 4y \ .$$

Für $y \neq 0$ heißt das

$$2x = 4 \, , \ x = 2$$

und

$$4 - y^2 = -8 \, , \ y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \ .$$

Für $y = 0$ erhalten wir noch

$$x^2 = -4x \ ,$$

was nur mit $x = 0$ bzw. $x = -4$ zu erfüllen ist. Es gibt also zur Gleichung

$$z^2 = -4\bar{z}$$

die vier Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \, , \ z_2 = -4 \, , \\ z_3 &= 2 + 2\sqrt{3}i \, , \ z_4 = 2 - 2\sqrt{3}i \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(i) Die Schnittmenge besteht aus den Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Gauß-Elimination:

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$
	2	1	1	1
	1	2	1	1
I	$\boxed{1}$	1	2	1
	0	-1	-3	-1
II	0	$\boxed{1}$	-1	0
III	0	0	-4	-1

Das heißt:

$$\begin{aligned} -4x_3 &= -1 \quad , \quad x_3 = \frac{1}{4} \\ x_2 - \frac{1}{4} &= 0 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{4} \\ x_1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} &= 1 \quad , \quad x_3 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Damit besteht die Schnittmenge der drei Ebenen aus dem einzigen Punkt $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

(ii) Jetzt ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$
	-2	1	1	1
	1	-2	1	1
I	$\boxed{1}$	1	-2	1
	0	3	-3	3
II	0	$\boxed{-3}$	3	0
III	0	0	0	3

Wegen $0 \cdot x_3 \neq 3$ ist das Gleichungssystem unlösbar, die Schnittmenge der Ebenen ist leer.

(iii) Den Gauß-Schemata entnimmt man Rang 3 für das Gleichungssystem aus (i), Rang 2 für das aus (ii).

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt sich

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \\ &= 1 - a^2 - 1 + a + a - 1 = -a^2 + 2a - 1 \\ &= -(a-1)^2 \end{aligned}$$

und wir haben

$$\det A \neq 0 \iff a \neq 1 \; .$$

A ist also genau für $a \neq 1$ invertierbar, und für $a = 1$ hat A den Rang 1 (denn dann hat A dreimal die gleiche Zeile).

Sei nun $a \neq 1$. Dann ist

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \; , \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + a \; ,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1 \; , \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 + a \; ,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; , \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a + 1 \; ,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1 \; , \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a + 1 \; ,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und wir erhalten nach Korollar 5.8.4

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -1 + a & a - 1 \\ -1 + a & 0 & -a + 1 \\ a - 1 & -a + 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a + 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; . \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(i) Die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+5}}$$

ist konvergent, denn $1/\sqrt{3n+5}$ ist eine monoton fallende Nullfolge ($\sqrt{3n+5}$ steigt monoton gegen ∞).

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{4^n} x^n$$

Den Konvergenzradius r erhalten wir etwa über das Quotientenkriterium:

$$\frac{n^4}{4^n} \cdot \frac{4^{n+1}}{(n+1)^4} \;=\; 4 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \longrightarrow 4\,,\; n \to \infty\;,$$

also ist

$$r \;=\; 4$$

(die Potenzreihe konvergiert für x mit $|x| < 4$, sie divergiert für x mit $|x| > 4$).

Für $x = -4$ liegt Divergenz vor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{4^n} (-4)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^4$$

divergiert, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Aus den gleichen Gründen divergiert die Reihe für $x = 4$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{4^n} 4^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} n^4\;.$$

Wegen $r = 4$ konvergiert die Potenzreihe für $x = 1$, sie divergiert für $x = 10$.

Aufgabe 5

Die Funktion

$$f(x) \;=\; xe^{-x^2}$$

sollte nach dem angegebenen Programm diskutiert werden.

i) Nach Ketten– und Produktregel für stetige Funktionen ist f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig.

ii) Ränder von $D(f)$ sind ∞ und $-\infty$. Nach MIng I, 8.3.8(4) gilt

$$\lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0 ,$$

also auch

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x^2} = 0 .$$

Für $x > 1$ gilt aber $0 < xe^{-x^2} < x^2e^{-x^2}$, also folgt

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0$$

und wegen $f(-x) = -f(x)$ genauso

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$$

(andere Möglichkeit: L'Hospitalsche Regel).

Es folgt sofort, daß f keine senkrechten Asymptoten besitzt, daß aber die Gerade $y = 0$ Asymptote für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ ist.

iii) Es gilt $e^{-x^2} > 0$ für $x \in \mathbb{R}$,die einzige Nullstelle von f ist also $x = 0$.

iv) Wir berechnen

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2} .$$

Das Vorzeichen von f' wird allein von der Parabel $1 - 2x^2$ bestimmt, die bei ihren beiden Nullstellen

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

tatsächlich das Vorzeichen wechselt; f hat also genau bei $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ lokale Extrema, und zwar ein Minimum bei $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und ein Maximum bei $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (wegen $f'(x) > 0$ für $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $f'(x) < 0$ für $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$) .

v) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-4x)e^{-x^2} + (1 - 2x^2)(-2x)e^{-x^2} \\ &= (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2} . \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei iv) überlegt man sich, daß in den Nullstellen

$$x = 0 \quad , \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

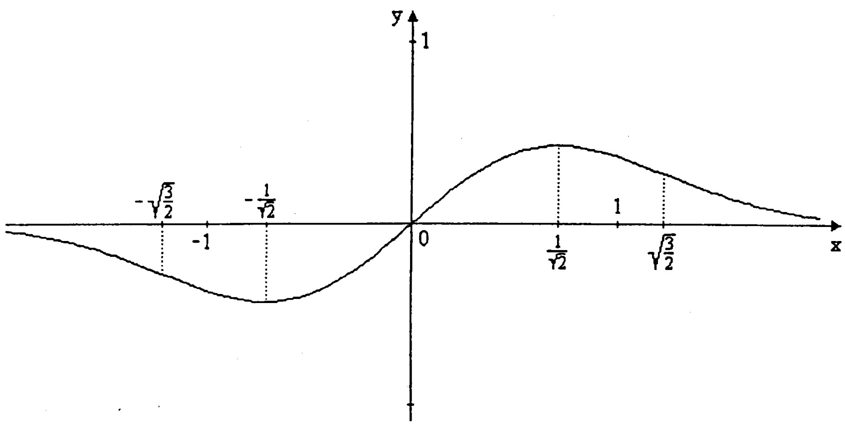
von f'' tatsächlich Vorzeichenwechsel von f'' , also Wendepunkte von f vorliegen.Es ist

$$\begin{array}{ll} f(x) \text{ konkav:} & -\infty < x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f(x) \text{ konvex:} & -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 0 \\ f(x) \text{ konkav:} & 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f(x) \text{ konvex:} & \frac{\sqrt{3}}{2} < x < \infty \end{array}$$

vi) Für die Skizze berechnet man noch die Funktionswerte in den lokalen Extrema bzw. Wendepunkten:

$$\begin{aligned} f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}} = \pm 0,42888\ldots \\ f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2e^3}} = \pm 0,27327\ldots \end{aligned}$$

(für die Skizze ist ein grober Überschlag der Werte ausreichend) und erhält den folgenden Kurvenverlauf:



Aufgabe 6

(i)
$$y' = 1 + \sin x - \cos x - \sin x \cos x$$

ist sofort zu integrieren:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \int (1 + \sin x - \cos x - \sin x \cos x)\, dx \\
&= x - \cos x - \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x + c\ ,
\end{aligned}
$$

c eine Konstante, und die Anfangsbedingung führt zu

$$
\begin{aligned}
1 &= y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 0 - 1 + 0 + c\,,\ \ c = 2 - \frac{\pi}{2}\,, \\
y(x) &= x - \cos x - \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x + 2 - \frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
y' = (1 - \cos x)(1 + \sin x) y
$$

wird jetzt durch den rechts hinzugekommenen Faktor y zu einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Lösungen erhalten wir aus

$$
\int \frac{dy}{y} = \int (1 - \cos x)(1 + \sin x)\, dx
$$

(wegen der Anfangsbedingung $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ suchen wir eine Lösung, die in einer Umgebung um $\frac{\pi}{2}$ positiv ist), also mit Hilfe von (i)

$$
\ln y = x - \cos x - \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x + c
$$

bzw.

$$
y = \tilde{c} \cdot e^{x - \cos x - \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x}
$$

($c, \tilde{c}$ Konstanten). Weiter ergibt die Anfangsbedingung

$$
1 = y(\frac{\pi}{2}) = \tilde{c} e^{\frac{\pi}{2} - 1}\,,\ \ \tilde{c} = e^{1 - \frac{\pi}{2}}\ ,
$$

also die Lösung

$$
y = e^{1 - \frac{\pi}{2}} \frac{e^x e^{\frac{1}{2} \cos^2 x}}{e^{\cos x + \sin x}}\ .
$$

Aufgabe 7

$$
A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}
$$

Die Eigenwerte erhalten wir als Lösung der Gleichung

$$\det(\lambda E_3 - A) \;=\; 0\;,$$

also

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda-8 & 2 \\ -4 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-8 & 2 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & \lambda-5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & \lambda-8 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (\lambda-5)((\lambda-8)(\lambda-5)-4) \;+\; 2(-2(\lambda-5)+8) \;-\; 4(-4+4(\lambda-8)) \\ &= \lambda^3 - 18\lambda^2 + 81\lambda \;=\; \lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 81) \\ &= \lambda(\lambda-9)^2 \;=\; 0\;. \end{aligned}$$

Wir haben demnach den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ und den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$ zu A.

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$:

$$A\mathbf{x} \;=\; \lambda_1\mathbf{x} \;=\; 0$$

ist zu lösen, also

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Gauß–Elimination führt sofort zu den Lösungen

$$x_3 = -x_1,\; x_2 = -\frac{1}{2}x_1,\; x_1 \text{ beliebig}\;,$$

so daß wir zu 0 die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \;=\; x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}\;,\quad x_1 \neq 0$$

erhalten.

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$:

$$(\,9E_3 - A\,)\,\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x} \;=\; 0\;,$$

also

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ist zu lösen. Diese Gleichungen sind alle äquivalent zueinander sowie zu

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 \;=\; 0 \;,$$

der Eigenraum zum Eigenwert 9 stellt also eine Ebene dar, die wir z.B. mit

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;,\; x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

beschreiben können oder mit Hilfe einer Basis durch

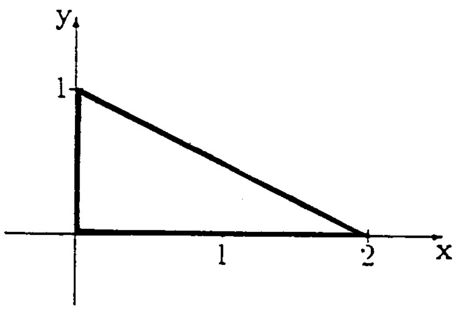
$$x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;+\; x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \;.$$

Aufgabe 8

Gesucht waren absolutes Maximum und Minimum von

$$f(x,y) \;=\; x(x-y) \;=\; x^2 - xy$$

auf dem abgeschlossenen Dreieck



Für Extrema im Inneren des Dreiecks ist das Verschwinden von $\operatorname{grad} f$ notwendig:

$$\operatorname{grad} f(x,y) \;=\; (2x - y,\, -x)$$

ist dort jedoch wegen $0 < x < 2$ immer ungleich null, also kann es im Inneren keine lokalen Extrema geben, erst recht keine absoluten. Diese müssen auf dem Rand angenommen werden.

Wir untersuchen die einzelnen Randstrecken getrennt:

$$R_1\colon \{(x,y) | x = 0,\ 0 < y < 1\}$$
$$R_2\colon \{(x,y) | 0 < x < 2,\ y = 0\}$$
$$R_3\colon \{(x,y) | 0 < x < 2,\ y = -\frac{1}{2}x + 1\}$$

<u>Randstück R_1 (Senkrechte links):</u>

Hier ist $f(x,y) = 0$.

<u>Randstück R_2 (Waagerechte unten):</u>

Hier ist wegen $y = 0$

$$f(x,y) = x^2 \ , \ 0 < x < 2 \ ,$$

und x^2 steigt streng monoton an, hat also weder Minimum noch Maximum.

<u>Randstück R_3 (Schräge):</u>

$$\begin{aligned} g(x) \colon &= f(x, -\frac{x}{2}+1) = x(x-(-\frac{1}{2}x+1)) = \frac{3}{2}x^2 - x, \ 0 < x < 2 \\ & g'(x) = 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ & g''(x) = 3 > 0 \end{aligned}$$

Im Inneren von R_3 hat $g(x)$ also ein lokales Minimum in 1/3 mit $g(1/3) = -1/6$.

<u>Eckpunkte:</u>

$$f(0,0) = 0 \, , \quad f(0,1) = 0 \, , \quad f(2,0) = 4$$

<u>Insgesamt:</u> Auf dem abgeschlosenen Dreieck beträgt für $x(x-y)$

$$\begin{array}{rl} \text{das absolute Minimum} & -\dfrac{1}{6} \, , \\ \text{das absolute Maximum} & 4 \ . \end{array}$$

Das absolute Minimum $-1/6$ wird nur im Punkt $(\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ angenommen, das absolute Maximum im Punkt $(2,0)$.