MATHEMATIK FÜR INGENIEURE III/IV

Prüfungsklausur am 25. Februar 2006

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

Aufgabe 1

(i) Die erste Kurve ist der Kreis um $(0,1)$ mit Radius 4, die zweite die Gerade

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 5 \; .$$

Die Schnittpunkte ergeben sich aus

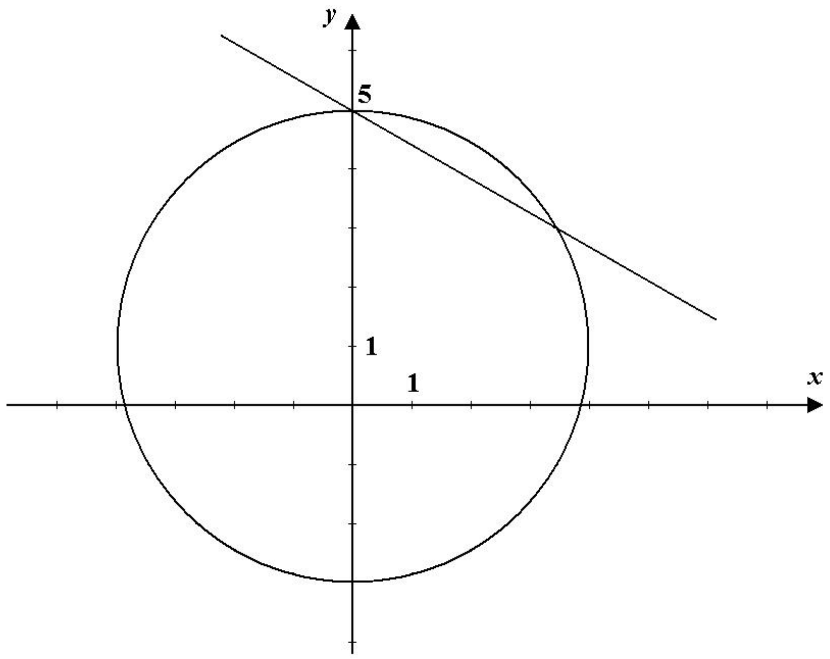
$$x^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x + 4\right)^2 = 16 \; ,$$

d.h.

$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{\sqrt{3}}x = 0 \; ,$$

$$x = 0 \; , \; x = 2\sqrt{3}$$

mit $(0,5)$ und $(2\sqrt{3},3)$. Skizze:



(ii) Eine Parameterdarstellung für das Geradenstück lautet

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}t + 5 \end{pmatrix} \; , \; 0 \leq t \leq 2\sqrt{3} \; ,$$

seine Länge ist der Abstand d der Punkte $(0,5)$ und $(2\sqrt{3},3)$:

$$d = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4\ .$$

Für das Kreisstück ist

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{16-t^2}+1 \end{pmatrix}\ ,\ 0 \le t \le 2\sqrt{3}$$

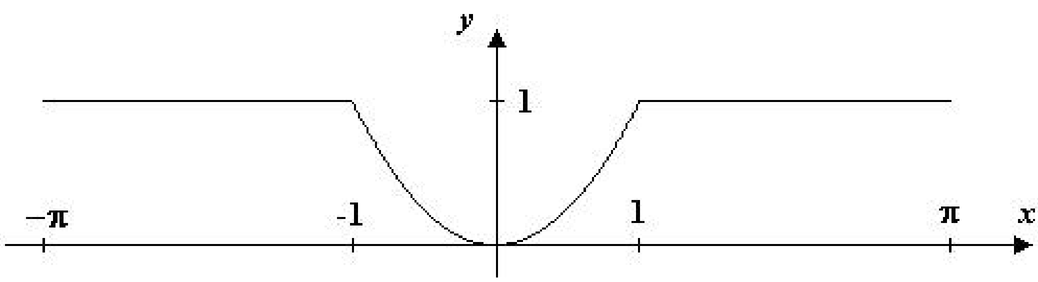
eine Parameterdarstellung, und mit ihr erhalten wir als Länge l

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\sqrt{3}} ||\dot{\mathbf{x}}(t)||dt = \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{1+\left(\frac{-t}{\sqrt{16-t^2}}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{t}{4})^2}} dt = 4\arcsin\frac{t}{4}\Big|_0^{2\sqrt{3}} = 4\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\pi\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(i)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x \le -1 \\ x^2, & -1 \le x \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le \pi \end{cases}$$



(ii) Die Funktion $f(x)$ ist gerade, wir erhalten also als Fourierreihe eine reine Cosinusreihe, d.h.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\ ,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\ .$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^1 x^2 dx + \int\limits_1^\pi 1\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}+\pi-1\right) \\ &= 2-\frac{4}{3\pi}\ , \end{aligned}$$

sodann

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^1 x^2\cos nx\,dx + \int\limits_1^\pi \cos nx\,dx\right)$$

mit

$$\begin{aligned} \int x^2\cos nx\,dx &= x^2\left(\frac{1}{n}\sin nx\right) - \int 2x\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)dx \\ &= \frac{1}{n}x^2\sin nx - \frac{2}{n}\left(x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right) - \int\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx\right) \\ &= \frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx + \text{const}\ , \end{aligned}$$

also

$$\int\limits_0^1 x^2\cos nx\,dx = \frac{\sin n}{n} + 2\frac{\cos n}{n^2} - 2\frac{\sin n}{n^3}\ ,$$

$$\int\limits_1^\pi \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx\,\Big|_1^\pi = -\frac{\sin n}{n}\ ,$$

schließlich

$$a_n = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos n}{n^2} - \frac{\sin n}{n^3}\right)\ .$$

(iii) Nach (ii) haben wir

$$f(x) \sim 1 - \frac{2}{3\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\cos n}{n^2} - \frac{\sin n}{n^3}\right)\cos nx\ .$$

Nach Satz 2.3.12 und Bemerkung 2.3.13 konvergiert diese Fourierreihe für jedes x gegen $f(x)$. Insbesondere ist für $x = 0$

$$0 = f(0) = 1 - \frac{2}{3\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\cos n}{n^2} - \frac{\sin n}{n^3}\right)\ ,$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n - \sin n}{n^3} = \frac{1}{6} - \frac{\pi}{4} \ .$$

Aufgabe 3

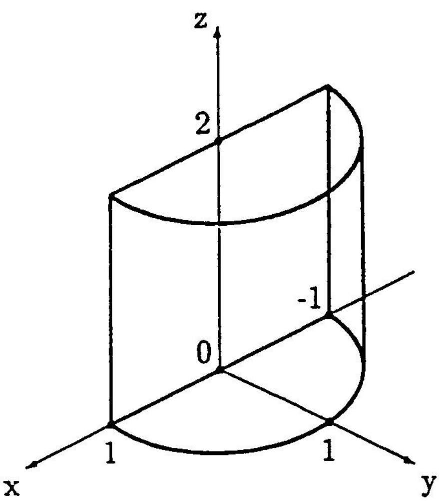
Zu berechnen war der Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy(z-2) \\ x(z^2+1) \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des durch

$$-1 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \ , \ 0 \leq z \leq 2$$

definierten Halbzylinders H (s. Skizze).



Mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\begin{aligned}
F = \int\limits_{\partial H} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{o}(\mathbf{x}) &= \int\limits_{H} \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\sigma(\mathbf{x}) \\
&= \int\limits_{H} (2x + x(z-2) + 2xz)\, d\sigma(\mathbf{x}) \\
&= \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 3xz\, dy\, dx\, dz \\
&= \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{-1}^{1} 3xz\sqrt{1-x^2}\, dx\, dz \\
&= \int\limits_{0}^{2} 3z \left(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right) \Bigg|_{-1}^{1} dz \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4 + 4z^2} = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)} = \frac{e^z}{z^2(z+2i)(z-2i)}$$

Also hat $f(z)$ die Polstelle 0 zweiter Ordnung und die beiden einfachen Pole $2i$ und $-2i$. Alle drei Pole werden von K_3 eingeschlossen, wir haben somit

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_3} \frac{e^z}{z^4 + 4z^2}\, dz = \operatorname{Res} f|_0 + \operatorname{Res} f|_{2i} + \operatorname{Res} f|_{-2i}\,.$$

Für den doppelten Pol 0 :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} f|_0 &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{e^z}{z^2(z^2+4)} z^2 \right)' = \lim_{z\to 0} \frac{e^z(z^2+4) - e^z \cdot 2z}{(z^2+4)^2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Für die einfachen Pole $\pm 2i$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} f|_{2i} &= \lim_{z\to 2i} \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}(z-2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{e^z}{z^2(z+2i)} = \frac{e^{2i}}{-4 \cdot 4i} \\
&= \frac{1}{16}(-\sin 2 + i\cos 2)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f|_{-2i} &= \lim_{z\to -2i} \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}(z+2i) = \lim_{z\to -2i} \frac{e^z}{z^2(z-2i)} = \frac{e^{-2i}}{-4\cdot(-4i)} \\ &= \frac{1}{16}(-\sin 2 - i\cos 2)\end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{K_3} \frac{e^z}{z^4+4z^2}\,dz &= 2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}(-\sin 2 + i\cos 2) + \frac{1}{16}(-\sin 2 - i\cos 2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\right)\pi i\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Es ist

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 3y_2 - 2e^{2x} \\ y_1(0) &= 2\ ,\ y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}\ ,\ \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Dafür bestimmen wir zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, d.h. die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-4)(\lambda-1) = 0$$

ergibt $\lambda_1 = 4\ ,\ \lambda_2 = 1$ als Eigenwerte.

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 2 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2u_1 \ &+2u_2 &= 0 \\ u_1 \ &+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

hat $u_2 = -u_1$ als Lösungen und somit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zum Eigenwert 4. Entsprechend liefert

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

die Lösungen $u_1 = 2u_2$, also etwa

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet dementsprechend

$$\mathbf{y}_h(x) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4x} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} \ .$$

Nun zu einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung! Da 2 kein Eigenwert ist, machen wir den Ansatz

$$\mathbf{y}_p(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{2x} \ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{pmatrix} 2c_1 \\ 2c_2 \end{pmatrix} e^{2x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x} \ ,$$

also

$$\begin{aligned} 2c_1 &= 2c_1 - 2c_2 \\ 2c_2 &= -c_1 + 3c_2 - 2 \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_2 = 0$, $c_1 = -2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4x} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} \ .$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{array}{rll} \alpha_1 & +2\alpha_2 & = 4 \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & = 0 \ , \end{array}$$

d.h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{4}{3}$. Das Anfangswertproblem wird folglich gelöst von

$$\mathbf{y}(x) = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4x} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}$$

oder komponentenweise

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{4}{3}(e^{4x} + 2e^x) - 2e^{2x} \\ y_2(x) &= \frac{4}{3}(-e^{4x} + e^x) \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$y'' + \left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right) y' - \frac{8}{3}y = 0 \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1$$

ist mit Potenzreihenansatz zu lösen:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ , \ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \frac{4}{3}x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \ .$$

Wir schreiben die Summen um, so dass wir die Koeffizienten gleicher Potenzen x^n zusammenfassen können:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \frac{4}{3}n a_n + \frac{2}{3}(n+1)a_{n+1} - \frac{8}{3}a_n\right] x^n + \\ &\quad + 2a_2 + \frac{2}{3}a_1 - \frac{8}{3}a_0 \end{aligned}$$

Jetzt ist ein Koeffizientenvergleich möglich. Zunächst ist

$$2a_2 + \frac{2}{3}a_1 - \frac{8}{3}a_0 = 0 \ ,$$

wobei wegen $y(0) = 1 = y'(0)$

$$a_0 = a_1 = 1$$

ist und damit auch

$$a_2 = 1 \ .$$

Weiter haben wir für $n \geq 1$

$$a_{n+2} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{4}{3}n}{(n+2)(n+1)} a_n - \frac{\frac{2}{3}}{n+2} a_{n+1}$$

und somit

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\frac{4}{3}}{3 \cdot 2} a_1 - \frac{\frac{2}{3}}{3} a_2 = 0 \ , \\ a_4 &= 0 \cdot a_2 - \frac{2}{12} \cdot 0 = 0 \ , \end{aligned}$$

also auch

$$a_n = 0 \ , \ n \geq 3 \ .$$

Die lösende Potenzreihe ist folglich das Polynom

$$y = 1 + x + x^2 \ .$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ t > 0 \\ &u(x,0) = \sin x \ , \ u_t(x,0) = \cos x \end{aligned}$$

Nach Satz 4.2.6 lautet die Lösung ($c = 2, f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$)

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \frac{1}{2}(\sin(x-2t) + \sin(x+2t)) + \frac{1}{4} \int\limits_{x-2t}^{x+2t} \cos \xi \, d\xi \\ &= \frac{1}{2}\sin(x-2t) + \frac{1}{2}\sin(x+2t) + \frac{1}{4}\sin(x+2t) - \frac{1}{4}\sin(x-2t) \\ &= \frac{1}{4}\sin(x-2t) + \frac{3}{4}\sin(x+2t) \\ &= \sin x \cos 2t + \frac{1}{2}\cos x \sin 2t \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 8

(i) In Polarkoordinaten ist die Potentialgleichung

$$\triangle u = 0$$

im Einheitskreis ($r < 1$) zu lösen mit der Randbedingung

$$\begin{aligned} u(1,\varphi) &= 2\cos^2\varphi - \cos\varphi - 1 \\ &= 1 + \cos 2\varphi - \cos\varphi - 1 = \cos 2\varphi - \cos\varphi \,. \end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 6.1.11 finden wir die benötigten Elementarlösungen mit

$$u_n(r,\varphi) = (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) r^n \;,\; n = 0, 1, 2, \dots \;,$$

so dass wir für die Lösung

$$u(r,\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) r^n$$

ansetzen können. Die Randbedingung

$$\cos 2\varphi - \cos\varphi = u(1,\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

ist mit

$$C_0 = 0 \;,\; C_1 = -1 \;,\; C_2 = 1 \;,\; C_n = 0 \quad \text{sonst,} \quad D_n = 0$$

zu erfüllen, also ist

$$u(r,\varphi) = -r\cos\varphi + r^2 \cos 2\varphi \,.$$

(ii) Um die Lösung u kartesisch darzustellen, formen wir $\cos 2\varphi$ wieder um:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= r^2 \cos 2\varphi - r\cos\varphi = r^2(2\cos^2\varphi - 1) - r\cos\varphi \\ &= 2r^2\cos^2\varphi - r^2 - r\cos\varphi \,, \end{aligned}$$

also – mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ –

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 2x^2 - (x^2 + y^2) - x \\ &= x^2 - y^2 - x \,. \end{aligned}$$

Wie im zweiten Hinweis erwähnt, kann man auch umgekehrt vorgehen: Die Randbedingung

$$u(1,\varphi) = 2\cos^2\varphi - \cos\varphi - 1$$

lässt sich in kartesischen Koordinaten schreiben als

$$u(x,y) = 2x^2 - x - 1 \ , \ x^2 + y^2 = 1 \ ,$$

also

$$u(x,y) = 2x^2 - x - (x^2 + y^2) = x^2 - x - y^2 \ , \ x^2 + y^2 = 1 \ .$$

Die Funktion $x^2 - y^2 - x$ ist aber harmonisch (nachprüfen!) und somit Lösung zu

$$\triangle u = 0 \ , \ x^2 + y^2 \leq 1 \ .$$

Dieses u ist dann nur noch für (i) in Polarkoordinaten auszudrücken.