FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität in Hagen 58084 Hagen

Name

Straße

PLZ, Ort

Bestimmungsland (nur bei Anschriften außerhalb Deutschlands)

FERNUNIVERSITÄT
FACHBEREICH MATHEMATIK

DR. D. KEIM

Prüfungsklausur

MATHEMATIK f. INGENIEURE III/IV

am 30. September 2006, 10–13 Uhr

P

HINWEISE ZUR BEARBEITUNG:

1. Füllen Sie bitte dieses Deckblatt aus.
2. Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen leserlich auf. Fangen Sie bei jeder Aufgabe, die Sie bearbeiten, ein neues Blatt an; schreiben Sie darauf Ihren Namen und die jeweilige Aufgabennummer. Sortieren Sie Ihre Lösungen vor der Abgabe nach diesen Nummern.
3. Formulieren Sie bitte Erläuterungen zu Ihren Rechnungen. Denken Sie daran, daß zu jeder Aufgabe und Frage eine Antwort gehört. Zwar richtige, aber nicht ausreichend begründete oder nicht bis zu Ende durchgeführte Berechnungen können bis zu völligem Punktverlust führen.
4. Als Hilfsmittel sind die Studienbriefe zu den Kursen MATHEMATIK FÜR INGENIEURE zugelassen. Nicht erlaubt ist eine Verwendung sämtlicher Einsendeaufgaben, ebenso sind weitere Bücher und Texte nicht gestattet, also auch keine Formelsammlungen oder eigene Aufzeichnungen. Nicht programmierbare Taschenrechner sind zugelassen (aber nicht erforderlich).
5. Sie können natürlich Aufgaben und Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeiten, machen Sie also nicht den Fehler, sich bei einer Aufgabe festzurechnen.
6. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben. Sie können insgesamt 46 Punkte erreichen. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie bei den ersten 4 Aufgaben wenigstens 7 Punkte erreichen, bei den zweiten 4 wenigstens 7 Punkte und insgesamt wenigstens 18 Punkte.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

AUFGABE	1	2	3	4		5	6	7	8	
erreichbare Punkte	4	6	6	6		6	8	5	5	
bearbeitet										
erreichte Punkte										
				Summe					Summe	

Datum: ....

Note: .... Prüfer: ....

Aufgabe 1

Berechnen Sie für die Fläche

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ , \ \mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ uv \end{pmatrix}$$

den Normalenvektor und die Tangentialebene im Punkt $(0,2,1)$. Zeigen Sie zunächst auch, dass $(0,2,1)$ tatsächlich auf der Fläche liegt.

4 Punkte

Aufgabe 2

(i) Setzen Sie

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

gerade auf $[-\pi, 0]$ fort und skizzieren Sie die so erhaltene Funktion.

(ii) Berechnen Sie die Koeffizienten der Fourierreihe zur fortgesetzten Funktion aus (i) (in einer möglichst übersichtlichen Form).

(iii) Untersuchen Sie die Konvergenz dieser Fourierreihe.

6 Punkte (1+4+1)

Aufgabe 3

Berechnen Sie für das von den Punkten $(0,0),(5,0)$ und $(0,2)$ aufgespannte Dreieck $\triangle$ und seinen positiv orientierten Rand $\partial\triangle$ das Kurvenintegral

$$I = \int_{\partial\triangle} y^3\,dx - x\,dy\ ,$$

indem Sie

(i) das Integral I unmittelbar aus der Definition bestimmen,

(ii) das Integral I mit Hilfe des Greenschen Satzes in ein Gebietsintegral umwandeln und dieses berechnen.

6 Punkte (3+3)

Aufgabe 4

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = 2x(t) - 4y(t)$$
$$\dot{y}(t) = x(t) - 3y(t)$$

$$x(0) = 3\ ,\ y(0) = -1$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

6 Punkte

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t$$

mit Hilfe der Eigenwertmethode.

(**Hinweis:** Die Inhomogenität „ist ein Cosinus“, versuchen Sie deshalb für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz $\binom{a}{b} \sin t + \binom{c}{d} \cos t$.)

6 Punkte

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle Eigenwerte mit ihren Eigenfunktionen zum Randwertproblem

$$y'' - 2y' + (2\lambda - 1)y = 0 \ , \ y(0) = 0 \ , \ y(\pi) = 0 \ .$$

8 Punkte

Aufgabe 7

Lösen Sie die Wellengleichung

$$u_{tt} - 2u_{xx} = 0$$

für $0 < x < \pi$, $0 < t$ mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0 \ , \ u(\pi,t) = 1 \\ &u(x,0) = x \ , \ u_t(x,0) = 0 \ . \end{aligned}$$

(Verträglichkeit der Anfangs- und Randbedingungen braucht dabei **nicht** untersucht zu werden.)

5 Punkte

Aufgabe 8

Minimieren Sie das Funktional

$$\Phi(y) = \int_0^1 (2y' - x - 1)^2 \, dx$$

unter den Randbedingungen

$$y(0) = 1 \ , \ y(1) = \frac{7}{4} \ ,$$

d.h. zeigen Sie von Ihrer Lösung der Euler-Gleichung, dass Φ in ihr tatsächlich minimal wird.

5 Punkte