Zur Streutheorie für die Klein-Gordon-Gleichung

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines Dr. rer. nat.

des Fachbereichs Mathematik und Informatik

der Fernuniversität - Gesamthochschule - Hagen

vorgelegt von

ANDREAS WIEGNER

aus Dortmund

Hagen 1989

Berichterstatter: Prof. Dr. K. Veselić
Prof. Dr. J. Weidmann
Prof. Dr. B. Najman

Tag der mündlichen Prüfung: 23.11.1989

INHALTSVERZEICHNIS

§ 0	EINLEITUNG	I
§ 1	BEZEICHNUNGEN UND GRUNDLAGEN	1
§ 2	EIN EXISTENZ- UND VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ FÜR WELLENOPERATOREN	8
§ 3	DIE KLEIN-GORDON-GLEICHUNG IN EINER SKALA VON RÄUMEN	16
§ 4	STREUTHEORIE FÜR DIE KLEIN-GORDON-GLEICHUNG	27
§ 5	BEISPIELE	58
§ 6	ZUR J-SELBSTADJUNGIERTHEIT DER KLEIN-GORDON-OPERATOREN	73
	ANHANG	80
	LITERATURHINWEISE	83

§ 0 Einleitung

Die einfachste Form der Klein-Gordon-Gleichung beschreibt in der relativistischen Quantenmechanik das Verhalten eines spinlosen Teilchens (z.B. eines π-Mesons) der Masse $m > 0$ in einem äußeren elektrostatischen Potential *). Sie ist formal gegeben durch

$$(0.1) \qquad (i\frac{\partial}{\partial t} - V)^2\varphi = ((i\nabla)^2 + m^2)\varphi \quad ,$$

d.h.

$$(0.2) \qquad -\varphi_{tt} - 2iV\varphi_t = h^2\varphi$$

mit $h^2 := \varepsilon^2 - V^2$, wobei $\varepsilon^2 := -\Delta + m^2$; dabei ist V das elektrostatische Potential und $\Delta = \nabla^2$ der Laplaceoperator

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad .$$

(0.2) kann linearisiert werden durch

$$(0.3) \qquad i\Phi_t = L\Phi \quad , \quad \Phi := \begin{pmatrix} \varphi \\ i\varphi_t \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h^2 & 2V \end{pmatrix} \quad ;$$

entsprechend ist die „freie" Gleichung

$$(0.4) \qquad -\varphi_{tt} = \varepsilon^2\varphi$$

äquivalent mit

---

*) In § 5 behandeln wir auch äußere elektromagnetische Felder.

$$(0.5) \qquad i\Phi_t = L_o\Phi \quad , \quad L_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Es gibt eine Reihe von Arbeiten, die sich mit verschiedenen Ansätzen der Streutheorie für die Gleichungen (0.3) und (0.5) befassen (wobei erklärlicherweise sowohl die Techniken als auch die Ergebnisse stets hinter dem jeweiligen Erkenntnisstand bei der Schrödingergleichung zurückblieben).

Lundberg [L] betrachtete die Lippmann-Schwinger-Gleichung und erreichte eine Entwicklung nach Eigenfunktionen sowie Vollständigkeit der Wellenoperatoren für $n = 3$, $V \in L_4$ lokal Hölderstetig bis auf endlich viele Singularitäten sowie $V = O(|x|^{-3-\delta})$, $|x| \to \infty$, $\delta > 0$. Mit ähnlichen Techniken und Ergebnissen arbeitete Eckardt [E2]; seine Voraussetzungen waren (unter anderem) Existenz der Wellenoperatoren, $n \geq 3$, Stummelbedingungen für V und V^2 (also insbesondere $V \in L_{4,loc}$) sowie

$$M(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |p(y)|\,|x-y|^{(1-n)/2} dy \leq M < \infty \ , \ M(x) \to 0 \ , \ |x| \to \infty \ ,$$

für $p = V , V^2$.

Die folgenden Arbeiten schlossen magnetische Potentiale in die Untersuchungen ein: Kako [Kk] betrachtete $n = 3$, alle Potentiale sowie die Ableitungen des magnetischen Potentials sind beschränkt und verhalten sich wie $O(|x|^{-2-\delta})$, $\delta > 0$, $|x| \to \infty$.

Schechter [Sch] verwandte eine eigene, allgemeine Technik; er setzte im wesentlichen

$$(1+|x|)^{\alpha} \int_{|x-y|<1} (|V(y)|+|V^2(y)|)\,dy \in L_p \ , \ 1 \leq p \leq \infty \ , \ \alpha \geq 0 \ , \ \alpha > 1 - \frac{2n}{(n+1)p}$$

voraus (sowie die analoge Aussage für das Magnetfeld). Weder [Wr] benutzte Techniken für Pseudo-Differentialoperatoren sowie die von Schechter; als Voraussetzungen hatte er ähnliche wie die aus [Sch] sowie sehr viele verschiedene Bedingungen vom Stummel-Typ.

Najman [N2] schließlich verwandte unter stärkeren Voraussetzungen die Belopol´skii-Birmansche Theorie der Lokal-Spurklassenpotentiale und betrachtete dabei eine ganze (erstmals wohl von J.M. Chadam untersuchte) Skala von Räumen (im Gegensatz zu den anderen Arbeiten, die sich auf die Energienorm - einen der Endpunkte der Skala - beschränkten). Weitere, frühere Arbeiten sind in den aufgeführten zitiert.

Nach 1980 aber scheint sich auf diesem Gebiet nicht mehr viel getan zu haben, obwohl etwa ab diesem Zeitpunkt mit der Enssschen Streutheorie eine neue, starke Technik zur Verfügung stand, die allerdings (wieder) zunächst nur bemerkenswerte Fortschritte bei der Streutheorie für die Schrödingergleichung nach sich zog, obwohl relativ schnell auch abstrakte Formulierungen entstanden.
Die Enssche Streutheorie ist ein zeitabhängiger Ansatz der Streutheorie, der mehr als andere Techniken auf physikalischen und geometrischen Grundgedanken beruht. Ausgangspunkt ist die Charakterisierung von Streuzuständen (d.h. von Zuständen, die orthogonal auf allen gebundenen Zuständen stehen) durch Aussagen vom RAGE-Typ (Ruelle, Amrein, Georgescu, Enss): Ein Streuzustand befindet sich „fast immer" „fast ganz" außerhalb jedes festen, beschränkten Raumgebietes - genauer siehe z.B. [P, Th.2.1] - und damit spielt bei geeignet abfallenden Potentialen die Störung zu genügend großen (positiven oder negativen) Zeiten keine wesentliche Rolle mehr, so daß sich das gestörte Teilchen asymptotisch wie ein freies verhält.

Einen Überblick über die schon früh entstandenen zahlreichen Varianten und Verallgemeinerungen der Enssschen Streutheorie gibt z.B. [P] .

Inhalt dieser Arbeit ist nun die meines Wissens erstmalige Anwendung der Enssschen Streutheorie für kurzreichweitige Potentiale auf die Klein-Gordon-Gleichungen (0.3), (0.5).

Nachdem in § 1 die Notation und ein Hilfssatz aus der Interpolationstheorie bereitgestellt sowie an die Grundfragen der Streutheorie erinnert wurde, beweisen wir in § 2 den Existenz- und Vollständigkeitssatz für Wellenoperatoren, den wir im folgenden anwenden werden. Der Satz entstand als Verallgemeinerung eines Satzes aus [BSch], der eine abstrakte Existenz- und Vollständigkeitsaussage für Wellenoperatoren nach der Jafajewschen Variante der Enssschen Streutheorie lieferte. Dort wurde der Fall eines einzelnen Hilbertraumes betrachtet; vorausgesetzt wurde eine relativ kompakte Störung $V = B - A$ von A unter der „klassischen" Enssschen Bedingung

$$\int_0^\infty \| V(A \pm i)^{-1} (1 - Q_t) \| \, dt < \infty$$

(vgl. Bedingung (iii) in Satz 2.1).

In § 3 definieren wir - aus dem formalen Operator (0.3) - unseren Klein-Gordon-Operator in einer Skala von Räumen, deren Endpunkte den Räumen der positiven bzw. negativen Energie entsprechen. Wir folgen hier Najman, der in [N1] zeigte, daß diese Operatoren bei geeigneten Potentialen in den jeweiligen Räumen ähnlich zu einem selbstadjungierten Operator sind, und untersuchen anschließend die Beziehungen der spektralen Teilräume unserer Operatoren untereinander.

In § 4 wenden wir den Existenz- und Vollständigkeitssatz für Wellenoperatoren aus § 2 auf die Klein-Gordon-Operatoren aus § 3 an; dabei brauchen wir nur die Endpunkte der Skala zu betrachten, für die entsprechenden Aussagen für das Skaleninnere sind dann einfachere Überlegungen hinreichend. Wir erhalten an beiden Skalen-

enden gleiche Bedingungen an die Potentiale, die sich kanonisch aus den Bedingungen von Satz 2.1 ergeben; das Gesamtergebnis ist in Satz 4.7 festgehalten.

In § 5 wird untersucht, für welche Potentiale die Bedingungen von § 4 erfüllt sind. Unter Berücksichtigung der in § 3 a priori vorausgesetzten ε-Beschränktheit der Potentiale erhalten wir gleiche Bedingungen wie beim Schrödingeroperator; vgl. Beispiel 5.2 und [S, (2.2)]. Der zunächst für elektrostatische Potentiale formulierte Satz 4.7 wird in Satz 5.4 abstrahiert - der also das umfassendste Ergebnis der Arbeit darstellt - , und damit können wir in Beispiel 5.5 das Analogon zu Satz 4.7 für elektrostatische und -magnetische Felder festhalten.

Die meisten der oben aufgeführten älteren Arbeiten betrachten neben dem elektrostatischen und dem elektromagnetischen noch ein „skalares" Potential, dem physikalisch die Bedeutung einer variablen Masse zugeordnet werden kann und das hier beiseite gelassen wurde; mit der Technik, mit der in § 5 das Magnetfeld eingeführt wird, kann ohne weitere Schwierigkeiten auch dieses skalare Potential in die Gleichung einbezogen werden. In Beispiel 5.5 erhält man dafür dann Bedingungen vom gleichen Typ wie für die anderen Potentiale. Davon abgesehen enthalten unsere Ergebnisse alle in [L], [Kk] und [N2] zugelassenen Potentiale; bei [E2], [Sch] und [Wr] ist das leider noch nicht eindeutig geklärt, wie diese Arbeiten auch schon untereinander schwer vergleichbar waren (s. dort). Jedenfalls aber können wir auch Potentiale zulassen, die in [E2], [Sch] und [Wr] nicht enthalten waren; siehe dazu die Bemerkung 4 vor Beispiel 5.3 .

In § 6 wird - ausgehend vom Mittelpunkt unserer Skala von Räumen, der der „Teilchenzahlnorm" entspricht und bei der zweiten Quantisierung von Bedeutung ist - ein Klein-Gordon-Operator konstruiert, der mit einem geeigneten J gemeinsam mit dem entsprechenden ungestörten Operator J-positiv ist.

Im Anhang halten wir schließlich eine beweistechnisch etwas schwierigere Variante eines technischen Lemmas aus § 5 fest, die dort nicht benötigt wurde, aber vielleicht aus sich heraus von Interesse ist.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit durch hilfreiche Diskussionen oder auf andere Weise unterstützt haben. Mein besonderer Dank aber gilt Herrn Prof. Dr. K. Veselić für die Anregung zu dieser Arbeit, seine wertvollen Hinweise und seine ständige Bereitschaft zu kritischen Diskussionen.

§ 1 Bezeichnungen und Grundlagen

In diesem Abschnitt wollen wir die im folgenden verwendete Notation festhalten, einen Satz zur Interpolation von linearen Operatoren in der von uns benötigten speziellen Formulierung angeben und kurz auf die Fragestellungen der Streutheorie eingehen, ohne dabei technische Fragen zu berühren.

Wenn H ein Hilbertraum und M eine Teilmenge von H ist, bezeichnen $\overline{M}$ bzw. $M^\perp$ den Abschluß bzw. das orthogonale Komplement von M in H. Für zwei abgeschlossene lineare Teilräume $X, Y \subset H$ mit $Y \subset X$ ist die direkte Differenz durch

$$X \ominus Y := X \cap Y^\perp$$

definiert („:=" kennzeichnet die Definition des linken Terms durch den rechten).

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet den Raum der über $\mathbb{R}^n$ unendlich oft (partiell) differenzierbaren $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen, $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ diejenigen Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, deren Träger

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$$

kompakt ist. $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ ist der Raum der (Äquivalenzklassen von) meßbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p \, dx < \infty \quad ;$$

$F\varphi$ oder $\tilde{\varphi}$ bezeichnet die Fouriertransformierte von $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Für einen linearen Operator A von einem Hilbertraum in einen (möglicherweise) anderen bezeichnen $D(A)$, $R(A)$, $\rho(A)$, $\sigma(A)$ das Definitionsgebiet, den Bildraum, die Resolventenmenge bzw. das Spektrum von A; A^* ist der adjungierte, A^{-1} der inverse

Operator, $\bar{A}$ der Abschluß von A und $A|_X$ die Einschränkung von A auf $D(A) \cap X$.

Wenn A selbstadjungiert ist, ist E_A die Spektralschar von A mit

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_A(\lambda) \quad ;$$

wir schreiben

$$E_A(I) = \int_I dE_A(\lambda)$$

und für $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, beschränkt auf $\sigma(A)$,

$$\Phi(A) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\lambda) dE_A(\lambda) \quad .$$

$A \geq \gamma$ steht für $\sigma(A) \subset [\gamma, \infty)$, d.h. $(Af,f) \geq \gamma(f,f)$ für alle $f \in D(A)$. $\mathcal{H}^c(A)$ (bzw. $\mathcal{H}^{ac}$, $\mathcal{H}^{sc}$, $\mathcal{H}^s$, $\mathcal{H}^p$) bezeichnen den stetigen (bzw. absolut stetigen, singulär stetigen, singulären, unstetigen) Teilraum für A , analog heißt das Spektrum der Einschränkung von A auf den entsprechenden Teilraum: $\sigma_c(A)$ (bzw. σ_{ac} , σ_{sc} , σ_s) das stetige (bzw. absolut stetige, singulär stetige, singuläre) Spektrum; dagegen ist σ_p die Menge der Eigenwerte von A (also i.a. kleiner als das Spektrum von A auf $\mathcal{H}^p(A)$), siehe dazu [W, S.206ff.]. Für Operatoren, die lediglich ähnlich einem selbstadjungierten Operator sind, können diese Begriffe wie Spektralschar oder spektrale Teilräume durch die betreffende Ähnlichkeit aus den entsprechenden Begriffen beim selbstadjungierten Operator definiert werden.

$B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ bzw. $B_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ bezeichnet die beschränkten bzw. kompakten Operatoren von $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$; falls $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, schreiben wir auch einfach $B(\mathcal{H})$ bzw. $B_\infty(\mathcal{H})$. Wenn nach Definition $A \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, wird bei der Operatornorm von A

$$\|A\| := \sup_{\substack{x\in H_1 \\ \|x\|_{H_1}=1}} \|Ax\|_{H_2}$$

nicht noch einmal auf die Normen in H_1 bzw. H_2 verwiesen. Konvergenz von A_n gegen A in der Operatornorm wird mit

$$A_n \to A = \lim_{n\to\infty} A_n \quad ,$$

starke Konvergenz mit

$$A_n \overset{s}{\to} A = s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n$$

$$(\Leftrightarrow A_n f \to Af \quad \text{für alle } f)$$

gekennzeichnet. Weitere Schreibweisen werden im laufenden Text erläutert.

Die prinzipiellen Fragen der Interpolationstheorie für lineare Operatoren sind die folgenden: Gegeben seien zwei Vektorräume und in jedem eine Skala von Teilräumen; ein linearer Operator bilde die beiden „Endräume" der einen Skala in die der anderen ab. Unter welchen Bedingungen an den Operator und vor allem die Skalen bildet der Operator geeignet gebildete „Zwischenwerte" auf der Skala ineinander ab, und welche Eigenschaften des Operators bleiben dabei erhalten? Wir benötigen hier nur ein sehr spezielles Ergebnis, das wir ohne Beweis aus [RS II, App.IX.4] zusammenstellen:

Lemma 1.1

Sei A ein selbstadjungierter Operator in H, $A \geq \gamma > 0$. Sei $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$ und H^A_α die Vervollständigung von X in der Norm $\|f\|_{\alpha,A} := \|A^\alpha f\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$; H^B_β seien analog definiert. Seien α und β lineare Funktionen von $[0,1]$ in $\mathbb{R}$, $\alpha(0) \leq \alpha(1)$,

und sei

$$C_o = C \in B(H^A_{\alpha(o)}, H^B_{\beta(o)})$$

sowie

$$C_1 := C\Big|_{H^A_{\alpha(1)}} \in B(H^A_{\alpha(1)}, H^B_{\beta(1)})$$

(jeweils mit Norm ≤ 1). Dann ist auch für alle $t \in [0,1]$

$$C_t := C\Big|_{H^A_{\alpha(t)}} \in B(H^A_{\alpha(t)}, H^B_{\beta(t)})$$

(mit Norm ≤ 1).

Später werden wir noch auf ein Ergebnis von Hayakawa (nach [Kk, Lemma 4.2]) verweisen: wenn C_o und C_1 kompakt sind, ist auch C_t, $t \in [0,1]$, kompakt.

Schließlich wollen wir die grundsätzlichen Begriffe der Streutheorie kurz und eher heuristisch zusammenstellen: In der Quantenmechanik werden Zustände von Systemen durch die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H\Phi \tag{1.1}$$

beschrieben, wobei der Hamiltonoperator H selbstadjungiert und von t unabhängig sei. In diesem Fall sind Lösungen von (1.1) gegeben durch

$$\Phi(x,t) = e^{-itH}\varphi(x) \quad ,$$

φ die „Anfangsbedingung".

Seien H_o bzw. H Hamiltonoperatoren, die eine „freie" und eine „gestörte" Dynamik erzeugen. Dann behandelt die Streutheorie vor allem folgende Fragen:

a) (Existenz der Streuzustände) Zu welchen freien Zuständen Φ_o (die durch Anfangsbedingungen φ_o bestimmt sind) existieren gestörte Zustände Φ_+ (bzw. Φ_-), die in der fernen Zukunft (bzw. Vergangenheit) „so aussehen" wie Φ_o ? D.h., existieren $\varphi_\pm$ mit

$$\lim_{t\to\pm\infty} \| e^{-itH}\varphi_\pm - e^{-itH_o}\varphi_o \| = 0$$

(1.2) $$\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\pm\infty} \| \varphi_\pm - e^{itH}e^{-itH_o}\varphi_o \| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_o}\varphi_o \qquad ?$$

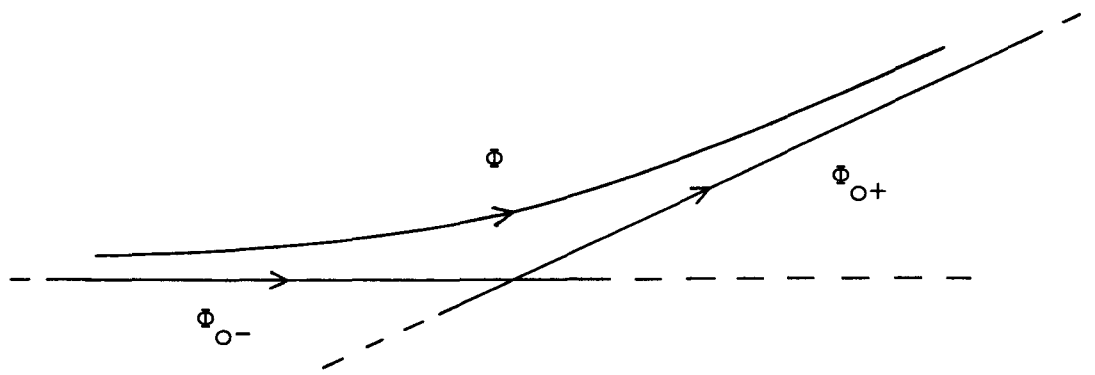
Wenn φ_+ oder φ_- in (1.2) existieren, gehören sie jedenfalls nur zu einem einzigen φ_o , da $e^{itH}e^{-itH_o}$ unitär ist.

b) (Vollständigkeit der Wellenoperatoren) Zu welchen gestörten Zuständen Φ (d.h. Anfangsbedingungen φ) existieren ungestörte Zustände $\Phi_{o\pm}$ mit

(1.3) $$\varphi = \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_o}\varphi_{o\pm}$$

(die dann, s.o., eindeutig durch Φ bestimmt sind) ?

c) (Existenz der Streumatrix) Wenn die $\varphi_{o\pm}$ aus (1.3) zu einem gegebenen φ jeweils gleichzeitig existieren oder nicht existieren, kann man die Streumatrix definieren, die φ_{o-} in φ_{o+} abbildet (und nach a) und b) wohldefiniert ist). Diese Streumatrix ordnet also der „Vergangenheitsasymptotik" eines gestörten Zustandes Φ die „Zukunftsasymptotik" zu (s. Skizze auf der nächsten Seite).



Bei der Untersuchung dieser Fragen kann man bestimmte Teilräume von vornherein ausschließen: Wenn φ_o ein Eigenvektor von H_o zum Eigenwert λ ist, ist (1.2) genau dann erfüllt, wenn $\varphi_\pm = \varphi_o$ gleichzeitig Eigenvektor von H zum Eigenwert λ ist ((1.3) entsprechend). Also sprechen wir von (*starker*) *asymptotischer Vollständigkeit*, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{H}^c(H)$ $\varphi_{o\pm}$ existieren, so daß (1.3) gilt; und von *schwacher asymptotischer Vollständigkeit*, wenn die Bedingung für die Existenz der Streumatrix (siehe c)) erfüllt ist. Die Existenz von (1.2) untersucht man nun nicht auch für $\varphi_o \in \mathcal{H}^c(H_o)$, sondern lediglich für $\varphi_o \in \mathcal{H}^{ac}(H_o)$; zum einen hat dies technische Gründe, zum anderen ist es kein großer Nachteil, da die meisten „freien" Dynamiken absolut stetiges Spektrum haben. Also projizieren wir zunächst mit $P_{ac}(H_o)$ auf $\mathcal{H}^{ac}(H_o)$ und untersuchen die Existenz der *verallgemeinerten Wellenoperatoren*

$$(1.4) \qquad \Omega_\pm := \Omega_\pm(H,H_o) := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_o}P_{ac}(H_o) \quad ;$$

die Wellenoperatoren heißen *schwach vollständig*, wenn $R(\Omega_+) = R(\Omega_-)$; *vollständig*, wenn $R(\Omega_+) = R(\Omega_-) = \mathcal{H}^{ac}(H)$; und *stark vollständig**), wenn $R(\Omega_\pm) = R(\Omega_-) = \mathcal{H}^c(H)$ gilt (also $\mathcal{H}^{sc}(H) = \{0\}$, denn $R(\Omega_\pm) \subset \mathcal{H}^{ac}(H)$ gilt immer!). Starke Vollständigkeit der Wellenopera-

*) Dieser Begriff wird in dieser Arbeit allerdings nicht verwendet, sondern weiterhin umschrieben werden.

toren ist also äquivalent mit (starker) asymptotischer Vollständigkeit; die entsprechende Aussage für schwache (asymptotische) Vollständigkeit gilt, falls $\mathcal{H}^{sc}(H_o) = \{0\}$.

All diese Definitionen lassen sich leicht erweitern auf Operatoren H bzw. H_o , die in verschiedenen Hilberträumen $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}_o$ definiert sind und dort obendrein lediglich ähnlich zu selbstadjungierten Operatoren A bzw. A_o (durch Ähnlichkeitstransformationen T bzw. T_o) sind; sei $J \in B(\mathcal{H}_o, \mathcal{H})$, so definieren wir

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm} &:= \Omega_{\pm}(H, H_o; J) \\ &:= \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} T e^{itA} T^{-1} J T_o e^{-itA_o} T_o^{-1} P_{ac}(H_o) \qquad (1.5) \\ &= \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} T e^{itA} T^{-1} J T_o e^{-itA_o} P_{ac}(A_o) T_o^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Im folgenden wird stets J beidseitig stetige Bijektion, $T_o = 1$ und $P_{ac}(H_o) = 1$ sein; damit sind auch die $\Omega_{\pm}$ aus (1.5) beidseitig stetig, im Gegensatz zu denen aus (1.4) aber im allgemeinen keine partiellen Isometrien mehr. Trotzdem kann auch dann die *Streumatrix* (siehe c))

$$S := \Omega_+^{-1} \Omega_- \quad , \qquad (1.6)$$

die wir bei schwacher Vollständigkeit definieren können, unitär sein, wie wir noch sehen werden. Die Schreibweise (1.6) für die Streumatrix wurde im Hinblick auf (1.5) (und c)) gewählt; für (1.4) stimmt sie mit der üblichen Schreibweise

$$S = \Omega_+^* \Omega_-$$

überein.

§ 2 Ein Existenz- und Vollständigkeitssatz für Wellenoperatoren

In diesem Kapitel stellen wir einen Existenz- und Vollständigkeitssatz für Wellenoperatoren in einer „Laplacefreien" Formulierung bereit. Der Beweis beruht auf der Jafajewschen Version der Enssschen Streutheorie, wie sie - in vereinfachter Form mit stärkeren Voraussetzungen und für nur einen Hilbertraum - in [BSch] dargestellt wurde. Die Jafajewsche Variante der Enssschen Theorie wird durch den zweiten Teil der Bedingung (iv) des folgenden Satzes gekennzeichnet, deren Bedeutung erst bei der Verifikation an konkreten Differentialoperatoren deutlich wird; vgl. die Bemerkung nach dem Beweis von Lemma 4.1 sowie [J] und [P]*).

Satz 2.1

A bzw. B seien selbstadjungierte Operatoren in den Hilberträumen H_A bzw. H_B ; es sei $H_A = H^{ac}(A)$. $J : H_A \to H_B$ sei beidseitig stetige Bijektion mit

(i) $\quad J^{-1}(B \pm i)^{-1} J - (A \pm i)^{-1} \in B_\infty(H_A)$.

Weiter seien $\mathbb{P}_\pm \in B(H_A)$, $Z \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und abzählbar, so daß für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus Z)$ eine Schar Q_t in $B(H_A)$, $t \geq 0$, und ein $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\psi(A)^{-1} \in B(H_A)$ existieren, so daß gilt

(ii) $\quad \underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}\, Q_t = \underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}\, Q_t^* = 1$

(iii) $\quad (BJ - JA)\psi(A)^{-1} \in B(H_A, H_B)$ und

$$\int_0^\infty \| (BJ - JA)\psi(A)^{-1}(1 - Q_t) \|\, dt < \infty$$

(iv) $\quad \mathbb{P}_+ + \mathbb{P}_- = 1 \quad , \quad \overline{R(\mathbb{P}_\pm)} = H_A$

---

*) Aus [P] stammen auch, von der Erweiterung auf zwei Hilberträume abgesehen, die über [BSch] hinausgehenden Techniken im Beweis.

(v) Für $\psi_o = \psi$ bzw. $\psi_o = 1$ gilt

$$\| Q_t \, e^{\mp itA} \psi_o(A) \varphi(A) \, \mathbb{P}_\pm \| \leq c(1+t)^{-1-\delta}$$

für alle $t \geq 0$, wobei $\delta > 0$ und c nur von φ abhängen.

Dann existieren

$$\Omega_\pm(B,A;J) := \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{itB} J e^{-itA}$$

und sind vollständig; das singulär stetige Spektrum von B ist leer, und die Eigenwerte von B können sich nur in Z häufen; Eigenwerte, die nicht in Z liegen, haben endliche Vielfachheit.

Beweis:
Zunächst zur Existenz: Es ist z.B.

$$\{\varphi(A) \, \mathbb{P}_+ f : f \in \mathcal{H}_A \, , \, \varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}\backslash Z)\}$$

dicht in $\mathcal{H}_A$; sonst gäbe es ein $g \in \mathcal{H}_A = \mathcal{H}^{ac}(A)$ mit

$$\mathbb{P}_+^* \, \overline{\varphi}(A) g = 0 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}\backslash Z) \, .$$

Wegen $g \in \mathcal{H}^{ac}(A)$ existieren $\varphi_n \in C_o^\infty(\mathbb{R}\backslash Z)$ mit $\overline{\varphi}_n(A) g \to g$, also

$$\mathbb{P}_+^* g = 0$$

und $g = 0$ wegen (iv).

Damit folgt nach Cook (s. z.B. [RS III, Th.XI.4]; die einfache Verallgemeinerung für zwei Hilberträume scheint zuerst von Eckardt [E1] benutzt worden zu sein) die Existenz von $\Omega_+(B,A;J)$ aus

$$\int_0^\infty \| e^{itB}(BJ - JA)e^{-itA}\varphi(A)\,\mathbb{P}_+\| \, dt$$

$$\leq \int_0^\infty \| (BJ - JA)\psi(A)^{-1}\| \, \| Q_t e^{-itA}\psi(A)\varphi(A)\,\mathbb{P}_+\| \, dt$$

(2.1)

$$+ \int_0^\infty \| (BJ - JA)\psi(A)^{-1}(1 - Q_t)\| \, \| e^{-itA}\psi(A)\varphi(A)\,\mathbb{P}_+\| \, dt$$

$$< \infty$$

wegen (v) und (iii) ; $\Omega_-(B,A;J)$ analog.

Nun zur Vollständigkeit: Zunächst ist für jedes $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$

(2.2) $$K_o := J\varphi(A)J^{-1} - \varphi(B)$$

kompakt in $\mathcal{H}_B$, da jedes $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ sich nach dem komplexen Stone-Weierstraß-Theorem gleichmäßig durch Funktionen aus

$$\{f : f(x) = P((x+i)^{-1},(x-i)^{-1}),\ P \text{ Polynom}\}$$

approximieren läßt; wegen

$$P(s,t) - P(s_o,t_o) = (s-s_o)P_1(s,t) + (t-t_o)P_2(s,t)$$

und

$$Jf(A)J^{-1} = f(JAJ^{-1})$$

genügt also, daß

$$(B \pm i)^{-1} - (JAJ^{-1} \pm i)^{-1} = J\,[\,J^{-1}(B \pm i)^{-1}J - (A \pm i)^{-1}\,]\,J^{-1}$$

kompakt ist, was wegen (i) gilt.

Weiter zeigen wir, daß für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus Z)$

$$K_\pm := (\Omega_\pm(B,A;J) - J)\varphi(A)\mathbb{P}_\pm J^{-1} \tag{2.3}$$

kompakt in $\mathcal{H}_B$ ist. Dazu sei $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\Phi = 1$ auf supp φ. Es genügt zu zeigen, daß $\Phi(B)K_\pm$ kompakt ist, denn mit $\Phi\varphi = \varphi$ und der Verknüpfungsrelation $\Phi(B)\Omega_\pm(B,A;J) = \Omega_\pm(B,A;J)\Phi(A)$ (vgl. [W, Th.11.1], das unmittelbar auf den Fall zweier Hilberträume übertragen werden kann) erhalten wir

$$\begin{aligned} & K_\pm - \Phi(B)K_\pm \\ &= [1 - \Phi(B)]\Omega_\pm(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_\pm J^{-1} - [1 - \Phi(B)]J\varphi(A)\mathbb{P}_\pm J^{-1} \\ &= \Omega_\pm(B,A;J)[1 - \Phi(A)]\varphi(A)\mathbb{P}_\pm J^{-1} - J[\Phi(A) - J^{-1}\Phi(B)J]\varphi(A)\mathbb{P}_\pm J^{-1}\ , \end{aligned}$$

wobei der erste Term verschwindet und der zweite wegen (2.2) kompakt ist. Also betrachten wir

$$\begin{aligned} & \Phi(B)K_\pm \\ &= \pm i\Phi(B)\int_0^\infty e^{\pm itB}(BJ - JA)\, e^{\mp itA}\varphi(A)\mathbb{P}_\pm J^{-1}\,dt \\ &= \pm i\int_0^\infty e^{\pm itB}\Phi(B)(B+i)(B+i)^{-1}(BJ-JA)(A+i)^{-1}(A+i)\varphi(A)e^{\mp itA}\mathbb{P}_\pm J^{-1}dt; \end{aligned}$$

nach (2.1) konvergiert das Integral in der Norm, und der Integrand ist wegen

$$\begin{aligned} & (B+i)^{-1}(BJ - JA)(A+i)^{-1} \\ &= J(J^{-1}BJ + i)^{-1}(J^{-1}BJ - A)(A+i)^{-1} \\ &= -J[(J^{-1}BJ + i)^{-1} - (A+i)^{-1}] \end{aligned}$$

und (i) kompakt. Also ist $\Phi(B)K_\pm$ und damit $K_\pm$ kompakt.

Weiter gilt

$$\mathbb{P}^*_{\pm} e^{\mp itA} \overline{\varphi}(A) = \mathbb{P}^*_{\pm} e^{\mp itA} \overline{\varphi}(A) Q^*_t + \mathbb{P}^*_{\pm} e^{\mp itA} \overline{\varphi}(A)(1 - Q^*_t)$$

(2.4)

$$\xrightarrow{s} 0$$

(der erste Summand wegen (v), der zweite wegen (ii)); schließlich ist $R(\Omega_{\pm}(B,A;J))$ abgeschlossen, da J beidseitig stetig ist, also

$$\| \Omega_{\pm}(B,A;J) f \| \geq \frac{1}{\| J^{-1} \|} \| f \|$$

für alle $f \in \mathcal{H}_A$ gilt.

Nun nehmen wir an, es sei z.B.

$$R(\Omega_+(B,A;J)) \neq \mathcal{H}^{ac}(B) \quad .$$

Andererseits gilt immer

$$R(\Omega_+(B,A;J)) \subset \mathcal{H}^{ac}(B) \quad ,$$

und beide Teilräume sind unter B invariant [RS III, S.34]. Damit ist

$$X := \mathcal{H}^{ac}(B) \ominus R(\Omega_+(B,A;J))$$

ein unter B invarianter Teilraum. Also existiert ein $f \in X$ und ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\backslash Z)$ mit $f = \varphi(B)f$, $f \neq 0$. (Zu $f_0 \in X$, $f_0 \neq 0$, existiert ein kompaktes Intervall I , $I \cap Z = \emptyset$, mit $E(I)f_0 \neq 0$; wähle $f = E(I)f_0$, $\varphi(x) = 1$ für $x \in I$.)

Nun konvergiert e^{-itB} auf $\mathcal{H}^{ac}(B)$ schwach gegen Null und damit Ke^{-itB} auf $\mathcal{H}^{ac}(B)$ stark gegen Null für jeden kompakten Operator K (s. [RS III, S.24]). Sei

$$f_t := e^{-itB} f = \varphi(B) e^{-itB} f \quad .$$

Damit ist

$$\|f\|_B^2 = (f_t, \varphi(B) f_t)_B$$

$$= (f_t, J\varphi(A)J^{-1} f_t)_B - (f_t, K_o f_t)_B$$

(der Buchstabe im Index kennzeichnet den Raum, in dem das Skalarprodukt gebildet wird), weiter

$$J\varphi(A)J^{-1} = J\varphi(A)\mathbb{P}_+ J^{-1} + J\varphi(A)\mathbb{P}_- J^{-1}$$

$$= \Omega_+(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_+ J^{-1} - K_+$$

$$+ \Omega_-(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_- J^{-1} - K_-$$

wegen (2.3), also

$$\|f\|_B^2 = (f_t, \Omega_+(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_+ J^{-1} f_t)_B$$

$$+ (f_t, \Omega_-(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_- J^{-1} f_t)_B \tag{2.5}$$

$$- (f_t, (K_o + K_+ + K_-) f_t)_B \quad .$$

Der erste Term verschwindet identisch, da X invariant unter e^{-itB} ist, also $f_t \perp R(\Omega_+(B,A;J))$; der letzte konvergiert gegen Null, da (f_t) beschränkt ist und $K_{+/-/o} f_t$ gegen Null konvergiert. Mit

$$\Omega_-(B,A;J)e^{itA} = e^{itB}\Omega_-(B,A;J)$$

erhalten wir für den mittleren Term

$$(f_t , \Omega_-(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_-J^{-1}f_t)_B$$

$$= (f , e^{itB}\Omega_-(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_-J^{-1}f_t)_B$$

$$= (f , \Omega_-(B,A;J)e^{itA}\varphi(A)\mathbb{P}_-J^{-1}f_t)_B$$

$$= (\mathbb{P}_-^*\overline{\varphi}(A)e^{-itA}\Omega_-^*(B,A;J)f , J^{-1}f_t)_A$$

$$\to 0 \quad ,$$

da wieder $(J^{-1}f_t)$ beschränkt bleibt und wegen (2.4). Also ist $f = 0$ und $R(\Omega_+(B,A;J)) = \mathcal{H}^{ac}(B)$; Ω_- analog.

Nun fehlen noch die Aussagen über $\sigma_{sc}(B)$ und $\sigma_p(B)$. Für beide genügt es, zu zeigen, daß für jedes kompakte Intervall I mit $I \cap Z = \emptyset$

$$E_B(I)(\mathcal{H}_B \ominus \mathcal{H}^{ac}(B)) = E_B(I)R(\Omega_{\pm}(B,A;J))^{\perp}$$

endlichdimensional ist. (Daraus folgt die Aussage für die Eigenwerte und $\sigma_{sc}(B) \subset Z$, was unmöglich ist, also $\sigma_{sc}(B) = \emptyset$.)

Angenommen, das sei nicht der Fall; dann gibt es ein kompaktes Intervall I , $I \cap Z = \emptyset$, und ein abzählbares Orthonormalsystem (f_n) in $E_B(I)R(\Omega_{\pm}(B,A;J))^{\perp}$; weiter gibt es $\varphi \in C_o^{\infty}(\mathbb{R}\backslash Z)$ mit $\varphi(x) = 1$, $x \in I$, und aus $E_B(I)f_n = f_n$ folgt $\varphi(B)f_n = f_n$. Damit gilt wieder (vgl. (2.5))

$$\|f_n\|_B^2 = (f_n , \varphi(B)f_n)_B$$

$$= (f_n , \Omega_+(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_+J^{-1}f_n)_B$$

$$+ (f_n , \Omega_-(B,A;J)\varphi(A)\mathbb{P}_-J^{-1}f_n)_B$$

$$- (f_n , (K_o + K_+ + K_-)f_n)_B \quad .$$

(f_n) ist als Orthonormalsystem in einem Hilbertraum eine schwache Nullfolge, also konvergiert der letzte Term gegen Null, und die beiden ersten verschwinden, da $E_B(I)\ H^{ac}(B)^{\perp}$ invariant läßt, also $f_n \perp R(\Omega_{\pm}(B,A;J))$. Also $\|f_n\|_B \to 0$ im Widerspruch zu $\|f_n\|_B = 1$.

Q.E.D.

§ 3 Die Klein-Gordon-Gleichung in einer Skala von Räumen

In diesem Abschnitt wollen wir den formalen Klein-Gordon-Operator L aus (0.3) durch einen bzw. eine ganze Skala von exakt definierten Operatoren ersetzen, die im folgenden untersucht werden sollen. Wir folgen dabei im wesentlichen Najman [N1], finden aber auch neue Ergebnisse (Satz 3.7, Korollar 3.9, (3.21)). Wir formulieren diesen Abschnitt zunächst nur für elektrostatische Potentiale; die Erweiterung für magnetische (oder auch skalare, s. die Einleitung) Potentiale bereitet später keine Probleme und wird in § 5 nachgeholt.

Es sei ε^2 der selbstadjungierte Abschluß von $-\Delta + m^2$ auf $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ (also $\varepsilon := \sqrt{\varepsilon^2} \geq m$) und V ein symmetrischer Operator mit $D(V) \supset D(\varepsilon)$ und

$$\|Vu\| \leq b\|\varepsilon u\| \quad , \quad u \in D(\varepsilon) \ , \ 0 \leq b < 1 \quad . \tag{3.1}$$

Damit ist die Form

$$[u,w] := (\varepsilon u, \varepsilon w) - (Vu, Vw) \quad , \quad D([\,]) = D(\varepsilon) \quad , \tag{3.2}$$

abgeschlossen ([K, Th.VI.1.33]) und positiv definit. Nach dem ersten Darstellungssatz ([K, Th.VI.2.1]) existiert dann ein eindeutiger selbstadjungierter, positiv definiter Operator H mit $D(H) \subset D(\varepsilon)$ und

$$[u,w] = (Hu,w) \quad \text{für} \quad u \in D(H) \ , \ w \in D(\varepsilon) \quad . \tag{3.3}$$

Wir definieren $h := H^{1/2}$; der zweite Darstellungssatz ([K, Th. VI.2.23]) sichert dann $D(h) = D(\varepsilon)$ und mit (3.2), (3.3)

$$\sqrt{1-b^2}\,\|\varepsilon u\| \leq \|hu\| \leq \|\varepsilon u\| \quad , \quad u \in D(\varepsilon) \quad . \tag{3.4}$$

Daraus folgt wiederum

(3.5) $$\sqrt{1-b^2}\,\|\varepsilon h^{-1}\| \le 1 \quad , \quad \|h\varepsilon^{-1}\| \le 1$$

und somit auch

$$\sqrt{1-b^2}\,\|h^{-1}\varepsilon u\| \le \|u\| \quad , \quad \|\varepsilon^{-1}hu\| \le \|u\| \quad , \quad u \in D(\varepsilon)$$

und deshalb

(3.6) $$\sqrt{1-b^2}\,\|h^{-1}w\| \le \|\varepsilon^{-1}w\| \le \|h^{-1}w\| \quad , \quad w \in L_2(\mathbb{R}^n) \ .$$

Nun sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ G_α^ε die Vervollständigung von $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ unter dem Skalarprodukt

(3.7) $$(f,g)_{\alpha,\varepsilon} := (\varepsilon^\alpha f, \varepsilon^\alpha g) \quad ;$$

man sieht leicht

Lemma 3.1

a) Für $\alpha \ge 0$ ist $G_\alpha^\varepsilon = D(\varepsilon^\alpha)$.

b) Für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ läßt sich $\varepsilon^{\alpha-\beta}$ zu einem isometrischen Isomorphismus von G_α^ε auf G_β^ε erweitern bzw. einschränken (diese Erweiterung wird im folgenden nicht gesondert gekennzeichnet!).

c) Für $\alpha \ge \beta$ ist $G_\alpha^\varepsilon \subset G_\beta^\varepsilon$, und die Einbettung

$$I_{\beta\alpha} := \mathrm{Id} : G_\alpha^\varepsilon \to G_\beta^\varepsilon$$

ist stetig mit dichtem Bildbereich.

Analog zu (3.7) definiert man G_α^h , und die Aussagen von Lemma 3.1 gelten entsprechend. Aus (3.4) und (3.6) folgt

(3.8) $$G_1^\varepsilon = G_1^h \quad , \quad G_{-1}^\varepsilon = G_{-1}^h$$

mit jeweils äquivalenten Normen. Nach Konstruktion sind die G_α^ε bzw. G_α^h , $\alpha \in [-1,1]$, aber Interpolationsräume (vgl. Lemma 1.1),

also folgt (durch „beidseitige" Interpolation) aus (3.8) mit Lemma 1.1

$$(3.9) \qquad G_\alpha^\varepsilon = G_\alpha^h \quad , \quad 1 \geq \alpha \geq -1$$

mit äquivalenten Normen. Nun definieren wir weiterhin für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Hilberträume

$$H_\alpha^\varepsilon := G_\alpha^\varepsilon \times G_{\alpha-1}^\varepsilon \quad , \quad H_\alpha^h := G_\alpha^h \times G_{\alpha-1}^h \quad ;$$

aus (3.9) folgt

$$(3.10) \qquad H_\alpha^\varepsilon = H_\alpha^h \quad , \quad 1 \geq \alpha \geq 0$$

mit äquivalenten Normen, also ist

$$(3.11) \qquad J_\alpha := \mathrm{Id} : H_\alpha^\varepsilon \to H_\alpha^h \quad , \quad 1 \geq \alpha \geq 0$$

beidseitig stetige Bijektion. Aus Lemma 3.1c ergibt sich das

Korollar 3.2

Für $\alpha \geq \beta$ ist H_α^ε dicht in H_β^ε ; entsprechend für h statt ε . Die jeweiligen Einbettungen sind stetig.

Nun sei V_o ein weiterer symmetrischer, ε-beschränkter Operator mit beliebiger ε-Schranke. Wir zeigen

Lemma 3.3

Für $1 \geq \alpha \geq 0$ läßt sich V_o erweitern zu einem Operator aus $B(G_\alpha^h, G_{\alpha-1}^h)$, der eindeutig bestimmt ist.

Beweis:

Die Eindeutigkeit ist nach Lemma 3.1c klar. Für die Existenz langt es nach (3.9) zu zeigen, daß V_o eine Erweiterung in $B(G_\alpha^\varepsilon, G_{\alpha-1}^\varepsilon)$ hat. Zunächst ist $G_1^\varepsilon = D(\varepsilon) \subset D(V_o)$ und $V_o \in B(G_1^\varepsilon, G_o^\varepsilon)$, denn für $f \in D(\varepsilon)$ ist

$$\|V_o f\|_{o,\varepsilon} = \|V_o f\| = \|V_o \varepsilon^{-1} \varepsilon f\| \leq c \|f\|_{1,\varepsilon} \quad .$$

Weiter gilt $V_o \varepsilon^{-1} \in B(L_2(\mathbb{R}^n)) = B(G_o^\varepsilon)$ und $(V_o \varepsilon^{-1})^* \supset \varepsilon^{-1} V_o$, also

$$V_o' := \varepsilon (V_o \varepsilon^{-1})^* \supset V_o \quad ,$$

wobei ε als Isometrie von G_o^ε auf G_{-1}^ε aufgefaßt wird, also

$$V_o' \in B(G_o^\varepsilon, G_{-1}^\varepsilon) \quad .$$

Durch Interpolation folgt

$$V_o'|_{G_\alpha^\varepsilon} \in B(G_\alpha^\varepsilon, G_{\alpha-1}^\varepsilon) \quad .$$

Q.E.D.

Natürlich gilt die entsprechende Aussage auch für V. Wie schon bei ε und h, werden wir auch bei V und V_o keine Unterscheidung mehr zwischen z.B. V_o und V_o' machen.

Jetzt können wir unseren (gestörten und ungestörten) Klein-Gordon-Operator definieren. Für $1 \geq \alpha \geq 0$ definieren wir in H_α^h

$$(3.12) \qquad D(B_\alpha) := G_{\alpha+1}^h \times G_\alpha^h \quad , \quad B_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h^2 & 2V_o \end{pmatrix}$$

und in H_α^ε

$$(3.13) \qquad D(A_\alpha) := G_{\alpha+1}^\varepsilon \times G_\alpha^\varepsilon \quad , \quad A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Aus Lemma 3.1b und Lemma 3.3 folgt, daß A_α und B_α auf ihren „natürlichen" Definitionsbereichen definiert sind.

Aus Lemma 3.3 ergibt sich sofort das

Korollar 3.4

$$(3.14) \qquad S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2V_o & 1 \end{pmatrix}$$

ist beidseitig stetig in H^h_α, $1 \geq \alpha \geq 0$ (wobei mit V_o die Erweiterung aus Lemma 3.2 gemeint ist), mit

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2V_o & 1 \end{pmatrix} .$$

- und damit definieren wir zusätzlich zu den B_α noch in H^h_o

$$(3.15) \qquad \tilde{B} := SB_oS^{-1} = \begin{pmatrix} 2V_o & 1 \\ h^2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $D(\tilde{B}) = SD(B_o) = SH^h_1 = H^h_1 = D(B_o)$.

Ohne Beweis übernehmen wir direkt aus [N1],[N2]

Satz 3.5

a) B_1 ist selbstadjungiert in H^h_1, $\tilde{B}$ in H^h_o ;

Für $1 \geq \alpha \geq 0$ gilt:

b) A_α ist selbstadjungiert und absolut stetig in H^ε_α ;

c) B_α ist ähnlich einem selbstadjungierten Operator in H^h_α .

(Bei a) genügt, daß B_1 bzw. $\tilde{B}$ symmetrisch mit beschränktem, überall definierten Inversen sind; bei b) ist A_α die unitäre Transformation von $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ in $L^2_2(\mathbb{R}^n)$, und bei c) wird zwischen den beschränkten, stark stetigen Gruppen e^{itB_o} und e^{itB_1} interpoliert.)

Wenn die Aussage von Satz 3.5c erst einmal bekannt ist, können wir darüber hinaus sogar zeigen, daß die B_α untereinander ähnlich sind; dazu benötigen wir zunächst das

Lemma 3.6

Es seien H_i selbstadjungierte Operatoren in $\mathcal{H}_i$, $i = 1,2$. $X \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ sei injektiv mit $\overline{R(X)} = \mathcal{H}_2$ und

$$XH_1 \subset H_2X \quad .$$

Dann sind H_1 und H_2 unitär ähnlich.

Beweis:

Zu X existiert die polare Zerlegung (vgl. [K, S.334])

$$X = U|X| \quad ,$$

$|X| = \sqrt{X^*X}$ selbstadjungiert und nichtnegativ, $D(|X|) = D(X)$, $U =: \operatorname{sgn} X$ partielle Isometrie von $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ mit Anfangsbereich $N(X)^\perp = \mathcal{H}_1$ und Endbereich $\overline{R(X)} = \mathcal{H}_2$; also ist U unitär. Aus

$$X(H_1 \pm i) \subset (H_2 \pm i)X$$

folgt nun

$$(H_2 \pm i)^{-1}X \subset X(H_1 \pm i)^{-1},$$

also

$$(H_2 \pm i)^{-1}X = X(H_1 \pm i)^{-1}$$

sowie

$$X^*(H_2 \mp i)^{-1} = (H_1 \mp i)^{-1}X^* \quad .$$

Damit gilt

$$X^*X(H_1 \pm i)^{-1} = X^*(H_2 \pm i)^{-1}X = (H_1 \pm i)^{-1}X^*X \quad ;$$

d.h. $(H_1 \pm i)^{-1}$ vertauscht mit X^*X , also auch mit $|X|$, d.h

$$|X|(H_1 \pm i)^{-1} = (H_1 \pm i)^{-1}|X| \quad ,$$

und aus

$$U|X|(H_1 \pm i)^{-1} = (H_2 \pm i)^{-1}U|X|$$

folgt

$$U(H_1 \pm i)^{-1}|X| = (H_2 \pm i)^{-1}U|X| \quad ,$$

also wegen $\overline{R(|X|)} = N(|X|)^{\perp} = N(X)^{\perp} = \mathfrak{H}_1$

$$(H_1 \pm i)^{-1} = U^*(H_2 \pm i)^{-1}U \quad ,$$

d.h.

$$H_1 = U^*H_2U$$

Q.E.D.

Nun können wir zeigen:

Satz 3.7

Die B_α , $1 \geq \alpha \geq 0$, sind einander ähnlich.

Beweis:

Daß die B_α ähnlich einem selbstadjungierten Operator in $\mathfrak{H}_\alpha^h$ sind (mit unbekanntem selbstadjungierten Operator und unbekannter Ähnlichkeitstransformation), wissen wir aus Satz 3.5c ; es langt zu zeigen, daß jedes B_α ähnlich dem selbstadjungierten B_1 ist. Wir können also zunächst schreiben

$$B_\alpha = T_\alpha B_{\alpha,s} T_\alpha^{-1} \quad , \tag{3.16}$$

$B_{\alpha,s}$ selbstadjungiert in $\mathfrak{H}_\alpha^h$, T_α beidseitig stetig in $\mathfrak{H}_\alpha^h$, $T_1 = 1$. Es ist (als Mengen betrachtet)

$$H_1^h \subset H_\alpha^h \quad , \quad D(B_1) \subset D(B_\alpha) \quad ,$$

und nach Korollar 3.2 ist die Einbettung

$$I_\alpha := \mathrm{Id} : H_1^h \to H_\alpha^h$$

aus $B(H_1^h, H_\alpha^h)$ mit dichtem Bildbereich. Nun ist nach (3.12)

$$I_\alpha B_1 \subset B_\alpha I_\alpha$$

oder

$$I_\alpha B_{1,s} \subset T_\alpha B_{\alpha,s} T_\alpha^{-1} I_\alpha \quad ,$$

d.h.

$$X_\alpha B_{1,s} \subset B_{\alpha,s} X_\alpha$$

mit

$$X_\alpha := T_\alpha^{-1} I_\alpha$$

und $X_\alpha \in B(H_1^h, H_\alpha^h)$ mit dichtem Bildbereich; also ist $U_\alpha := \operatorname{sgn} X_\alpha$ Isometrie von H_1^h auf H_α^h mit

$$B_1 = B_{1,s} = U_\alpha^* B_{\alpha,s} U_\alpha$$

nach Lemma 3.6 , und schließlich

(3.17) $$B_\alpha = Y_\alpha B_1 Y_\alpha^{-1} \quad ,$$

wobei $Y_\alpha := T_\alpha U_\alpha$ beidseitig stetig aus $B(H_1^h, H_\alpha^h)$ ist.

Q.E.D.

Weiterhin beweisen wir das natürlich wirkende

Lemma 3.8

Für $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$ gilt jeweils

$$H^{ac/c/s/p/sc}(B_\alpha) \subset H^{ac/c/s/p/sc}(B_\beta) \quad .$$

Beweis:

Die spektralen Teilräume von B_α gehen durch die Ähnlichkeitstransformation T_α in (3.16) aus denen des selbstadjungierten Operators $B_{\alpha,s}$ mit der Spektralschar $E_{\alpha,s}(\lambda)$ hervor, also enthält die „Spektralschar"

$$E_\alpha(\lambda) = T_\alpha E_{\alpha,s}(\lambda) T_\alpha^{-1}$$

von B_α (die ja abgesehen von der Orthogonalität alle Anforderungen an eine Spektralschar erfüllt) alle Informationen, die zur Beschreibung der spektralen Teilräume der B_α nötig sind. Wir betrachten $E_{\alpha,s}$. Nach z.B. [K, S.358f.] gilt (für festes α)

$$E_{\alpha,s}(\lambda) = 1 - \frac{1}{2}[U(\lambda) + U^2(\lambda)] \quad ,$$

$$U(\lambda) = \operatorname*{s-lim}_{\substack{\delta \to 0 \\ \rho \to \infty}} U_{\delta,\rho}(\lambda) \quad , \tag{3.18}$$

$$U_{\delta,\rho}(\lambda) := \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\rho}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\rho}\right](B_{\alpha,s} - \lambda - i\eta)^{-1} d\eta \quad .$$

Diese Darstellung „erhält Ähnlichkeiten", d.h. aus

$$T_\beta B_{\beta,s} T_\beta^{-1} u = B_\beta u = B_\alpha u = T_\alpha B_{\alpha,s} T_\alpha^{-1} u \quad , \quad u \in D(B_\alpha)$$

folgt mit (3.18)

$$E_\beta(\lambda) w = T_\beta E_{\beta,s}(\lambda) T_\beta^{-1} w = T_\alpha E_{\alpha,s}(\lambda) T_\alpha^{-1} w = E_\alpha(\lambda) w \quad , \quad w \in H_\alpha^h \quad , \tag{3.19}$$

wenn man noch berücksichtigt, daß nach Korollar 3.2 ein s-Limes in H_α^h automatisch einer in H_β^h ist. Aus dem gleichen Grund folgt aus (3.19), daß für $u \in H_\alpha^h$ $E_\beta(S)u = E_\alpha(S)u$ für jede Borelmenge $S \subset \mathbb{R}$ gilt.

Nun gilt $u \in H^{ac}(B_\alpha)$ genau dann, wenn $E_\alpha(S)u = 0$ für jede Borelmenge $S \subset \mathbb{R}$ mit $|S| = 0$ ist; dann ist aber nach (3.19) auch $E_\beta(S)u = 0$, also $u \in H^{ac}(B_\beta)$.

$u \in H^c(B_\alpha)$ ist äquivalent mit $\|(E_\alpha(\lambda) - E_\alpha(\lambda_o))u\|_{\alpha,h} \to 0$ für $\lambda \to \lambda_o$; dann gilt aber nach (3.19) und Korollar 3.2 auch $\|(E_\beta(\lambda) - E_\beta(\lambda_o))u\|_{\beta,h} \to 0$, also $u \in H^c(B_\beta)$.

$u \in H^s(B_\alpha)$ gilt genau dann, wenn eine Borelmenge $S_o \subset \mathbb{R}$ mit $|S_o| = 0$ existiert mit $E_\alpha(S_o)u = u$; damit ist auch $E_\beta(S_o)u = u$ und $u \in H^s(B_\beta)$.

Eigenwerte schließlich bleiben beim Übergang von α zu β trivialerweise erhalten, also ist $H^p(B_\alpha) \subset H^p(B_\beta)$ (Abschlüsse in H_α^h sind kleiner als in H_β^h !); und endlich ist

$$H^{sc}(B_\alpha) = H^c(B_\alpha) \cap H^s(B_\alpha) \subset H^c(B_\beta) \cap H^s(B_\beta) = H^{sc}(B_\beta).$$

Q.E.D.

Aus Korollar 3.2 und Lemma 3.8 folgt

Korollar 3.9

Für $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$ ist $H^{ac/c}(B_\alpha)$ dicht in $H^{ac/c}(B_\beta)$.

Beweis:

Sei $x \in H^{ac}(B_\beta) \subset H_\beta^h$; nach Korollar 3.2 ist $H_\alpha^h = H^{ac}(B_\alpha) \oplus H^s(B_\alpha)$ dicht in H_β^h , also existieren $x_n = x_n^{ac} + x_n^s$, $x_n^{ac/s} \in H^{ac/s}(B_\alpha) \subset$ $\subset H^{ac/s}(B_\beta)$ mit $x_n^{ac} + x_n^s \to x \in H^{ac}(B_\beta)$ in H_β^h ; also $x_n^s \to 0$ und $x_n^{ac} \to x$. Die Aussage für $H^c(B_\alpha)$ folgt mit $H_\alpha^h = H^c(B_\alpha) \oplus H^p(B_\alpha)$ analog.

Q.E.D.

Bemerkung.

Andererseits ist wegen Satz 3.7 , d.h.

$$B_\alpha = Y_{\alpha,\beta} B_\beta Y_{\alpha,\beta}^{-1} \quad , \quad Y_{\alpha,\beta} = Y_\alpha Y_\beta^{-1}$$

(Y_α, Y_β aus (3.17)) natürlich z.B.

$$Y_{\alpha,\beta} H^{ac}(B_\beta) = H^{ac}(B_\alpha) \subset H^{ac}(B_\beta) \quad ;$$

also läßt $Y_{\alpha,\beta}$ die spektralen Teilräume von B_β invariant. Nun gilt einerseits natürlich

$$H^{ac}(B_\alpha) \subset H^{ac}(B_\beta) \cap H_\alpha^h \quad . \tag{3.20}$$

Sei andererseits $x \in H^{ac}(B_\beta) \cap H_\alpha^h$. $Y_{\alpha,\beta}$ ist beidseitig stetig, also existiert $y = y^{ac} + y^s \in H^{ac}(B_\beta) \oplus H^s(B_\beta) = H_\beta^h$ mit

$$Y_{\alpha,\beta} y^{ac} + Y_{\alpha,\beta} y^s = x \in H^{ac}(B_\beta) \quad ,$$

also $y^s = 0$ und $x \in Y_{\alpha,\beta} H^{ac}(B_\beta) = H^{ac}(B_\alpha)$. Somit gilt für $\alpha \geq \beta$

$$H^{ac}(B_\alpha) = H^{ac}(B_\beta) \cap H_\alpha^h \tag{3.21}$$

(was i.a. nicht aus Korollar 3.9 folgt!). Die entsprechenden Aussagen für $H^{c/p/s}(B_\alpha)$ folgen analog.

§ 4 Streutheorie für die Klein-Gordon-Gleichung

In diesem Abschnitt soll nun der Satz 2.1 auf die Klein-Gordon-Operatoren aus §3 angewendet werden. Um uns das Leben einfacher zu machen, halten wir zunächst fest, daß nach Lemma 3.1b

$$(4.1) \qquad S_{\alpha,h} : L_2^2(\mathbb{R}^n) \to H_\alpha^h \quad , \quad S_{\alpha,h} := \begin{pmatrix} h^{-\alpha} & 0 \\ 0 & h^{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

und

$$(4.2) \qquad S_{\alpha,\varepsilon} : L_2^2(\mathbb{R}^n) \to H_\alpha^\varepsilon \quad , \quad S_{\alpha,\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon^{-\alpha} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

unitär sind; wir können also im folgenden, statt z.B. Operatoren in H_α^h , deren unitäre Transformationen in $L_2^2(\mathbb{R}^n)$ betrachten.

Wir beweisen zunächst einen Existenz- und Vollständigkeitssatz für $\Omega_\pm(B_1,A_1;J_1)$; zum einen, weil fast alle Untersuchungen (bis auf [N1],[N2]) sich ausschließlich mit diesem Fall beschäftigt haben; zum anderen, weil das Ergebnis für $\alpha = 0$ eine einfache Variation davon ist und das für $1 > \alpha > 0$ überhaupt unabhängig von Satz 2.1 folgt.

Im Beweis nachzuprüfen sind die Voraussetzungen von Satz 2.1 ; die meisten Schwierigkeiten bereitet dabei erwartungsgemäß die Konstruktion der $\mathbb{P}_\pm$. Für die Schrödingergleichung wurden diese z.B. in [BSch] konstruiert; wir reduzieren unser Problem auf eine Form, die analog behandelt werden kann. Zwei technische Lemmata - eines unter dem Stichwort „stationäre Phase", eines zur Lokalisation von Fouriertransformierten - werden ausgegliedert und anschließend bewiesen.

Einen kleinen Umweg müssen wir gehen, um die Bedingung (iii) erfüllen zu können: Wir können nicht sofort $J = J_1$ (= Id) wählen, da (vgl. (3.12),(3.13)) mit $D(h^2)$ und $D(\varepsilon^2)$ ja durchaus auch

$D(B_1)$ und $D(A_1)$ eine triviale Schnittmenge haben können. Also zeigen wir zunächst das

Lemma 4.1

V , V_o seien symmetrische, ε-beschränkte Operatoren; es gelte (3.1) für V , und es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$(4.3) \qquad \int_0^\infty \| V\varepsilon^{-k} \chi_{|x|\geq r} \| \, dr < \infty \quad , \quad \int_0^\infty \| V_o \varepsilon^{-k} \chi_{|x|\geq r} \| \, dr < \infty \quad .$$

Definiere

$$\hat{J}_1 : H_1^\varepsilon \to H_1^h \quad , \quad \hat{J}_1 = \begin{pmatrix} h^{-2}\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Dann existieren $\Omega_\pm(B_1, A_1; \hat{J}_1)$ in $B(H_1^\varepsilon, H_1^h)$ und sind partielle Isometrien mit Anfangsbereich H_1^ε und Endbereich $H^{ac}(B_1)$. Das singulär stetige Spektrum von B_1 ist leer, Eigenwerte können sich nur in $\pm m$ häufen, und Eigenwerte in $\mathbb{R}\setminus\{-m,m\}$ haben endliche Vielfachheit. Der Streuoperator $\hat{S}_1 = \Omega_+^{-1}(B_1, A_1; \hat{J}_1)\Omega_-(B_1, A_1; \hat{J}_1)$ ist unitär auf H_1^ε .

Die uns eigentlich interessierende Aussage ist dabei das

Korollar 4.2

Unter den Bedingungen von Lemma 4.1 existieren $\Omega_\pm(1) := \Omega_\pm(B_1, A_1; J_1)$ in $B(H_1^\varepsilon, H_1^h)$ und sind partielle Isometrien mit Anfangsbereich H_1^ε und Endbereich $H^{ac}(B_1)$. Der Streuoperator $S(1) := \Omega_+^{-1}(1)\Omega_-(1)$ ist unitär auf H_1^ε .

Beweis von Korollar 4.2:

Wir brauchen lediglich zu zeigen, daß für ein $z \in \rho(A_1)$ $(\hat{J}_1 - J_1)(A_1 - z)^{-1} \in B_\infty(H_1^\varepsilon, H_1^h)$ gilt; dann ist für $u \in D(A_1)$ und damit für alle $u \in H_1^\varepsilon$

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{itB_1}J_1e^{-itA_1}u$$

$$(4.4)\qquad = \Omega_{\pm}(B_1,A_1;\hat{J}_1)u - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itB_1}(\hat{J}_1-J_1)(A_1-z)^{-1}e^{-itA_1}(A_1-z)u$$

$$= \Omega_{\pm}(B_1,A_1;\hat{J}_1)u \quad ,$$

und alles folgt aus Lemma 4.1 . Es ist

$$(4.5)\qquad A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H}_1^{\varepsilon})$$

- also $0\in\rho(A_1)$ -, denn

$$S_{1,\varepsilon}^{-1}A_1^{-1}S_{1,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4.6)\qquad = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in B(L_2^2(\mathbb{R}^n))$$

(vgl. die Anmerkung nach Satz 3.5). Also muß gezeigt werden, daß in $L_2^2(\mathbb{R}^n)$

$$S_{1,h}^{-1}(\hat{J}_1 - J_1)A_1^{-1}S_{1,\varepsilon}$$

$$(4.7)\qquad = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^{-2}\varepsilon^2-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & h^{-1}-h\varepsilon^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kompakt ist. Aus (3.2),(3.3) folgt mit $u=\varepsilon^{-2}x$, $w = h^{-1}y$ für $x , y \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$(h\varepsilon^{-2}x,y) = [\varepsilon^{-2}x,h^{-1}y]$$

$$= (\varepsilon^{-1}x,\varepsilon h^{-1}y) - (V\varepsilon^{-2}x,Vh^{-1}y) \quad ,$$

also

$$h^{-1} - h\varepsilon^{-2} = (Vh^{-1})*_{V\varepsilon^{-2}} \quad . \tag{4.8}$$

Nun ist aber für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ mit k aus (4.3)

$$V\varepsilon^{-k-1} = V\varepsilon^{-k}(\chi_{|x|\leq r}\varepsilon^{-1}) + (V\varepsilon^{-k}\chi_{|x|\geq r})\varepsilon^{-1} \quad . \tag{4.9}$$

Weil der Integrand in (4.3)

$$\| V\varepsilon^{-k}\chi_{|x|\geq r}\| = \| \chi_{|x|\geq r}(V\varepsilon^{-k})^*\|$$

monoton fallend ist, folgt aus (4.3), daß der zweite Term in (4.9) für $r \to \infty$ in der Norm gegen Null konvergiert, während der erste für alle $r \in \mathbb{R}$ kompakt ist (vgl. [RS III, Th.XI.20]). Also ist $V\varepsilon^{-k-1}$ kompakt; da $V\varepsilon^{-1}$ beschränkt ist, folgt mit [W, Th.9.11b,c], daß $V\varepsilon^{-p}$ kompakt ist für jedes $p > 1$. Also ist $V\varepsilon^{-2}$ kompakt, und mit (4.8) folgt in (4.7) die geforderte Kompaktheit.

Q.E.D.

Beweis von Lemma 4.1:

Wir prüfen die Voraussetzungen von Satz 2.1 nach. Die ersten folgen aus Satz 3.5a,b . Nun betrachten wir $\hat{J}_1$. ε^2 ist unitär von G_1^ε auf G_{-1}^ε , und h^{-2} ist unitär von G_{-1}^h auf G_1^h nach Lemma 3.1b; zusammen mit (3.9) folgt, daß $\hat{J}_1$ beidseitig stetige Bijektion von H_1^ε auf H_1^h ist, die obendrein $D(A_1) = G_2^\varepsilon \times G_1^\varepsilon$ in $D(B_1)$ überführt: $G_2^h = h^{-2}G_o^h = h^{-2}G_o^\varepsilon = h^{-2}\varepsilon^2 G_2^\varepsilon$.

Als nächstes zeigen wir, daß (i) erfüllt ist. Dazu langt es zu zeigen, daß $0 \in \rho(B_1)$ ($0 \in \rho(A_1)$ hatten wir schon bei (4.5) nachgeprüft) und

$$(4.10) \qquad \hat{J}_1^{-1} B_1^{-1} \hat{J}_1 - A_1^{-1} \in B_\infty(H_1^\varepsilon) \quad ,$$

denn dann ist

$$\hat{J}_1^{-1}(B_1 \pm i)^{-1}\hat{J}_1^{-1} - (A_1 \pm i)^{-1}$$

$$= \hat{J}_1^{-1}(B_1 \pm i)^{-1} B_1 \hat{J}_1 [\hat{J}_1^{-1} B_1^{-1} \hat{J}_1 - A_1^{-1}] A_1 (A_1 \pm i)^{-1}$$

und $(B_1 \pm i)^{-1} B_1$ sowie $A_1(A_1 \pm i)^{-1}$ sind beschränkt. Wie bei (4.5),(4.6) rechnet man nach, daß

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2h^{-2}V_o & h^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in B(H_1^h)$$

gilt, weil

$$S_{1,h}^{-1} B_1^{-1} S_{1,h} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2h^{-2}V_o & h^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2h^{-1}V_o h^{-1} & h^{-1} \\ h^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in B(L_2^2(\mathbb{R}^n)) \quad ;$$

nun ist

$$\hat{J}_1^{-1} B_1^{-1} \hat{J}_1 - A_1^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^{-2}h^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2h^{-2}V_o & h^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^{-2}\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\varepsilon^{-2}V_o h^{-2}\varepsilon^2 & 0 \\ h^{-2}\varepsilon^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und in $L_2^2(\mathbb{R}^n)$

$$S_{1,\varepsilon}^{-1}[\hat{J}_1^{-1}B_1^{-1}\hat{J}_1 - A_1^{-1}]S_{1,\varepsilon}$$

(4.11)
$$= \begin{pmatrix} -2\varepsilon^{-1}V_o h^{-2}\varepsilon & 0 \\ h^{-2}\varepsilon - \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix} .$$

Für den Term oben links ergibt sich

$$\varepsilon^{-1}V_o h^{-2}\varepsilon = \varepsilon^{-1}V_o\varepsilon^{-1}(\varepsilon h^{-1})(h^{-1}\varepsilon) \quad ;$$

wie im Beweis von Korollar 4.2 ist $V_o\varepsilon^{-2}$ und damit auch $(V_o\varepsilon^{-2})^* = \overline{\varepsilon^{-2}V_o}$ kompakt. Die Interpolationstheorie liefert, daß dann auch (s. [Kk Lemma 4.2])

(4.12)
$$\varepsilon^{-1}V_o\varepsilon^{-1} \in B_\infty(L_2(\mathbb{R}^n)) \quad ,$$

also ist der Term oben links kompakt. Für den Term unten links gilt

$$(h^{-2}\varepsilon - \varepsilon^{-1})^* = \varepsilon h^{-2} - \varepsilon^{-1} = \varepsilon h^{-1}(h^{-1} - h\varepsilon^{-2}) \quad ,$$

was nach (4.8) und (4.9) ebenfalls kompakt ist. Damit ist (i) gezeigt.

Nun definieren wir

(4.13)
$$Z := \{-m , m\}$$

und

(4.14)
$$Q_t := S_{1,\varepsilon}\chi_{|x|\leq At}S_{1,\varepsilon}^{-1}$$

mit noch zu bestimmendem $A = A(\varphi) > 0$; damit ist (ii) erfüllt.

Weiter setzen wir

$$\psi(z) := z^k$$

(mit dem k aus (4.3)); also ist nach (4.5) $\psi(A_1)^{-1} = A_1^{-k} \in B(H_1^\varepsilon)$ und, in $L_2^2(\mathbb{R}^n)$,

$$S_{1,h}^{-1}(B_1\hat{J}_1 - \hat{J}_1A_1)A_1^{-k}S_{1,\varepsilon} = S_{1,h}^{-1}(B_1\hat{J}_1 - \hat{J}_1A_1)S_{1,\varepsilon}\hat{A}^{-k}$$

mit

$$\hat{A} = S_{1,\varepsilon}^{-1}A_1S_{1,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} ,$$

(4.15)

$$D(\hat{A}) = S_{1,\varepsilon}^{-1}D(A_1) = [D(\varepsilon)]^2 \quad \text{in} \quad L_2^2(\mathbb{R}^n) .$$

Also erhalten wir weiter

$$S_{1,h}^{-1}(B_1\hat{J}_1 - \hat{J}_1A_1)A_1^{-k}S_{1,\varepsilon} =$$

$$= \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h^2 & 2V_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^{-2}\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h^{-2}\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}\right] X$$

$$X \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-k} \\ \varepsilon^{-k} & 0 \end{pmatrix}$$

(4.16)

$$= \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1-h^{-2}\varepsilon^2 \\ 0 & 2V_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-k} \\ \varepsilon^{-k} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & h-h^{-1}\varepsilon^2 \\ 0 & 2V_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-k} \\ \varepsilon^{-k} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(Vh^{-1})^*V\varepsilon^{-k} & 0 \\ 2V_0\varepsilon^{-k} & 0 \end{pmatrix} \in B(L_2^2(\mathbb{R}^n)) ,$$

wobei zuletzt (4.8) ausgenutzt wurde. Für (iii) ist jetzt noch zu zeigen

$$\int_0^\infty \| (B_1 \hat{J}_1 - \hat{J}_1 A_1) A_1^{-k} (1 - Q_t) \| dt \quad < \infty$$

oder, äquivalent, in $B(L_2^2(\mathbb{R}^n))$

$$\int_0^\infty \| S_{1,h}^{-1} (B_1 \hat{J}_1 - \hat{J}_1 A_1) A_1^{-k} S_{1,\varepsilon} \chi_{|x| \geq At} S_{1,\varepsilon}^{-1} S_{1,\varepsilon} \| dt \quad < \infty \quad ,$$

also nach (4.16)

$$\int_0^\infty \left\| \begin{pmatrix} -(Vh^{-1})^* V\varepsilon^{-k} & 0 \\ 2V_0 \varepsilon^{-k} & 0 \end{pmatrix} \chi_{|x| \geq At} \right\| dt < \infty \quad ,$$

was nach (4.3) erfüllt ist.

Damit haben wir bereits alles erledigt, was mit dem gestörten Klein-Gordon-Operator B_1 zu tun hat, und müssen nun noch $\mathbb{P}_\pm$ finden, die (iv) und (v) (zunächst für $\psi_0 = 1$) erfüllen. Wir setzen an

$$\mathbb{P}_\pm = S_{1,\varepsilon} P_\pm^0 S_{1,\varepsilon}^{-1} \tag{4.17}$$

und haben für (v) in $L_2^2(\mathbb{R}^n))$ zu betrachten

$$\begin{aligned} & \| S_{1,\varepsilon} Q_t e^{\mp itA_1} \varphi(A_1) \mathbb{P}_\pm S_{1,\varepsilon} \| \\ &= \| \chi_{|x| \leq At} S_{1,\varepsilon}^{-1} e^{\mp itA_1} \varphi(A_1) S_{1,\varepsilon} P_\pm^0 \| \qquad (4.18) \\ &= \| \chi_{|x| \leq At} e^{\mp it\hat{A}} \varphi(\hat{A}) P_\pm^0 \| \end{aligned}$$

mit $\hat{A}$ aus (4.15) Nun ist für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $E(\lambda)$ die Spektralschar von $\hat{A}$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\hat{A}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,dE(\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} \tilde{\varphi}(s)\,ds\,dE(\lambda) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\,dE(\lambda)\,ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\hat{A}} \tilde{\varphi}(s)\,ds
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

und

$$
e^{it\hat{A}} = \begin{pmatrix} \cos t\varepsilon & i \sin t\varepsilon \\ i \sin t\varepsilon & \cos t\varepsilon \end{pmatrix} ,
$$

also

$$
e^{\mp it\hat{A}} \varphi(\hat{A}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \cos (s \mp t)\varepsilon & i \sin (s \mp t)\varepsilon \\ i \sin (s \mp t)\varepsilon & \cos (s \mp t)\varepsilon \end{pmatrix} \tilde{\varphi}(s)\,ds \quad . \tag{4.20}
$$

Die Matrix im Integranden multiplizieren wir von links und rechts mit

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

und erhalten

$$
\begin{pmatrix} \cos (s \mp t)\varepsilon & i \sin (s \mp t)\varepsilon \\ i \sin (s \mp t)\varepsilon & \cos (s \mp t)\varepsilon \end{pmatrix} =
$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} \cos(s\bar{+}t)\varepsilon + i\sin(s\bar{+}t)\varepsilon & 0 \\ 0 & \cos(s\bar{+}t)\varepsilon - i\sin(s\bar{+}t)\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i(s\bar{+}t)\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{i(-s\underline{+}t)\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

also wird aus (4.20) mit (4.19)

$$e^{\bar{+}it\hat{A}}\varphi(\hat{A})$$

$$(4.21) \quad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{i(s\bar{+}t)\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{i(-s\underline{+}t)\varepsilon} \end{pmatrix} \tilde{\varphi}(s)ds \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\bar{+}it\varepsilon}\varphi(\varepsilon) & 0 \\ 0 & e^{\underline{+}it\varepsilon}\varphi(-\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wenn wir nun ansetzen

$$(4.22) \qquad P^{o}_{\underline{+}} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P_{\underline{+}} + P_{\bar{+}} & P_{\underline{+}} - P_{\bar{+}} \\ P_{\underline{+}} - P_{\bar{+}} & P_{\underline{+}} + P_{\bar{+}} \end{pmatrix}$$

und zu (4.18) zurückgehen, erhalten wir mit (4.21) und (4.22)

$$\chi_{|x|\leq At}\, e^{\bar{+}it\hat{A}}\varphi(\hat{A})P^{o}_{\underline{+}}$$

$$(4.23) \quad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \chi_{|x|\leq At} \begin{pmatrix} e^{\bar{+}it\varepsilon}\varphi(\varepsilon)P_{\underline{+}} & e^{\bar{+}it\varepsilon}\varphi(\varepsilon)P_{\underline{+}} \\ -e^{\underline{+}it\varepsilon}\varphi(-\varepsilon)P_{\bar{+}} & e^{\underline{+}it\varepsilon}\varphi(-\varepsilon)P_{\bar{+}} \end{pmatrix}.$$

Zu finden sind also nun

$$P_{\pm} \in B(L_2(\mathbb{R}^n))$$

mit

$$P_+ + P_- = 1 \quad , \quad \overline{R(P_{\pm})} = L_2(\mathbb{R}^n) \tag{4.24}$$

und

$$\| \chi_{|x| \le At} \, e^{\mp it\varepsilon} \varphi(\alpha\varepsilon) P_{\pm} \| \le c(1+t)^{-1-\delta} \quad ,$$
$$t \ge 0 \ , \ A = A(\varphi) > 0 \ , \ c = c(\varphi) \ , \ \delta > 0 \ , \ \alpha = \pm 1 \ . \tag{4.25}$$

Wenn dann $\mathbb{P}_{\pm}$ durch (4.17) und (4.22) definiert ist, folgt aus (4.25) (v) nach der soeben durchgeführten Konstruktion, und aus (4.24) folgt automatisch (iv) : $\mathbb{P}_+ + \mathbb{P}_- = 1$ ist klar, und $\overline{R(\mathbb{P}_{\pm})} = H_1^{\varepsilon}$ folgt aus (4.17) und (4.22) in der Form

$$P_{\pm}^{0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\pm} & 0 \\ 0 & P_{\mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Nun konstruieren wir $P_{\pm}$ analog zu der entsprechenden Zerlegung der Eins bei der Schrödingergleichung, die z.B. in [BSch] dargestellt wurde - mit einer leichten Modifikation, auf die später eingegangen wird.

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(p)|^2 dp = \int_0^{\infty} d\lambda \int_{|p|=\lambda} |\tilde{u}(p)|^2 dS$$
$$= \int_0^{\infty} d\lambda \, \lambda^{n-1} \int_{|\omega|=1} |\tilde{u}(\lambda\omega)|^2 d\omega$$

ist

$$U : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}_+) \otimes L_2(S_1^n) \qquad *)$$

(4.26)

$$Uu = \hat{u} \quad , \quad \hat{u}(r,\omega) = r^{(n-1)/2}\tilde{u}(r\omega)$$

ein unitärer Isomorphismus.

Nun sei

(4.27) $\Pi_+ := \chi_{x\geq 0}$ in $L_2(\mathbb{R})$,

(4.28) $\Pi_- := 1 - \Pi_+$,

(4.29) F_o die Fouriertransformation in $L_2(\mathbb{R})$,

(4.30) J_+ die kanonische Einbettung von $L_2(\mathbb{R}_+)$ in $L_2(\mathbb{R})$, also

(4.31) J_+^* die kanonische Einschränkung von $L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R}_+)$;

(4.32) $P_{\pm} := J_+^* F_o^{-1} \Pi_{\pm} F_o J_+$,

(4.33) $\hat{P}_{\pm} := P_{\pm} \otimes 1$ in $L_2(\mathbb{R}_+) \otimes L_2(S_1^n)$

und schließlich

(4.34) $P_{\pm} := U^{-1}\hat{P}_{\pm}U$.

Nun müssen (4.24) und (4.25) nachgeprüft werden; zunächst (4.25). Es ist

(4.35) $$\varphi(\varepsilon) = F^{-1}\boldsymbol{\varphi}(\sqrt{p^2+m^2})F \quad ,$$

---

*) S_1^n ist die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$.

also

$$[\, e^{\mp it\varepsilon}\varphi(\alpha\varepsilon)\, g\,](x)$$

$$(4.36) \quad = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixp\mp it\sqrt{p^2+m^2}}\varphi(\alpha\sqrt{p^2+m^2})\tilde{g}(p)\,dp$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{S_1^n} d\omega \int_0^\infty dr\, r^{n-1}\, e^{irx\omega\mp it\sqrt{r^2+m^2}}\varphi(\alpha\sqrt{r^2+m^2})\tilde{g}(r\omega) \quad .$$

Sei nun $h \in L_2(\mathbb{R}^n)$,

$$(4.37) \qquad f_{\mp} := (\Pi_{\mp} F_o J_+ \otimes 1)\,\hat{h} \quad ,$$

$$(4.38) \qquad \hat{g}_{\mp} := (J_+^* F_o^{-1} \otimes 1)\, f_{\mp} \quad ,$$

also

$$(4.39) \qquad \hat{g}_{\mp} = \hat{P}_{\mp}\hat{h} \quad ,$$

d.h.

$$(4.40) \qquad g_{\mp} = P_{\mp} h \quad .$$

Nach (4.38) , (4.37) ist

$$\hat{g}_{\mp}(r,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_{\mp}} e^{ir\rho} f_{\mp}(\rho,\omega)\,d\rho$$

also nach (4.26)

$$\tilde{g}_{\pm}(r\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{(1-n)/2} \int_{\mathbb{R}_{\mp}} e^{ir\rho} f_{\pm}(\rho,\omega)\, d\rho$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{(1-n)/2} \int_0^{\infty} d\rho\, e^{\mp ir\rho} f_{\pm}(\mp\rho,\omega) \quad ,$$

und (4.36) wird zu

$$[e^{\mp it\varepsilon\varphi(\alpha\varepsilon)} g_{\pm}](x)$$

(4.41)

$$= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{S_1^n} d\omega \int_0^{\infty} d\rho\, f_{\pm}(\mp\rho,\omega)\, I_{\pm}(\rho,\omega,t,x,\alpha,\varphi) \quad ,$$

(4.42) $$I_{\pm}(\rho,\omega,t,x,\alpha,\varphi) := \int_0^{\infty} dr\, r^{(n-1)/2} e^{irx\omega \mp it\sqrt{r^2+m^2} \mp ir\rho\varphi(\alpha\sqrt{r^2+m^2})}.$$

(4.42) wird im später folgenden Lemma 4.3 abgeschätzt; mit dessen Hilfe und der Schwarzschen Ungleichung folgt aus (4.41) für $|x| \le At$, $k \in \mathbb{N}$

$$|[e^{\mp it\varepsilon\varphi(\alpha\varepsilon)} g_{\pm}](x)|$$

$$\le c_{k,o} \int_{S_1^n} d\omega \left(\int_0^{\infty} |f_{\pm}(\mp\rho,\omega)|^2 d\rho \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} (1+\rho+t)^{-2k} d\rho \right)^{1/2}$$

und weiter

(4.43) $$|[e^{\mp it\varepsilon\varphi(\alpha\varepsilon)} g_{\pm}](x)|^2 \le c_{k,1} (1+t)^{1-2k} \int_{S_1^n} d\omega \int_0^{\infty} |f_{\pm}(\mp\rho,\omega)|^2 d\rho \quad .$$

Wegen (4.37) ist für alle $\omega \in S_1^n$

$$\int_0^\infty |f_{\pm}(\mp\rho,\omega)|^2 d\rho \le \int_0^\infty |\hat{h}(\rho,\omega)|^2 d\rho \quad ,$$

also auch

$$\int_{S_1^n} d\omega \int_0^\infty d\rho |f_{\pm}(\mp\rho,\omega)|^2 \le \|\hat{h}\|^2 = \|h\|^2 \quad .$$

Damit und mit (4.40) wird (4.43) für $|x| \le At$, $k \in \mathbb{N}$, $h \in L_2(\mathbb{R}^n)$ beliebig zu

$$|[e^{\mp it\varepsilon}\varphi(\alpha\varepsilon)P_{\pm}h](x)|^2 \le c_{k,1}(1+t)^{1-2k}\|h\|^2 \quad ,$$

also

$$\|\chi_{|x|\le At}\, e^{\mp it\varepsilon}\varphi(\alpha\varepsilon)P_{\pm}\| \le c_{k,2}(1+t)^{(n+1-2k)/2} \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Daraus folgt (4.25) und damit (v) für $\psi_o = 1$. Für $\psi_o = \psi$ setzen wir $\varphi_1 := \psi\varphi$; es ist $\varphi_1 \in C_o^\infty(\mathbb{R}\backslash Z)$ mit $\operatorname{supp}\varphi_1 \subset \operatorname{supp}\varphi$. Deswegen können wir $A(\varphi_1) = A(\varphi)$ wählen (vgl. Lemma 4.3) und erhalten lediglich neue Konstanten $c_{k,i}$ bzw. c in (v) . (v) kann also simultan für $\psi_o = 1$ bzw. $\psi_o = \psi$ erfüllt werden.

Zu zeigen ist nun noch (4.24). $P_+ + P_- = 1$ ist klar wegen $P_+ + P_- = 1$ in $L_2(\mathbb{R}_+)$; für $\overline{R(P_{\pm})} = L_2(\mathbb{R}^n)$ langt es, $\operatorname{Ker} P_{\pm} = \{0\}$ zu zeigen ($P_{\pm}$ ist selbstadjungiert !). Sei z.B.

$$J_+^* F_o^{-1} \Pi_- F_o J_+ g = 0 \quad ,$$

$$\Pi_- F_o J_+ g =: h \quad ;$$

damit verschwinden h und $F_o^{-1}h$ auf $\mathbb{R}_+$ identisch, und nach (dem später bewiesenen) Lemma 4.4 muß $h = 0$ sein, also

$$\Pi_- F_o J_+ g = 0 \quad ,$$

$$J_+ g =: j \quad ;$$

damit verschwinden j und $F_o j$ auf $\mathbb{R}_-$ identisch, also wie oben $j = 0$ und damit $g = 0$. P_- wird entsprechend behandelt. Damit ist (4.24), also für $\mathbb{P}_\pm$ (v) gezeigt und alle Voraussetzungen von Satz 2.1 liegen vor.

Damit sind alle Aussagen von Lemma 4.1 bewiesen bis auf die partielle Isometrie der Wellenoperatoren; die folgt aus [RS III, XI.3, Proposition 5d], wenn

$$\underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}} \; (\hat{J}_1^* \hat{J}_1 - 1) e^{-itA_1} = 0 \quad ;$$

dazu (vgl. den Beweis von Korollar 4.2) weisen wir nach, daß $(\hat{J}_1^* \hat{J}_1 - 1) A_1^{-1} \in B_\infty(\mathcal{H}_1^\varepsilon)$ gilt. Es ist

$$\hat{J}_1^* = S_{1,\varepsilon} (S_{1,h}^{-1} \hat{J}_1 S_{1,\varepsilon})^* S_{1,h}^{-1} \tag{4.44}$$

und (vgl. (4.15))

$$S_{1,\varepsilon}^{-1} A_1^{-1} S_{1,\varepsilon} = \hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{4.45}$$

also

$$S_{1,\varepsilon}^{-1} (\hat{J}_1^* \hat{J}_1 - 1) A_1^{-1} S_{1,\varepsilon} = [(S_{1,h}^{-1} \hat{J}_1 S_{1,\varepsilon})^* S_{1,h}^{-1} \hat{J}_1 S_{1,\varepsilon} - 1] \hat{A}^{-1} \quad ; \tag{4.46}$$

dabei ist

$$S_{1,h}^{-1}\hat{J}_1 S_{1,\varepsilon} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^{-2}\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{-1}\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$S_{1,\varepsilon}^{-1}(\hat{J}_1^*\hat{J}_1 - 1)A_1^{-1}S_{1,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon(h^{-2} - \varepsilon^{-2}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon h^{-1}(h^{-1} - h\varepsilon^{-2}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und das ist kompakt, wie wir schon bei (4.8) untersucht hatten. Damit ist der Beweis von Lemma 4.1 abgeschlossen.

Q.E.D.

Bemerkung.

Das in (4.26) gewählte U (und damit $P_{\pm}$) entspricht nicht ganz dem von Jafajew in [BSch]. Dort war

$$Uu = \hat{u}$$

mit

$$\hat{u}(\lambda,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\lambda^{(n-2)/4}\,\tilde{u}(\sqrt{\lambda}\omega)$$

und damit

$$(4.47)\qquad (UH_oU^{-1}\hat{u})(\lambda,\omega) = \lambda\hat{u}(\lambda,\omega)\quad,\quad H_o = F^{-1}p^2F\qquad.$$

Mit diesem U wäre

$$U\varepsilon U^{-1}\hat{u} = \sqrt{\lambda + m^2}\;\hat{u}\quad,$$

was unschön aussieht, aber - was hier nicht vorgeführt werden soll - genauso funktionieren würde. Mit unserem U aus (4.26) ist

$$U\varepsilon U^{-1}\,\hat{u} = \sqrt{\lambda^2 + m^2}\,\hat{u}$$

und

$$UH_oU^{-1}\,\hat{u} = \lambda^2\,\hat{u} \qquad . \tag{4.48}$$

Die Erklärung für diesen Umstand liegt darin begründet, daß bei der Jafajewschen Streutheorie für die Schrödingergleichung ein- und auslaufende Zustände *) erst durch eine künstliche Verdoppelung des Raumes konstruiert werden mußten; (4.47) schuf diese Verdoppelung, indem der positive Operator p^2 als Einschränkung des Multiplikationsoperators λ aufgefaßt wurde ((4.48) würde das nicht leisten!). Bei der Klein-Gordon-Gleichung ist das nicht nötig, da der entsprechende Operator nicht definit ist; die Trennung nach ein- und auslaufenden Zuständen steckt - in welcher Form auch immer - z.B. in dem $\alpha = \pm 1$ in (4.21).

Es wäre also interessant zu wissen, ob wir bei der Konstruktion der $\mathbb{P}_\pm$ möglicherweise zuviel Arbeit in Kauf genommen haben, um uns an der Analogie zum Schrödingerfall entlanghangeln zu können. Da aber diese Untersuchung nur dieses eine Mal geleistet werden mußte - die Fälle $0 \le \alpha < 1$ stellen, wie wir noch sehen werden, keine neuen Probleme - und eine einfachere Zerlegung sich nicht unmittelbar aufdrängt, wollen wir es dabei bewenden lassen.

Jedenfalls ist diese Frage unabhängig von der nach der Menge der möglichen Zerlegungen im Schrödingerfall; vgl. dazu [P] und vor allem [G].

Bevor wir die zu Lemma 4.1 analogen Aussagen für den Fall $\alpha = 0$ machen, wollen wir die beiden fehlenden Lemmata beweisen.

---

*) Hier im mathematischen Sinne nach Lax-Phillips; s. [P, S.79f.].

Lemma 4.3

Sei $I_{\pm}$ durch (4.42) gegeben; zu $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}\backslash\{-m,m\})$ existiert ein $A = A(\operatorname{supp}\varphi) > 0$, so daß für $\alpha = \pm 1$, $t > 0$, $|\omega| = 1$, $|x| \le At$, $\rho > 0$, $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|I_{\pm}(\rho,\omega,t,x,\alpha,\varphi)| \le c_k (1+t+\rho)^{-k} \quad ,$$

wobei c_k nur von k und φ abhängt.

Beweis:

Es ist

$$I_{\pm}(\rho,\omega,t,x,\alpha,\varphi) = \int_0^\infty dr\, \Phi(r)\, e^{i(\rho+t)f(r)} \quad ,$$

wobei

$$\Phi(r) := \begin{cases} r^{(n-1)/2}\varphi(\alpha\sqrt{r^2+m^2}) & , \ r \ge 0 \\ 0 & , \ r < 0 \end{cases}$$

und

$$f(r) = f_{x,t,\rho,\omega}(r) = \frac{1}{t+\rho}(rx\omega \mp (t\sqrt{r^2+m^2} + r\rho)) \quad .$$

Zu $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}\backslash\{-m,m\})$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\{x : |x^2-m^2| < \delta^2\} \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset \quad .$$

Damit ist $\operatorname{supp}\Phi \ge \delta$ und $\Phi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$. Wähle $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta$,

$$A := A(\operatorname{supp}\varphi) := \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2+m^2}}$$

und betrachte $f_{x,t,\rho,\omega}$ als Funktion aus $C^k(\delta_1 , 1+\max\operatorname{supp}\Phi)$,

$k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Für $t > 0$, $|x| \leq At$, $\rho > 0$, $|\omega| = 1$ gilt dann

$$f_{x,t,\rho,\omega} \in \mathcal{M} := \{f_{a,b} \in C^k(\delta_1, 1+\max \operatorname{supp} \Phi) :$$

$$f_{a,b}(r) = ar \mp (b\sqrt{r^2+m^2} + (1-b)r) \ , \ 0 \leq b \leq 1 \ , \ |a| \leq Ab\}$$

und $\mathcal{M}$ ist eine kompakte Teilmenge von $C^k(\delta_1, 1 + \max \operatorname{supp} \Phi)$ mit

$$\frac{df_{a,b}}{dr}(r) = a \mp \left(\frac{br}{\sqrt{r^2+m^2}} + 1 - b\right) \neq 0$$

für alle $f_{a,b} \in \mathcal{M}$, $r \in [\delta_2, \frac{1}{2} + \max \operatorname{supp} \Phi]$ wegen

$$\frac{br}{\sqrt{r^2+m^2}} + 1 - b > bA \geq |a|$$

für $0 < b \leq 1$, $r \geq \delta_2 > \delta_1$, bzw.

$$\frac{br}{\sqrt{r^2+m^2}} + 1 - b = 1 > |a|$$

für $b = 0$, also auch $a = 0$. Nach z.B. [RS III, Th.XI.14] existieren dann c_k mit

$$|I_{\pm}(\rho,\omega,t,x,\alpha,\varphi)| \leq c_k(1 + t + \rho)^{-k} \quad \text{für} \quad t > 0 \ , \ \rho > 0 \ , \ |x| \leq At,$$

wobei c_k nur noch von k und φ sowie - zunächst - α und dem Vorzeichen $\pm$ abhängt. Da die letzten beiden Parameter nur vier verschiedene Fälle liefern und A nur von $\operatorname{supp} \varphi$ abhängt und weil $k \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt die Behauptung des Lemmas.

Q.E.D.

Lemma 4.4

Sei $f \in L_2(\mathbb{R})$. Wenn f auf einer Halbachse und $\tilde{f}$ auf einem offenen Intervall verschwindet, ist $f \equiv 0$.

Beweis:

Sei z.B. $f(x) = 0$, $x < 0$. Definiere für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}_-$

$$F(\lambda + i\eta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} e^{\eta x} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-i\lambda x} e^{\eta x} f(x)\,dx \quad .$$

Nach Paley-Wiener (s. [RS II, Notes IX.3]) gilt dann

(i) F ist holomorph in der unteren Halbebene;

(ii) Für $F_\eta(\lambda) := F(\lambda+i\eta)$ gilt $\sup_{\eta<0} \|F_\eta\| = M < \infty$;

(iii) $\|F_\eta - \tilde{f}\| \to 0$, $\eta \to 0$.

Nun sei $\tilde{f} = 0$ in einem offenen Intervall (a,b) . Definiere $\varepsilon_0 := (b-a)/3$, $I := (a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0)$ und für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $x+iy$ aus der unteren Halbebene

$$g_\varepsilon(x+iy) := \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F(x+iy+t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_y(x+t)\,dt \quad .$$

Wegen (i) ist auch g_ε holomorph in der unteren Halbebene, und wir zeigen, daß sich g_ε auf I stetig durch 0 ergänzen läßt: Mit $x_0 \in I$, $|x-x_0| < \delta$ gilt

$$g_\varepsilon(x+iy)$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[F_y(x+t) - F_y(x_o+t)]dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[F_y(x_o+t) - \tilde{f}(x_o+t)]dt$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\Big[\int_{-\varepsilon+x-x_+}^{\varepsilon+x-x_o} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big]F_y(x_o+t)dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[F_y(x_o+t) - \tilde{f}(x_o+t)]dt$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\Big[\int_{-\varepsilon+x-x_o}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+x-x_o}\Big]F_y(x_o+t)dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[F_y(x_o+t) - \tilde{f}(x_o+t)]dt$$

und mit der Schwarzschen Ungleichung

$$|g_\varepsilon(x+iy)| \le \frac{2}{2\varepsilon}\sqrt{\delta}\,\|F_y\| + \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{2\varepsilon}\,\|F_y - \tilde{f}\|$$

$$\le \frac{M}{\varepsilon}\sqrt{\delta} + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\|F_y - f\| \to 0$$

für $\delta \to 0$, $y \to 0$ wegen (ii) und (iii) . Also läßt sich auf g_ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$, der Standardspiegelungssatz der Funktionentheorie anwenden; die holomorphe Erweiterung von g_ε auf $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\setminus I)$ verschwindet auf I , also überall; mit $\varepsilon \to 0$ erhält man $F \equiv 0$ und wegen (iii) $\tilde{f} \equiv 0$, also $f \equiv 0$.

Q.E.D.

Nun soll das Lemma 4.1 und Korollar 4.2 entsprechende Ergebnis für das andere Ende der Skala der Najmanschen Operatoren ($\alpha = 0$) bewiesen werden; wir kommen dabei mit den gleichen Voraussetzungen aus und wenden die gleichen Techniken an.

Lemma 4.5

Unter den Bedingungen von Lemma 4.1 existieren $\Omega_{\pm}(\tilde{B},A_o;J_o)$ in $B(H_o^{\varepsilon},H_o^h)$ und sind partielle Isometrien mit Anfangsbereich H_o^{ε} und Endbereich $H^{ac}(\tilde{B})$. Das singulär stetige Spektrum von $\tilde{B}$ ist leer, Eigenwerte können sich nur in $\pm m$ häufen, und Eigenwerte in $\mathbb{R}\setminus\{-m,m\}$ haben endliche Vielfachheit. Der Streuoperator $\tilde{S} = \Omega_+^{-1}(\tilde{B},A_o;J_o)\Omega_-(\tilde{B},A_o;J_o)$ ist unitär auf H_o^{ε} .

Wie bei $\alpha = 1$ interessiert uns dabei wiederum hauptsächlich das

Korollar 4.6

Unter den Bedingungen von Lemma 4.1 existieren $\Omega_{\pm}(0) := \Omega_{\pm}(B_o,A_o;J_o)$ in $B(H_o^{\varepsilon},H_o^h)$ und sind vollständig; der Streuoperator $S(0) = \Omega_+^{-1}(0)\Omega_-(0)$ ist unitär auf H_o^{ε} .

Beweis von Korollar 4.6:

Zunächst halten wir wieder fest, daß $0 \in \rho(A_o)$ mit

$$A_o^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{4.49}$$

denn

$$S_{o,\varepsilon}^{-1} A_o^{-1} S_{o,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in B(L_2^2(\mathbb{R}^n)) \quad .$$

Nun ist

$$\Omega_{\pm}(0) = S^{-1}\Omega_{\pm}(\tilde{B},A_o;SJ_o) \quad , \tag{4.50}$$

wenn die rechte Seite existiert; wegen

$$S_{o,h}^{-1}(SJ_o - J_o)A_o^{-1}S_{o,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2V_o & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2h^{-1}V_o\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2(h^{-1}\varepsilon)\varepsilon^{-1}V_o\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

und (4.12) ist aber $(SJ_o - J_o)A_o^{-1} \in B_\infty(\mathcal{H}_o^\varepsilon, \mathcal{H}_o^h)$, also folgt wie im Beweis von Korollar 4.2

$$\Omega_\pm(\tilde{B}, A_o; SJ_o) = \Omega_\pm(\tilde{B}, A_o; J_o) \quad . \tag{4.51}$$

Mit (4.51) und (4.50) folgen alle Behauptungen des Korollars aus Lemma 4.5 .

Q.E.D.

Bemerkung: Man beachte, daß wegen (4.50) und (4.51) $\Omega_\pm(0)$ im allgemeinen keine partiellen Isometrien sind.

Beweis von Lemma 4.5:

Wir prüfen wieder die Voraussetzungen von Satz 2.1 nach. Der langwierigste Teil läßt sich diesmal schnell erledigen, indem wir uns an den Beweis von Lemma 4.1 halten: Z bleibt unverändert, und statt (4.14) und (4.17) definieren wir

$$Q_t := S_{o,\varepsilon}\chi_{|x|\le At}S_{o,\varepsilon}^{-1} \quad , \tag{4.52}$$

$$\mathbb{P}_\pm := S_{o,\varepsilon}P_\pm^o S_{o,\varepsilon}^{-1} \quad . \tag{4.53}$$

Der Nachweis von (iv) und (v) kann dann unverändert aus dem Beweis von Lemma 4.1 übernommen werden, wenn wir noch beachten, daß bei (4.15)

$$S_{o,\varepsilon}^{-1}A_o S_{o,\varepsilon} = \hat{A} = S_{1,\varepsilon}^{-1}A_1 S_{1,\varepsilon}$$

gilt; (ii) gilt mit (4.52) ebenfalls.

Nachzuprüfen sind also noch (i) und (iii). (Die vorher in Satz 2.1 genannten Voraussetzungen folgen wieder aus Satz 3.5 und (3.11).)

Zunächst zu (i) : Es ist $0 \in \rho(\tilde{B})$ mit

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & h^{-2} \\ 1 & -2V_0 h^{-2} \end{pmatrix} \in B(H_0^h)$$

wegen

$$S_{0,h}^{-1}\tilde{B}^{-1}S_{0,h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & h^{-2} \\ 1 & -2V_0 h^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & h^{-1} \\ h^{-1} & -2h^{-1}V_0 h^{-1} \end{pmatrix} \in B(L_2^2(\mathbb{R}^n)) \quad ;$$

also brauchen wir ($0 \in \rho(A_0)$ war im Beweis von Korollar 4.6 gezeigt worden) für (i) wie beim Beweis von Lemma 4.1 nur zu zeigen, daß

$$J_0^{-1}\tilde{B}^{-1}J_0 - A_0^{-1} \in B_\infty(H_0^\varepsilon)$$

oder, äquivalent, daß in $L_2^2(\mathbb{R}^n))$

$$S_{0,\varepsilon}^{-1}(J_0^{-1}\tilde{B}^{-1}J_0 - A_0^{-1})S_{0,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & h^{-2}-\varepsilon^{-2} \\ 0 & -2V_0 h^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & h^{-2}\varepsilon - \varepsilon^{-1} \\ 0 & -2\varepsilon^{-1}V_0 h^{-2}\varepsilon \end{pmatrix}$$

kompakt ist. Die Kompaktheit dieser Terme hatten wir aber schon für (4.11) gezeigt.

Nun zu (iii). Anders als im Fall $\alpha = 1$ haben wir mit den Definitionsgebieten kein Problem; aus (3.9) folgt $J_o D(A_o) = D(A_o) = D(B_o) = D(\tilde{B})$. Wir definieren wieder

$$\psi(z) := z^k$$

(also wieder $\psi(A_o)^{-1} = A_o^{-k} \in B(\mathcal{H}_o^\varepsilon)$, wie oben gesehen) und berechnen in $L_2^2(\mathbb{R}^n)$

$$S_{o,h}^{-1}(\tilde{B}J_o - J_oA_o)A_o^{-k}S_{o,\varepsilon} = S_{o,h}^{-1}(\tilde{B}J_o - J_oA_o)S_{o,\varepsilon}\hat{A}^{-k}$$

$$(4.54) \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2V_o & 0 \\ h^2-\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-k} \\ \varepsilon^{-k} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2V_o & 0 \\ h-h^{-1}\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-k} \\ \varepsilon^{-k} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2V_o\varepsilon^{-k} \\ 0 & -(Vh^{-1})^*V\varepsilon^{-k} \end{pmatrix} \in B(L_2^2(\mathbb{R}^n))$$

wie bei (4.16). Weiter ist für (iii) jetzt noch zu zeigen, daß - in $B(L_2^2(\mathbb{R}^n))$ -

$$\int_0^\infty \| S_{o,h}^{-1}(\tilde{B}J_o - J_oA_o)A_o^{-k}(1 - Q_t)S_{o,\varepsilon}\| dt$$

$$= \int_0^\infty \| S_{o,h}^{-1}(\tilde{B}J_o - J_oA_o)A_o^{-k}S_{o,\varepsilon}\chi_{|x|\geq At}\| dt$$

$$= \int_0^\infty \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2V_o\varepsilon^{-k} \\ 0 & -(Vh^{-1})^*V\varepsilon^{-k} \end{pmatrix} \chi_{|x|\geq At} \right\| dt < \infty \quad ,$$

was nach (4.3) erfüllt ist.

Alles, was noch zu zeigen bleibt, ist jetzt - für die partielle Isometrie - , daß $(J_o^*J_o - 1)A_o^{-1} \in B_\infty(\mathcal{H}_o^\varepsilon)$ (vgl. den Beweis von Lemma 4.1). Analog zu (4.44) - (4.46) erhalten wir

$$(4.55)\qquad S_{o,\varepsilon}^{-1}(J_o^*J_o - 1)A_o^{-1}S_{o,\varepsilon} = [(S_{o,h}^{-1}J_oS_{o,\varepsilon})^*S_{o,h}^{-1}J_oS_{o,\varepsilon} - 1]\hat{A}^{-1}$$

mit

$$S_{o,h}^{-1}J_oS_{o,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-1}\varepsilon \end{pmatrix},$$

also

$$S_{o,\varepsilon}^{-1}(J_o^*J_o - 1)A_o^{-1}S_{o,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon(h^{-2}-\varepsilon^{-2}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon h^{-1}(h^{-1}-h\varepsilon^{-2}) & 0 \end{pmatrix},$$

und das ist wiederum, wie bei (4.8) gesehen, kompakt. Damit ist der Beweis von Lemma 4.5 abgeschlossen.

Q.E.D.

Nun haben wir die beiden Endpunkte $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ unserer Skala von Klein-Gordon-Operatoren untersucht und können uns ins Innere vortasten, wobei wir gleichzeitig unsere Ergebnisse zusammenfassen:

Satz 4.7

V, V_o seien symmetrische, ε-beschränkte Operatoren mit

$$\|V\varepsilon^{-1}\| \leq b < 1 \quad ,$$

und es existiere $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_0^\infty \|V\varepsilon^{-k}\chi_{|x|\geq r}\|dr < \infty \quad , \quad \int_0^\infty \|V_o\varepsilon^{-k}\chi_{|x|\geq r}\|dr < \infty \quad .$$

Dann gilt für $0 \le \alpha \le 1$: Die Wellenoperatoren $\Omega_{\pm}(\alpha) := \Omega_{\pm}(B_\alpha, A_\alpha; J_\alpha)$ existieren in $B(H_\alpha^\varepsilon, H_\alpha^h)$ und sind vollständig ($\Omega_{\pm}(1)$ sind darüber hinaus partiell isometrisch). Die Streuoperatoren $S(\alpha) := \Omega_+^{-1}(\alpha)\Omega_-(\alpha)$ sind unitär auf H_α^ε . Das singulär stetige Spektrum von B_α ist leer, Eigenwerte können sich nur in $\pm m$ häufen, und Eigenwerte in $\mathbb{R}\setminus\{-m,m\}$ haben endliche Vielfachheit.

Beweis:

Die Aussage über das singulär stetige und das Punktspektrum folgt aus Lemma 4.5 für $\tilde{B}$, also auch für $B_o = S^{-1}\tilde{B}S$ und dann nach Lemma 3.8 für alle B_α .

Nun betrachten wir die Wellenoperatoren. Aus (3.19) bzw. der analogen Aussage für die A_α folgt

$$(4.56)\qquad e^{itB_1} = e^{itB_\alpha}\Big|_{H_1^h} \quad , \quad J_1 = J_\alpha\Big|_{H_1^\varepsilon} \quad , \quad e^{itA_1} = e^{itA_\alpha}\Big|_{H_1^\varepsilon} \quad ,$$

also gilt für $u \in H_1^\varepsilon$

$$(4.57)\qquad \lim_{t\to\pm\infty} e^{itB_\alpha} J_\alpha e^{-itA_\alpha} u = \lim_{t\to\pm\infty} e^{itB_1} J_1 e^{-itA_1} u \quad ,$$

und wegen Korollar 4.2 existiert der rechte Limes in H_1^h , also auch in H_α^h ; wegen (3.16) gilt

$$\frac{\|u\|}{\|T_\alpha^{-1}\|\|T_\alpha\|\|J_\alpha^{-1}\|} \le \|e^{itB_\alpha} J_\alpha e^{-itA_\alpha} u\| \le \|T_\alpha\|\|T_\alpha^{-1}\|\|J_\alpha\|\|u\|$$

unabhängig von t für alle $u \in H_\alpha^\varepsilon$, und damit existiert

$$\Omega_{\pm}(\alpha) := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itB_\alpha} J_\alpha e^{-itA_\alpha}$$

auf $\overline{H_1^\varepsilon}^{\alpha,\varepsilon} = H_\alpha^\varepsilon$ ($\overline{}^{\alpha,\varepsilon}$ bezeichnet den Abschluß bzgl. $\|.\|_{\alpha,\varepsilon}$) mit beschränktem Inversen; es ist

$$\Omega_\pm(1) = \Omega_\pm(\alpha)\Big|_{H_1^\varepsilon} \tag{4.58}$$

und allgemeiner

$$\Omega_\pm(\alpha) = \Omega_\pm(0)\Big|_{H_\alpha^\varepsilon} \quad , \tag{4.59}$$

wie man sieht, wenn man in (4.56) und (4.57) statt $\beta = 1$ ein allgemeines $\beta \geq \alpha$ setzt.

Nun ist H_1^ε dicht in $D(\Omega_\pm(\alpha)) = H_\alpha^\varepsilon$, $\Omega_\pm(\alpha)$ ist stetig mit beschränktem Inversen, also ist mit (4.58)

$$R(\Omega_\pm(\alpha)) = \overline{R(\Omega_\pm(1))}^{\alpha,h} = \overline{H^{ac}(B_1)}^{\alpha,h} \tag{4.60}$$

$$= H^{ac}(B_\alpha)$$

wegen Korollar 4.2 und Korollar 3.9.

Nun fehlt noch die Betrachtung der Streuoperatoren. Nach (4.60) ist

$$R(\Omega_+(\alpha)) = R(\Omega_-(\alpha)) \quad ,$$

also ist $S(\alpha)$ auf H_α^ε definiert, und aus (4.59) folgt

$$S(\alpha) = S(0)\Big|_{H_\alpha^\varepsilon} \quad .$$

Wegen Korollar 4.6 und Korollar 4.2 sind sowohl $S(0)$ als auch $S(1)$ unitär auf H_0^ε bzw. H_1^ε, und durch „beidseitige" Interpolation (für $S(\alpha)$ und $S(\alpha)^{-1}$) folgt die Behauptung für alle $S(\alpha)$, wenn man sich klargemacht hat, daß nicht nur die G_α^ε, sondern auch die H_α^ε Interpolationsräume sind. Das sieht man, indem man den Operator

$$\hat{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} , \quad D(\hat{\varepsilon}) = G_1^\varepsilon \times G_0^\varepsilon$$

in $H_0^\varepsilon = G_0^\varepsilon \times G_{-1}^\varepsilon$ betrachtet. $\hat{\varepsilon}$ ist selbstadjungiert und positiv, denn der Operator

$$S_{0,\varepsilon}^{-1} \hat{\varepsilon} S_{0,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} ,$$

$$D(S_{0,\varepsilon}^{-1} \hat{\varepsilon} S_{0,\varepsilon}) = S_{0,\varepsilon}^{-1} D(\hat{\varepsilon}) = G_1^\varepsilon \times G_1^\varepsilon$$

in $L_2^2(\mathbb{R}^n)$ ist selbstadjungiert und positiv; genauso berechnet man, daß $D(\hat{\varepsilon}^\alpha) = G_\alpha^\varepsilon \times G_{\alpha-1}^\varepsilon$ ist ($1 \geq \alpha \geq 0$) und daß tatsächlich H_α^ε identisch ist mit $D(\hat{\varepsilon}^\alpha)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$(f,g)_{\alpha,\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}^\alpha f, \hat{\varepsilon}^\alpha g)_{0,\varepsilon} .$$

Damit sind die H_α^ε Interpolationsräume (die H_α^h können natürlich genauso behandelt werden) und der Beweis von Satz 4.7 ist abgeschlossen.

Q.E.D.

Bemerkung:

Schon bei Satz 3.5c wurde zwischen H_0^ε bzw. H_0^h und H_1^ε bzw. H_1^h interpoliert. Dort ging es allerdings nicht um eine Abschätzung der Norm des Operators, so daß es bei

$$F := \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} : \; H_\alpha^\varepsilon \to H_\alpha^h \quad , \quad 0 \le \alpha \le 1$$

langte, beispielsweise für F_2 zwischen $B(G_{-1}^\varepsilon, G_o^h)$ und $B(G_o^\varepsilon, G_1^h)$ zu interpolieren (für die anderen F_i analog).

§ 5 Beispiele

Hier wollen wir die Bedingungen, die in § 4 an V und V_o gestellt werden, näher untersuchen. (3.1) ist - ε-Beschränktheit vorausgesetzt - eine Frage der Kopplungskonstante und soll nicht näher untersucht werden. Wir konzentrieren uns auf die „Ensssche Bedingung" (4.3). Im Fall des Schrödingeroperators gibt es eine einfache Technik, diese Bedingung handlicher zu machen, die es auch für den Klein-Gordon-Operator tut und die hier noch einmal vorgeführt werden soll:

Lemma 5.1 (vgl. [P, Prop. 8.1])

Sei V ein ε^2-beschränkter Multiplikationsoperator und $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ beliebig; dann ist

$$h_1(R) := \| V\varepsilon^{-k} \chi_{|x| \geq R} \| = \| \chi_{|x| \geq R} (V\varepsilon^{-k})^* \|$$

integrierbar (d.h. (4.3) gilt) genau dann, wenn

$$h_2(R) := \| \chi_{|x| \geq R} V\varepsilon^{-k} \|$$

integrierbar ist.

Bemerkung:

Daß nur gerade Potenzen von ε zugelassen sind, ist für unsere Anwendung kein Mangel; wenn h_2 mit irgendeinem Exponenten k_o integrierbar ist, ist es auch mit $k = 2l \geq k_o$ integrierbar, und damit ist (4.3) für $k = 2l$ erfüllt. Die Aussage des Lemmas läßt sich allerdings bei ε-beschränktem V auch für $k = 1$ beweisen, was im Anhang durchgeführt werden soll. Für ungerades $k > 1$ sehe ich dagegen keinen Beweis, obwohl die Vermutung sich aufdrängt.

Beweis von Lemma 5.1:

Sei $\Phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \Phi(x) \leq 1$ so, daß

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 , & |x| \geq 2 \\ 0 , & |x| \leq 1 \end{cases} ; \tag{5.1}$$

sei weiter

$$j_R(x) := \Phi(\frac{x}{R}) \tag{5.2}$$

und

$$\begin{aligned} g_1(R) &:= \| V\varepsilon^{-k} j_R \| = \| j_R (V\varepsilon^{-k})^* \| , \\ g_2(R) &:= \| j_R V\varepsilon^{-k} \| . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Damit ist für $i = 1 , 2$

$$g_i(\frac{R}{2}) \geq h_i(R) \geq g_i(R) \tag{5.4}$$

und es langt zu zeigen, daß g_1 genau dann integrierbar ist, wenn g_2 integrierbar ist. Die g_i sind beschränkt, also brauchen wir uns nur um das Verhalten für $R \to \infty$ zu kümmern. Da V ein Multiplikationsoperator ist, also mit j_R vertauscht, haben wir

$$|g_1(R) - g_2(R)| \leq \| V[\varepsilon^{-k}, j_R] \| . \tag{5.5}$$

Nun zeigen wir mit vollständiger Induktion, daß für $l \in \mathbb{N}_o$

$$[\varepsilon^{-2l}, j_R] = - l \varepsilon^{-2l} [\varepsilon^2, j_R] \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-2} C_{R,l} , \tag{5.6}$$

$$\| C_{R,l} \| \leq c_l R^{-2} :$$

Für $l = 0$ ist die Aussage klar, und aus der Induktionsannahme, daß (5.6) für $l \in \mathbb{N}_o$ gilt, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&[\varepsilon^{-2(l+1)}, j_R] + (l+1)\varepsilon^{-2(l+1)}[\varepsilon^2, j_R]\varepsilon^{-2} \\
&= \varepsilon^{-2(l+1)} j_R - j_R \varepsilon^{-2(l+1)} + (l+1)\varepsilon^{-2l} j_R \varepsilon^{-2} - (l+1)\varepsilon^{-2(l+1)} j_R \\
&= -l\,\varepsilon^{-2(l+1)} j_R + l\varepsilon^{-2l} j_R \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-2l} j_R \varepsilon^{-2} - j_R \varepsilon^{-2(l+1)} \\
&= l\,\varepsilon^{-2l}[j_R, \varepsilon^{-2}] + [\varepsilon^{-2l}, j_R]\varepsilon^{-2} \\
&= l\,\varepsilon^{-2(l+1)}[\varepsilon^2, j_R]\varepsilon^{-2} - l\varepsilon^{-2l}[\varepsilon^2, j_R]\varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-2} C_{R,l} \qquad ((5.6)!) \\
&= -l\,\varepsilon^{-2(l+1)}[\varepsilon^2, [\varepsilon^2, j_R]]\varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-2} C_{R,l} \quad .
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$
[\varepsilon^2, j_R] = [-\Delta, j_R] = -(\Delta j_R + 2(\nabla j_R)\cdot\nabla) \tag{5.7}
$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon^2, [\varepsilon^2, j_R]]\varepsilon^{-4} &= [-\Delta, [-\Delta, j_R]]\varepsilon^{-4} \\
&= (\Delta^2 j_R + 4(\nabla(\Delta j_R))\cdot\nabla + 4(\Delta j_R)\Delta)\varepsilon^{-4} \quad ;
\end{aligned}
$$

wegen (5.2), (5.1) ist $|\nabla^n j_R| \le c_n R^{-n}$, also

$$
\| [\varepsilon^2, [\varepsilon^2, j_R]]\varepsilon^{-4} \| \le \frac{C}{R^2} \quad ,
$$

und (5.6) ist bewiesen.

Nun folgt aus (5.7) zum einen (s.(5.2),(5.1))

$$
[\varepsilon^2, j_R] = j_{R/2}[\varepsilon^2, j_R]
$$

und weiter

$$\| [\varepsilon^2, j_R]\varepsilon^{-1} \| \leq \frac{C}{R} \quad ;$$

mit all dem erhält man aus (5.5)

$$|g_1(R) - g_2(R)| \leq l\|V\varepsilon^{-2l} j_{R/2}[\varepsilon^2, j_R]\varepsilon^{-2}\| + \|V\varepsilon^{-2}\|\|C_{R,l}\|$$

(5.8)

$$\leq g_1(\tfrac{R}{2})\frac{C}{R} + \frac{C}{R^2}$$

und daraus weiter

$$|g_1(R) - g_2(R)| \leq (g_1(\tfrac{R}{2}) - g_2(\tfrac{R}{2}))\frac{C}{R} + g_2(\tfrac{R}{2})\frac{C}{R} + \frac{C}{R^2}$$

(5.9)

$$\leq g_1(\tfrac{R}{4})\frac{C}{R^2} + \frac{C}{R^3} + g_2(\tfrac{R}{2})\frac{C}{R} + \frac{C}{R^2} \quad .$$

Wenn nun $g_1 \in L_1(\mathbb{R}_+)$, ist nach (5.8) auch $g_2 \in L_1(\mathbb{R}_+)$; die umgekehrte Richtung folgt aus (5.9).

Q.E.D.

Damit erhalten wir unser erstes Beispiel:

Beispiel 5.2

Sei V ein ε-beschränkter Multiplikationsoperator mit der reellwertigen Funktion $v = v(x)$ ($V = V_o$ liefert die *Klein-Gordon-Gleichung mit elektrostatischem Potential*). Dann sind äquivalent:

(a) (4.3) gilt für ein $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$.

(b) Es gilt:

$$F(r) := \Big[\sup_{|x| \geq r-1} \int_{|z| \leq 1} |v(x+z)|^2 dz \Big]^{1/2} \quad , \quad r \geq 0 \tag{5.10}$$

ist beschränkt und integrierbar.

(c) v läßt sich schreiben als

(5.11) $$v(x) = f(|x|)g(x)$$

mit

(5.12) $f : \mathbb{R}_+^o \to [0,1]$ ist monoton fallend und integrierbar;

(5.13) g ist meßbar und ε^{k_o}-beschränkt für ein $k_o \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Wir zeigen (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) .

(a) $\Rightarrow$ (b): Es gelte (a); nach der Bemerkung zu Lemma 5.1 können wir o.B.d.A. $k > n$ annehmen. Nach einem Ergebnis von Strichartz (nach [P, Prop. 8.3]) ist dann auch

$$F_1(r) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big[\int_{|z|\le 1} |\chi_{|x+z|\ge r} v(x+z)|^2 dz \Big]^{1/2}$$

beschränkt und integrierbar. F ist monoton fallend, und wegen $F(0) = F_1(0)$ und $F_1(r) \le F(r) \le F_1(r-2)$ für große r gilt (b).

(b) $\Rightarrow$ (c): Für $v \equiv 0$ ist alles klar; sei also $v \not\equiv 0$ und damit $F(0) > 0$. Definiere

$$f(r) := \frac{F(r)}{F(0)} \quad .$$

Damit ist (5.12) erfüllt. Aus $f(r) = 0$ folgt $F(r) = 0$ und damit $v(x) = 0$ für $|x| \ge r-2$. Wenn wir also definieren

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{v(x)}{f(|x|)} & , \quad f(|x|) > 0 \\ 0 & , \quad f(|x|) = 0 \end{cases} ,$$

ist (5.11) erfüllt. Nun betrachten wir

$$G(x) := \int_{|z|\le 1} |g(x+z)|^2 dz \quad .$$

Wenn $f(|x|+1) = 0$, so ist (s.o.) $v(y) = 0$ für $|y| \ge |x|-1$, also auch $G(x) = 0$. Sei also $f(|x|+1) > 0$; dann ist

$$G(x) = \int_{|z|\le 1} \left| \frac{v(x+z)}{f(|x+z|)} \right|^2 dz$$

$$\le \max_{|z|\le 1} \frac{1}{(f(|x+z|))^2} \int_{|z|\le 1} |v(x+z)|^2 dz$$

$$\le \left(\frac{F(|x|+1)}{f(|x|+1)} \right)^2 = (F(0))^2 \quad .$$

Also ist G beschränkt, und nach [P, Prop. 8.3] ist damit g ε^k-beschränkt für jedes $k > n$; damit ist (5.13) und somit (c) bewiesen.

<u>(c) ⇒ (a):</u> Wenn (c) gilt, ist g auch ε^k-beschränkt für $k = 2l > k_o$, $l \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$\| \chi_{|x|\ge r} V\varepsilon^{-k} \| \le \| \chi_{|x|\ge r} f \|_\infty \| g\varepsilon^{-k} \| = f(r) \| g\varepsilon^{-k} \| \quad ,$$

und der letzte Term ist integrierbar. Nach Lemma 5.1 gilt damit (4.3), also (a).

<u>Q.E.D.</u>

Noch einige Anmerkungen zu den obigen Kriterien: Nach dem im Beweis erwähnten Ergebnis von Strichartz ist (5.13) äquivalent mit

(<u>5.13a</u>) $$\int_{|z|\le 1} |g(x+z)|^2 dz \le M < \infty \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad ;$$

(5.12) gilt z.B. für

$$f(r) := f_a(r) := \begin{cases} 1 & , \ 0 \le r \le a \\ (1 + r - a)^{-1-\delta} & , \ r > a \end{cases} \quad , \ \delta > 0 \ , \ a \ge 0 \tag{5.12a}$$

oder

$$f(r) := f_a(r) := \begin{cases} 1 & , \ 0 \le r \le ae \\ \dfrac{ae}{r(\ln \frac{r}{a})^{1+\delta}} & , \ r > ae \end{cases} \quad , \ \delta > 0 \ , \ a > 0. \tag{5.12b}$$

Zusätzlich muß natürlich immer die geforderte ε-Beschränktheit im Auge behalten werden; hinreichende Kriterien dafür sind z.B.

$$\int_{|z| \le 1} |v(x+z)|^2 |z|^{\alpha-n} dz \le M < \infty \ , \ \begin{cases} \alpha < 2 \ , \ n \ge 2 \\ \alpha = 1 \ , \ n = 1 \end{cases} \tag{5.14a}$$

oder

$$\int_{|z| \le 1} |v(x+z)|^p dz \le M < \infty \quad , \quad \begin{cases} p > n \ , \ n \ge 2 \\ p = 2 \ , \ n = 1 \end{cases} \tag{5.14b}$$

bzw. - mit Bezug auf Beispiel 5.2c -

$$f^2(\max\{0, |x|-1\}) \int_{|z| \le 1} |g(x+z)|^2 |z|^{\alpha-n} dz \le M < \infty \tag{5.14c}$$

(α wie bei (5.14a)) oder

$$f^p(\max\{0, |x|-1\}) \int_{|z| \le 1} |g(x+z)|^p dz \le M < \infty \tag{5.14d}$$

(p wie bei (5.14b)). Zusätzlich zugelassen sind z.B.

$$v \in L_n(\mathbb{R}^n) \ , \ n \ge 3 \tag{5.14e}$$

und darüberhinaus Coulombsingularitäten für $n \geq 3$:

(5.14f) $$v(x) = \frac{c}{|x-x_o|} \chi_{|x-x_o| \leq a} \quad , \; a > 0 \; , \; x_o \in \mathbb{R}^n \quad , \; n \geq 3 \; .$$

Beweis von (5.14 a - f):

(5.14a) ist [W, Th. 10.18]. (5.14b) wird auf (5.14a) zurückgeführt: $n = 1$ ist klar; sei also $n \geq 2$, und es gelte (5.14b) mit einem $p > n$. Dann existiert ein $\alpha < 2$ mit $\alpha p > 2n$. Damit rechnet man nach, daß

$$n - 1 + (\alpha - n) \frac{p/2}{p/2 - 1} > -1 \quad ,$$

und damit gilt mit $q := p/2$

$$\int_{|z| \leq 1} |v(x+z)|^2 |z|^{\alpha-n} dz \leq \Big[\int_{|z| \leq 1} |v(x+z)|^p dz \Big]^{1/q} \Big[\int_{|z| \leq 1} |z|^{(\alpha-n)\frac{q}{q-1}} dz \Big]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\leq M^{2/p} c(p) < \infty \quad ,$$

also (5.14a). (5.14c) bzw. (5.14d) werden unmittelbar auf (5.14a) bzw. (5.14b) zurückgeführt. (5.14e) folgt aus [K, VI. 4.8b,4.9a], und (5.14f) schließlich aus

$$\int_{|x| \leq a} |u(x)|^2 |x|^{-2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 |x|^{-2} dx \leq \frac{4}{(n-2)^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

(vgl. [W, Th.10.35]; natürlich ist deshalb das ganze Coulombpotential ε-beschränkt, aber ohne die Abschneidefunktion in (5.14f) gilt (5.10) nicht, und tatsächlich ist ja zumindest beim Schrödingeroperator mit Coulombpotential die Nichtexistenz der Wellenoperatoren bekannt *)).

Q.E.D.

*) Beim Diracoperator inzwischen ebenfalls; s. [ThE].

Bemerkungen:

1. Am interessantesten ist wohl, was Beispiel 5.2c zeigt: Für ein beliebiges g mit $\|g\varepsilon^{-1}\| < 1$ und ein beliebiges beschränktes Gebiet G existiert ein Potential v mit

$$v(x) = g(x) \quad , \quad x \in G \quad ,$$

so daß die Aussagen von Satz 4.7 gelten; auch außerhalb von G müssen Singularitäten von g durch v nicht abgeschnitten, sondern nur im Betrag - nicht im Charakter - geeignet abgedämpft werden.

2. Für $n = 1$ ist mit (5.10) automatisch auch (5.14a) erfüllt; sonst aber sind die Bedingungen für (4.3) und (5.14) voneinander unabhängig. Nach (5.14b) z.B. soll v L_p-lokal (für ein geeignetes p) gleichmäßig beschränkt sein und nach (5.10) L_2-lokal geeignet abfallen; entsprechend soll g nach (5.13) L_2-lokal gleichmäßig beschränkt sei (vgl. den Beweis von Beispiel 5.2) und darf nach (5.14d) L_p-lokal in einer bestimmten Weise anwachsen.

3. Wenn eines der Kriterien (5.14a - d) - also letztlich (5.14a) - sowie (5.10) gilt, ist nach [W, Th. 10.21] V automatisch ε-kompakt; aber (5.14a) ist ja auch nur ein hinreichendes Kriterium.

4. Im Gegensatz zu (5.12a) hat (5.12b) die Eigenschaft, daß

$$r\,f(r) \notin L_p(\mathbb{R}_+) \quad , \quad p > 0 \quad ,$$

was einen deutlichen Unterschied ausmacht; z.B. gilt für (5.12a), (5.13) die Bedingung [Sch, (1.16),(1.15)], nicht aber für (5.12b), (5.13). Das gleiche gilt für [Wr, (A_6)]; schließlich ist [E2, (V5)] mit $p = q_o (= v)$ i.a. nur für

$$v = f \cdot g \cdot O(|x|^{(1-n)/2})$$

(f,g aus (5.12),(5.13)) erfüllt, wobei [E2] $n \geq 3$ voraussetzt.

Durch eine einfache Variation kann der Beweis von Lemma 5.1 auch auf Differentialoperatoren angewendet werden:

Beispiel 5.3

Sei V ein Differentialoperator der Form

$$V = \sum_{l=1}^{n} v_l(x)\frac{\partial}{\partial x_l} \quad , \quad D(V) = D(\varepsilon^2) \tag{5.15}$$

mit $v_l = f_l g_l$ wie in Beispiel 5.2c (mit einem o.B.d.A. gemeinsamen k_o) , v_l ε-beschränkt. Sei $k \in \mathbb{N}$ gerade mit $k \geq k_o + 1$. Dann gilt (4.3) für V und k .

Bemerkung:

V ist ε-beschränkt, wenn $k_o = 0$, also $|v_l(x)| \leq c_l f_l(|x|)$. Mit der im Anhang bewiesenen Variante von Lemma 5.1 für $k = 1$ folgt dann die Aussage von Beispiel 5.3 auch für $k = 1$.

Beweis von Beispiel 5.3:

Wir bleiben bei der Notation des Beweises von Lemma 5.1 . Da die v_l ε-beschränkt sind, ist V offensichtlich ε^2-beschränkt, und wegen

$$\| \chi_{|x| \geq R} f_l g_l \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon^{-k} \| \leq \| \chi_{|x| \geq R} f_l \| \| g_l \varepsilon^{-k_o} \| \| \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon^{k_o - k} \|$$

und $k_o - k \leq -1$ ist h_2 integrierbar. (5.4) gilt auch hier, nur vertauscht j_R „nicht vollständig" mit V ; wir erhalten

$$|g_2(R) - g_1(R)| \leq \| \sum_{l=1}^{n} (v_l j_R \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon^{-k} - v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon^{-k} j_R) \|$$

$$= \| \sum_{l=1}^{n} (v_l [j_R, \frac{\partial}{\partial x_l}] \varepsilon^{-k} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} [j_R, \varepsilon^{-k}]) \| \tag{5.16}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=1}^{n} \| v_l \frac{\partial j_R}{\partial x_l} \varepsilon^{-k} \| + \| V[j_R, \varepsilon^{-k}] \| \\
&\leq \sum_{l=1}^{n} \| v_l \chi_{|x| \geq R} \frac{\partial j_R}{\partial x_l} \varepsilon^{-k} \| + \| V[j_R, \varepsilon^{-k}] \| \\
&= \sum_{l=1}^{n} \| \chi_{|x| \geq R} v_l \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}(\frac{x}{R}) \varepsilon^{-k} \| + \| V[j_R, \varepsilon^{-k}] \| \\
&\leq \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{R} \| \chi_{|x| \geq R} f_l \| \| \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \| \| g_l \varepsilon^{-k} \| + \| V[j_R, \varepsilon^{-k}] \| \quad .
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Die Summanden links sind nach (5.12) integrierbar, und der letzte Term wird wie im Beweis von Lemma 5.1 abgeschätzt; daraus folgt die Behauptung.

Q.E.D.

An dieser Stelle wollen wir noch einmal zu § 3 und § 4 zurückkehren. In § 3 hatten wir den Operator h^2 als Formsumme von $\varepsilon^2 - V^2$ definiert. Alles, was wir dabei in Wirklichkeit benötigten, war:

(5.17) h ist selbstadjungiert mit $D(h) = D(\varepsilon)$, $h \geq \delta > 0$.

Denn aus (5.17) folgt automatisch (3.4) (mit anderen Konstanten), und somit erhalten wir zunächst (3.8) und (3.9) sowie im weiteren Verlauf, wenn noch

(5.18) V_o ist symmetrisch mit $D(V_o) \supset D(\varepsilon)$

- also $V_o \varepsilon^{-1} \in B(L_2(\mathbb{R}^n))$ - vorausgesetzt wird, alle Ergebnisse von § 3.

Auf dieser Basis betrachten wir § 4 noch einmal und sehen, daß wir alle Schritte, in denen V vorkam, zurückführen können auf die Betrachtung von

$$h_o := h^{-1}\varepsilon - h\varepsilon^{-1} \quad ; \tag{5.19}$$

mit (3.5) und der darauffolgenden Zeile ergibt sich $h_o \in B(L_2(\mathbb{R}^n))$ und insgesamt, an Stelle von Satz 4.7, der allgemeinere

Satz 5.4

Für h bzw. V_o gelte (5.17) bzw. (5.18) sowie für ein $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\infty \| V_o \varepsilon^{-k} \chi_{|x|\geq r} \| dr < \infty \ , \quad \int_0^\infty \| h_o \varepsilon^{1-k} \chi_{|x|\geq r} \| dr < \infty \tag{5.20}$$

(h_o aus (5.19)). Dann gelten alle Behauptungen von Satz 4.7 .

Als Beispiel, das von § 3 abweicht, wollen wir die *Klein-Gordon-Gleichung mit elektrostatischem und elektromagnetischem Potential* betrachten, die formal gegeben ist durch

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - V_o)^2 \varphi = [(i\nabla - A)^2 + m^2]\varphi \tag{5.21}$$

oder

$$-\varphi_{tt} - 2iV_o\varphi_t = h^2\varphi \ , \tag{5.22}$$

$$h^2 := \varepsilon^2 - V_o^2 + |A|^2 - i\nabla\cdot A - iA\cdot\nabla \ , \tag{5.23}$$

wobei $V_o = V_o(x)$ das elektrostatische und $A = A(x) = (a_1(x),..,a_n(x))^T$ das elektromagnetische Potential darstellt; V_o , a_1 seien reellwertige Funktionen.

(5.22) wird wieder durch (0.3) linearisiert, (5.23) wird wieder als Formsumme aufgefaßt: Wir setzen voraus, daß V_o und die a_l, $1 \le l \le n$, ε-beschränkt sind mit

$$\|V_o\varepsilon^{-1}\|^2 + 2\sum_{l=1}^{n} \|a_l\varepsilon^{-1}\| \le \gamma < 1 \quad . \tag{5.24}$$

Damit ist die von (5.23) induzierte Form

$$[u,w] := (\varepsilon u,\varepsilon w) - (V_o u,V_o w) + \sum_{l=1}^{n} (a_l u,a_l w)$$

$$- \sum_{l=1}^{n} (a_l u, i\frac{\partial}{\partial x_l} w) - \sum_{l=1}^{n} (i\frac{\partial}{\partial x_l} u, a_l w) \quad , \tag{5.25}$$

$$D([\,]) = D(\varepsilon)$$

abgeschlossen, symmetrisch und positiv definit ([K, Th.VI.1.33 und VI.1.31] und liefert deshalb (wie in § 3) einen eindeutigen selbstadjungierten Operator h, der

$$(hu,hw) = [u,w] \tag{5.26}$$

und gleichzeitig (5.17) erfüllt. V_o erfüllt nach (5.24) gleichzeitig (5.18), also können wir die Klein-Gordon-Operatoren aus § 3 definieren. Dafür gilt:

Beispiel 5.5 *(Klein-Gordon-Gleichung mit elektrostatischem und elektromagnetischem Potential)*

Seien $V_o(x) = f_o(|x|)g_o(x)$, $a_l(x) = f_l(|x|)g_l(x)$, $1 \le l \le n$; dabei seien f_l, g_l, $0 \le l \le n$, wie in Beispiel 5.2c (mit einem o.B.d.A gemeinsamen k_o für die g_l). Es gelte (5.24). Sei h durch (5.26), (5.25) gegeben. Dann gelten alle Behauptungen von Satz 4.7 .

Beweis:

Wir wenden Satz 5.4 an; nach der soeben durchgeführten Konstruktion gelten (5.17) und (5.18), und für ein fest gewähltes $k = 21 \in \mathbb{N}$, $k \geq k_o + 1$ gilt

$$\int_0^\infty \| V_o \varepsilon^{-k} \chi_{|x| \geq r} \| dr < \infty$$

nach Beispiel 5.2. Zu betrachten ist also nur noch h_o . Nach (5.26) und (5.25) ist

$$\begin{aligned} (h\varepsilon^{-1}x,y) &= [\varepsilon^{-1}x, h^{-1}y] \\ &= (h^{-1}\varepsilon x, y) - (V_o\varepsilon^{-1}x, V_o h^{-1}y) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n} (a_l\varepsilon^{-1}x, a_l h^{-1}y) - \sum_{l=1}^{n} (a_l\varepsilon^{-1}x, i\tfrac{\partial}{\partial x_l} h^{-1}y) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n} (i\tfrac{\partial}{\partial x_l}\varepsilon^{-1}x, a_l h^{-1}y) \quad , \end{aligned} \tag{5.27}$$

also

$$\begin{aligned} h_o &= (V_o h^{-1})^* V_o \varepsilon^{-1} - \sum_{l=1}^{n} (a_l h^{-1})^* a_l \varepsilon^{-1} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n} (i\tfrac{\partial}{\partial x_l} h^{-1})^* a_l \varepsilon^{-1} + \sum_{l=1}^{n} (a_l h^{-1})^* i\tfrac{\partial}{\partial x_l}\varepsilon^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Nun sind $V_o h^{-1}$, $a_l h^{-1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_l} h^{-1}$ beschränkte Operatoren; um

$$\int_0^\infty \| h_o \varepsilon^{1-k} \chi_{|x| \geq r} \| dr < \infty$$

nachzurechnen, genügt also in den ersten drei Termen von (5.28), daß

$$\int_0^\infty \| f_l g_l \varepsilon^{-k} \chi_{|x| \geq r} \| dr < \infty \quad , \quad 0 \leq l \leq n$$

nach Beispiel 5.2 , und im letzten Term haben wir

$$(a_l h^{-1}) * \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon^{-k} = h^{-1} a_l \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon^{-k} \quad ;$$

h^{-1} ist beschränkt, und

$$\int_0^\infty \| a_l \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon^{-k} \chi_{|x| \geq r} \| dr < \infty$$

nach Beispiel 5.3 wegen der Voraussetzung an a_l .

Q.E.D.

§ 6 Zur J-Selbstadjungiertheit der Klein-Gordon-Operatoren

In diesem Abschnitt untersuchen wir noch einmal ein Ergebnis, das schon in [N1] mit Bezug auf [V1], [V2] erwähnt wurde: $B_{1/2}$ ist ähnlich einem $\hat{B}$, für das folgendes gilt: Es existiert ein unitärer Operator J, für den sowohl $\hat{B}$ als auch der entsprechende ungestörte Operator $\hat{A}$ J-selbstadjungiert und J-positiv sind (zur Notation siehe z.B. [V2]). Nach unserem Satz 3.7 gilt diese Ähnlichkeit dann für alle B_α, $0 \le \alpha \le 1$; der Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ ist lediglich dadurch ausgezeichnet, daß wir hier konstruktiv vorgehen können.

Im folgenden seien die Voraussetzungen von Satz 5.4 erfüllt; also gelten auch die Folgerungen von Satz 5.4 bzw. 4.7. Wir wollen $\hat{B}$ konstruieren und definieren zunächst

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V_o & 1 \end{pmatrix} \in B(H^h_{1/2}) \quad ; \tag{6.1}$$

wie bei Korollar 3.4 gilt, daß R beidseitig stetig ist mit

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_o & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Damit ist auch

$$\hat{R} := RJ_{1/2}S_{1/2,\varepsilon} \in B(L^2_2(\mathbb{R}^n), H^h_{1/2}) \tag{6.2}$$

beidseitig stetig, und wir definieren in $L^2_2(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{B} := \hat{R}^{-1}B_{1/2}\hat{R} \quad , \quad D(\hat{B}) = \hat{R}^{-1}D(B_{1/2}) \quad . \tag{6.3}$$

Man beachte, daß in die Ähnlichkeit $\hat{R}$ nur das elektrostatische Potential V_o eingegangen ist; eine Eigenschaft, die für $\alpha \neq \frac{1}{2}$ wahrscheinlich nicht erhalten bleibt.

Analog zu (6.1) - (6.3) ergibt sich als ungestörter Operator (vgl. (4.15)

$$\text{(6.4)} \qquad \hat{A} := S^{-1}_{1/2,\varepsilon} A_{1/2} S_{1/2,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$D(\hat{A}) = S^{-1}_{1/2,\varepsilon} D(A_{1/2}) = [D(\varepsilon)]^2 \quad .$$

Nun existiert nach Satz 5.4 $\Omega_{\pm}(\frac{1}{2})$, also auch

$$\text{(6.5)} \qquad \Omega_{\pm}(\hat{B},\hat{A};\hat{R}^{-1} J_{1/2} S_{1/2,\varepsilon}) = \hat{R}^{-1} \Omega_{\pm}(B_{1/2},A_{1/2};J_{1/2}) S_{1/2,\varepsilon} \cdot$$

Weiter ist

$$\hat{R}^{-1} J_{1/2} S_{1/2,\varepsilon} - 1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} \end{pmatrix} - 1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon^{-1/2} V_0 \varepsilon^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{A}$-kompakt, weil (nach dem Beweis von Korollar 4.2) $V_0 \varepsilon^{-3/2}$ kompakt ist, also existiert mit (6.5) auch

$$\text{(6.6)} \qquad \hat{\Omega}_{\pm} := \Omega_{\pm}(\hat{B},\hat{A}) = \hat{R}^{-1} \Omega_{\pm}(\tfrac{1}{2}) S_{1/2,\varepsilon}$$

mit

$$\text{(6.7)} \qquad R(\hat{\Omega}_{\pm}) = \hat{R}^{-1} R(\Omega_{\pm}(\tfrac{1}{2})) = \hat{R}^{-1} H^{ac}(B_{1/2}) = H^{ac}(\hat{B}) \quad .$$

Aus (6.3) - (6.7) folgt insgesamt

Satz 6.1

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.4 existieren die Wellenoperatoren

$$\hat{\Omega}_{\pm} := \Omega_{\pm}(\hat{B},\hat{A})$$

und sind vollständig. Der Streuoperator $\hat{S} := \hat{\Omega}_{+}^{-1}\hat{\Omega}_{-}$ ist unitär. Das singulär stetige Spektrum von $\hat{B}$ ist leer, Eigenwerte können sich nur in $\pm m$ häufen, und Eigenwerte in $\mathbb{R}\setminus\{-m,m\}$ haben endliche Vielfachheit.

Nun sei

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in B(L_2^2(\mathbb{R}^n)) \quad ; \tag{6.8}$$

wir zeigen

Satz 6.2

$\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind J-selbstadjungiert und J-positiv.

Beweis:

Es ist

$$J\hat{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

selbstadjungiert mit $J\hat{A} \geq m$, da $\varepsilon \geq m$. Für $\hat{B}$ langt es, zu zeigen, daß $0 \in \rho(J\hat{B})$ und $(J\hat{B})^{-1}$ symmetrisch und nichtnegativ ist. Nach dem Beweis von Lemma 4.1 ist $0 \in \rho(B_1)$, also ist wegen Satz 3.7 auch $0 \in \rho(B_{1/2})$ (was man auch wie bei Lemma 4.1 ausrechnen könnte); es ist

(6.9) $$B_{1/2}^{-1} = \begin{pmatrix} -2h^{-2}V_o & h^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also ist mit (6.3) auch $\hat{JB}$ beschränkt invertierbar mit

$$(\hat{JB})^{-1} = \hat{B}^{-1}J = \hat{R}^{-1}B_{1/2}^{-1}\hat{RJ} = S_{1/2,\varepsilon}J_{1/2}^{-1}R^{-1}B_{1/2}^{-1}RJ_{1/2}S_{1/2,\varepsilon}J$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_o & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2h^{-2}V_o & h^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V_o & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(6.10)
$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ -\varepsilon^{-1/2}V_o & \varepsilon^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2h^{-2}V_o & h^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1/2} & 0 \\ V_o\varepsilon^{-1/2} & \varepsilon^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\varepsilon^{1/2}h^{-2}V_o & \varepsilon^{1/2}h^{-2} \\ 2\varepsilon^{-1/2}V_oh^{-2}V_o+\varepsilon^{-1/2} & -\varepsilon^{-1/2}V_oh^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1/2} \\ \varepsilon^{1/2} & V_o\varepsilon^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2}h^{-2}\varepsilon^{1/2} & -\varepsilon^{1/2}h^{-2}V_o\varepsilon^{-1/2} \\ -\varepsilon^{-1/2}V_oh^{-2}\varepsilon^{1/2} & \varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1/2}V_oh^{-2}V_o\varepsilon^{-1/2} \end{pmatrix} .$$

Die Symmetrie ist klar, und die Nichtnegativität folgt aus

$$(\varepsilon^{1/2}h^{-2}\varepsilon^{1/2}u,u) - (\varepsilon^{1/2}h^{-2}V_o\varepsilon^{-1/2}w,u)$$

$$- (\varepsilon^{-1/2}V_o h^{-2}\varepsilon^{1/2}u,w) + (\varepsilon^{-1}w,w) + (\varepsilon^{-1/2}V_o h^{-2}V_o\varepsilon^{-1/2}w,w)$$

$$(6.11) \quad = \|h^{-1}\varepsilon^{1/2}u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(h^{-1}V_o\varepsilon^{-1/2}w, h^{-1}\varepsilon^{1/2}u) + \|h^{-1}V_o\varepsilon^{-1/2}w\|^2$$

$$+ \|\varepsilon^{-1/2}w\|^2$$

$$\geq (\|h^{-1}\varepsilon^{1/2}u\| - \|h^{-1}V_o\varepsilon^{-1/2}w\|)^2 + \|\varepsilon^{-1/2}w\|^2 \quad \geq \quad 0 \quad .$$

Q.E.D.

Im Rest des Abschnittes betrachten wir wieder wie in § 4 den Fall des rein elektrostatischen Potentials:

$$(6.12) \qquad V = V_o \quad , \quad \|V\varepsilon^{-1}\| \leq b < 1 \quad ;$$

wir wollen zeigen, daß dann $\hat{B}$ den in [V1] induzierten - formalen - Operator

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2}V\varepsilon^{-1/2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^{-1/2}V\varepsilon^{1/2} \end{pmatrix}$$

darstellt in dem Sinne, der auch [V2] zugrunde liegt (vergleiche [V2, (13)]): Es ist

$$(6.13) \qquad \hat{B}^{-1} = \varepsilon^{-1/2} \begin{pmatrix} V\varepsilon^{-1} & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1}V \end{pmatrix}^{-1} \varepsilon^{-1/2} \quad .$$

Aus (6.10) folgt zunächst

$$(6.14)\qquad \hat{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{1/2}h^{-2}V\varepsilon^{-1/2} & \varepsilon^{1/2}h^{-2}\varepsilon^{1/2} \\ \varepsilon^{-1/2}(1+Vh^{-2}V)\varepsilon^{-1/2} & -\varepsilon^{-1/2}Vh^{-2}\varepsilon^{1/2} \end{pmatrix} ;$$

für (6.13) ist also zu zeigen

$$(6.15)\qquad \begin{pmatrix} -\varepsilon h^{-2}V & \varepsilon h^{-2}\varepsilon \\ 1+Vh^{-2}V & -Vh^{-2}\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\varepsilon^{-1} & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1}V \end{pmatrix}^{-1} .$$

Wegen (6.12) weiß man aber, daß

$$\begin{pmatrix} V\varepsilon^{-1} & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1}V \end{pmatrix}$$

beschränkt invertierbar ist: für $\|C\| < 1$ ist $C^*(1-CC^*)^{-1} = (1-C^*C)^{-1}C^*$ und damit

$$\begin{pmatrix} C & 1 \\ 1 & C^* \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -C^*(1-CC^*)^{-1} & (1-C^*C)^{-1} \\ (1-CC^*)^{-1} & -C(1-C^*C)^{-1} \end{pmatrix} ;$$

also genügt für (6.15), daß

$$\begin{pmatrix} V\varepsilon^{-1} & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1}V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varepsilon h^{-2}V & \varepsilon h^{-2}\varepsilon \\ 1+Vh^{-2}V & -Vh^{-2}\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$(6.16)\qquad = \begin{pmatrix} -Vh^{-2}V + 1 + Vh^{-2}V & Vh^{-2}\varepsilon - Vh^{-2}\varepsilon \\ -\varepsilon h^{-2}V + \varepsilon^{-1}V + \varepsilon^{-1}VVh^{-2}V & \varepsilon h^{-2}\varepsilon - \varepsilon^{-1}VVh^{-2}\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-\varepsilon h^{-1} + \varepsilon^{-1} h + \varepsilon^{-1} V V h^{-1}) h^{-1} V & (1 - \varepsilon^{-1} V V \varepsilon^{-1}) \varepsilon h^{-2} \varepsilon \end{pmatrix}$$

(6.16)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt : der Term links unten verschwindet wegen (4.8), und rechts unten erhält man - ebenfalls aus (4.8) -

$$\varepsilon^{-1} h h \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1} h \, [\, h\varepsilon^{-1} + (Vh^{-1})^* V\varepsilon^{-1} - (Vh^{-1})^* V\varepsilon^{-1} \,]$$

$$= \varepsilon^{-1} h \, [\, h^{-1}\varepsilon - (Vh^{-1})^* V\varepsilon^{-1} \,]$$

$$= 1 - \varepsilon^{-1} h (Vh^{-1})^* V\varepsilon^{-1}$$

$$= 1 - \varepsilon^{-1} V V \varepsilon^{-1}$$

und damit (6.16) .

ANHANG

Lemma A.1

Sei V ein ε-beschränkter Multiplikationsoperator und $k = 1$; dann gilt die Folgerung von Lemma 5.1 .

Beweis:

Wir beginnen wie im Beweis von Lemma 5.1 bis zur Abschätzung (5.5), die jetzt die Gestalt hat

$$|g_1(R) - g_2(R)| \leq \|V[\varepsilon^{-1}, j_R]\| \quad . \tag{A.1}$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt} e^{-\varepsilon t}[\varepsilon^{-1}, j_R]e^{-\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t}(-j_R+\varepsilon j_R\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-1}j_R\varepsilon+j_R)e^{-\varepsilon t}$$

$$= e^{-\varepsilon t}\varepsilon^{-1}[\varepsilon^2, j_R]\varepsilon^{-1}e^{-\varepsilon t} \quad ,$$

also

$$[\varepsilon^{-1}, j_R] = -\varepsilon^{-1}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}[\varepsilon^2, j_R]\varepsilon^{-1}e^{-\varepsilon t}\,dt$$

und damit

$$|g_1(R) - g_2(R)| \leq \|V\varepsilon^{-1}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}Q_R e^{-\varepsilon t}dt\| \tag{A.2}$$

mit

$$Q_R = [\varepsilon^2, j_R]\varepsilon^{-1} = [-\Delta, j_R]\varepsilon^{-1}$$

$$= -(\Delta j_R + 2\nabla j_R\cdot\nabla)\varepsilon^{-1} \quad ;$$

wegen (5.2), (5.1) ist $|\Delta j_R| \le CR^{-2}$, $|\nabla j_R| \le CR^{-1}$, also

$$\|Q_R\| \le CR^{-1} \quad .$$

Das langt leider noch nicht; also weiter aus (A.2) unter Berücksichtigung von $Q_R = j_{R/2}Q_R$:

$$\begin{aligned} &|g_1(R) - g_2(R)| \\ &\le \|V\varepsilon^{-1} j_{R/2} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} Q_R e^{-\varepsilon t} dt + V\varepsilon^{-1} \int_0^\infty [e^{-\varepsilon t}, j_{R/2}] Q_R e^{-\varepsilon t} dt\| \\ &\le \|V\varepsilon^{-1} j_{R/2}\| \int_0^\infty \|e^{-\varepsilon t} Q_R e^{-\varepsilon t}\| dt + \|V\varepsilon^{-1}\| \int_0^\infty \|[e^{-\varepsilon t}, j_{R/2}] Q_R e^{-\varepsilon t}\| dt \\ &\le g_1(\tfrac{R}{2}) \tfrac{C}{R} \int_0^\infty e^{-2mt} dt + \|V\varepsilon^{-1}\| \tfrac{C}{R} \int_0^\infty \|[e^{-\varepsilon t}, J_{R/2}]\| e^{-mt} dt \end{aligned} \tag{A.3}$$

mit $J_R := 1 - j_R$, also

$$J_R(x) = \varphi(\tfrac{x}{R}) \quad , \quad \varphi := 1 - \Phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \quad . \tag{A.4}$$

Nun müssen wir $[e^{-\varepsilon t}, J_R]$ untersuchen. Im Fourierbild ist das ein Integraloperator mit Kern

$$K(p,q) := (2\pi)^{-n/2} \tilde{J}_R(p-q)(e^{-\varepsilon(p)t} - e^{-\varepsilon(q)t})$$

mit $\varepsilon(x) = \sqrt{x^2+m^2}$. Mit (A.4) erhält man

$$K(p,q) = (2\pi)^{-n/2} R^n \tilde{\varphi}(R(p-q)) (e^{-\varepsilon(p)t} - e^{-\varepsilon(q)t}) \quad .$$

K ist also stetig in p und q , und für $|p| \neq |q|$

$$K(p,q) = (2\pi)^{-n/2} R^n \tilde{\varphi}(R(p-q)) \frac{p^2-q^2}{\varepsilon^2(p)-\varepsilon^2(q)} (e^{-\varepsilon(p)t} - e^{-\varepsilon(q)t})$$

$$= (2\pi)^{-n/2} tR^{n-1} \tilde{\varphi}(R(p-q)) R(p-q) \cdot \frac{p+q}{\varepsilon(p)+\varepsilon(q)} \frac{e^{-\varepsilon(p)t} - e^{-\varepsilon(q)t}}{\varepsilon(p)t-\varepsilon(q)t} .$$

Also, da die letzten beiden Terme sich im Betrag jeweils durch 1 abschätzen lassen,

$$|K(p,q)| \leq (2\pi)^{-n/2} tR^{n-1} |\nabla\tilde{\varphi}(R(p-q))|$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(p,q)| dp \leq (2\pi)^{-n/2} tR^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{\varphi}(R(p-q))| dp$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \frac{t}{R} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{\varphi}(p)| dp$$

(wegen $d(Rp) = R^n dp$) sowie

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(p,q)| dq \leq (2\pi)^{-n/2} \frac{t}{R} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{\varphi}(q)| dq .$$

Daraus folgt (s. z.B. [W, S.155])

$$\| [e^{-\varepsilon t}, J_R] \| \leq C \frac{t}{R} .$$

Damit gehen wir zurück zu (A.3) und erhalten

$$|g_1(R) - g_2(R)| \leq g_1(\tfrac{R}{2}) \frac{C}{R} + \frac{C}{R^2} ,$$

also (5.8) ; der Rest des Beweises verläuft wie bei Lemma 5.1 .

Q.E.D.

LITERATURHINWEISE

[BSch] F.A. Beresin, M.A. Schubin: Urawnenije Schredingera; Isdatelstvo Moskowskowo Universiteta 1983.

[E1] K.J. Eckardt: On the Existence of Wave Operators for the Klein-Gordon Equation; Manuscripta Math. 18 (1976), 43-55.

[E2] K.J. Eckardt: Scattering Theory for the Klein-Gordon Equation; Functiones et Approximatio VIII (1980), 13-42.

[G] J. Ginibre: La méthode "dépendant du temps" dans le problème de la complètude asymptotique; Preprint, Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Université de Paris-Sud, Orsay, 1980.

[J] D.R. Jafajew: Nonstationary Scattering Theory for Elliptic Differential Operators; Journal of Sov. Math. 28 (1985), 814-824.

[K] T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators; 2nd Ed., Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1976.

[Kk] T. Kako: Spectral and scattering theory for the J-self-adjoint operators associated with the perturbed Klein-Gordon type equations; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA 23 (1976), 199-221.

[L] L.E. Lundberg: Spectral and Scattering Theory for the Klein-Gordon Equation; Commun. Math. Phys. 31 (1973), 243-257.

[N1] B. Najman: Solution of a Differential Equation in a Scale of Spaces; Glasnik Mat. 14(34) (1979), 119-127.

[N2] B. Najman: Trace Class Perturbations and Scattering Theory for the Equations of Klein-Gordon Type; Glasnik Mat. 15(35) (1980), 79-86.

[P] P.A. Perry: Scattering Theory by the Enss Method; Mathematical Reports, Vol. 1, Harwood Academic Publishers Chur 1983.

[RS II] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness; Academic Press New York 1975.

[RS III] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory; Academic Press, New York 1979.

[S] B. Simon: Phase Space Analysis of Simple Scattering Systems: Extensions of some Work of Enss; Duke Math. J. 46(1) (1979), 119-168.

[Sch] M. Schechter: The Klein-Gordon Equation and Scattering Theory; Annals of Physics 101 (1976), 601-609.

[ThE] B. Thaller, V. Enss: Asymptotic Observables and Coulomb Scattering for the Dirac Equation; Ann. Inst. Henri Poincaré 45(2) (1986), 147-171.

[V1] K. Veselić: A Spectral Theory for the Klein-Gordon Equation with an External Electrostatic Potential; Nucl. Physics A 147 (1970), 215-224.

[V2] K. Veselić: On Spectral Properties of a Class of J-Self-adjoint Operators I; Glasnik Mat. 7(27) (1972), 229-248.

[W] J. Weidmann: Linear Operators in Hilbert Spaces; Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1980.

[Wr] R.A. Weder: Scattering Theory for the Klein-Gordon Equation; J. of Functional Analysis 27 (1978), 100-117.

LEBENSLAUF

2.8.1955	Geboren in Dortmund, Eltern: Dipl. Ing. Friedrich Wiegner Monika Wiegner geb. Nowak
1962 - 1966	Bonifatius-Volksschule in Dortmund-Schüren
1966-1974	Humboldt-Gymnasium in Dortmund-Hörde, math.-naturw. Zweig
18.6.1974	Abitur
Oktober 1974 - September 1984	Studium der Mathematik und Physik an der Universität Dortmund
Oktober - Dezember 1984	immatrikuliert an der Fernuniversität - GHS - Hagen, dort
3.12.1984	Diplom in Mathematik (Diplomarbeit zur Störungstheorie für die Diracgleichung)
seit 1.3.1985	wissenschaftlicher Angestellter an der FU - GHS - Hagen
seit 10.5.1986	verheiratet mit Monika Schabel-Wiegner, ein Kind: Daniel, geb. 3.3.1988

Hagen, den 15.6.1989