ZUR QUANTENTHEORIE GELADENER KLEIN-GORDON-TEILCHEN IN ÄUßEREN FELDERN

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines Dr. rer. nat.

des Fachbereichs Mathematik und Informatik

der Fernuniversität – Gesamthochschule – Hagen

vorgelegt von
Bernd Asmuß
aus Löhne

Hagen 1990

			Seite
Э.	Einle	itung	i
1	7	Quantentheorie geladener Bosonen-Felder in äußeren statischen	
1.	Felde		1
	1.1	Grundlagen	1
	1.1	Partiell isometrische Implementierbarkeit	9
		Implementierung der Zeitentwicklung und das Problem des	
	1.3	Fockraum - Hamiltonians	17
	1.4	Konstruktion von Fockraum -Hamiltonian und -"Wellenoperator"	24
	1.5	Regularität und Implementierbarkeit der Zeitentwicklung	46
2.	. Zur	Spektraltheorie für den Klein – Gordon – Operator	51
	2.1	"Schwache" Potentiale ; der Klein - Gordon - Operator	51
	2.2	"Schwache" Potentiale ; die Operatorenfamilie T_{λ}	59
	2.3	Der Fall "starker" Potentiale	70
3	. Reg	ularität äußerer Felder ; der allgemeine Fall	81
4	1. Regularität für Störungen des freien Hamiltonians		93
	4.1	Regularitätsbedingungen	93
	4. 2	Die Irregularität des Coulombpotentials	104
ţ	5. Der Fall des "unterlegten" Magnetfeldes		113
	5.1	Der Klein - Gordon - Operator mit Magnetfeldern	113
	5.2		116
	5.3	10 11 Daldan	121
	Anhai	ng	133
Literaturverzeichnis			14

0. EINLEITUNG

Das einfachste Modell zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen relativistischen Teilchen und einem elektromagnetischen Feld ist die Näherung durch die Theorie des sogenannten äußeren Feldes. Hier wird das durch die Teilchen erzeugte Feld vernachlässigt und das elektromagnetische Feld als durch eine feste Ladungs – und Stromverteilung vorgegeben angesehen. Im Gegensatz zur adäquaten Beschreibung des Systems bei hohen Energien durch ein Modell wechselwirkender quantisierter Felder, kann die Theorie des äußeren Feldes mit mathematischer Strenge bearbeitet werden. Neben der Anwendung im Bereich "niedriger" Energien in der Atomar – und Molekularphysik, wo die Näherung des äußeren Feldes gerechtfertigt sein mag, können anhand dieser Theorie Merkmale von voll quantisierten Modellen in mathematischer Strenge analysiert werden.

Um die Wechselwirkung zwischen relativistischen Teilchen und einem externen Feld zu beschreiben, ist es wegen Inkonsistenzen in der klassischen Einteilchentheorie (z.B. das Auftreten unphysikalischer negativer Energien, das "Klein-Paradoxon" etc.) notwendig, ein Vielteilchenmodell zu betrachten. Ausgangspunkt sollen hier elektrisch geladene Teilchen sein, zu denen es Antiteilchen gibt. Gehorchen diese Teilchen der Bose - bzw. der Fermi-Statistik, so gelangen wir zu einem symmetrischen bzw. antisymmetrischen Fockraum, gebildet über der direkten Summe von Teilchen - und Antiteilchen - Hilbertraum. Die quantisierten Felder wirken nun als Familien von (Feld -) Operatoren auf dem Fockraum, entsprechend ihrer Statistik gehorchen diese kanonischen Vertauschungs - bzw. Antivertauschungsrelationen ("CCR's" bzw. "CAR's"). Geeignete lineare Transformationen im klassischen Hilbertraum generieren nun Automorphismen dieser Feldoperatoren, die diese Strukturen invariant lassen, sogenannte Bogoliubov-Transformationen. Erste Untersuchungen dieser Transformationen im Rahmen des Problems des äußeren Feldes gehen auf [F] zurück, weitere Arbeiten folgten mit u.a. [Sh;KMP;L;Se;Lu1,2;P1].

Im Rahmen dieser Modelle gibt es nun bei der Frage nach der Existenz eines Operators, welcher die Zeitentwicklung des Systems unter der Wirkung äußerer Felder beschreibt, zwei Zugänge.

Für das System ohne äußeres Feld, wie das mit externem Feld (bei zeitabhängigen Feldern ist dies für feste Zeiten oder asymptotisch zu betrachten), kann man voneinander unabhängige Fockräume mit zugehörigen Dynamiken konstruieren. Um ein Modell für die Wirkung äußerer Felder aus die Teilchen zu erhalten, gelangt man an die Frage, wie sich die Zeitentwicklung dieses Systems im Fockraum der "freien" Felder darstellen läßt. Friedrichs [F] entwickelte eine Bedingung, die es erlaubt, im Fockraum der "freien" Felder eine zweite "Quantisierung" anzugeben, mit der ein Fockraum-Hamiltonian explizit angegeben werden kann. In der Sprache der C*-Algebra Theorie ausgedrückt ist dies eine notwendige und hinreichende Bedingung für die unitäre Äquivalenz der beiden Darstellungen einer abstrakten C*-Algebra, welche bezüglich der Zerlegung des klassischen Hilbertraumes in reduzierende Teilräume für den freien bzw. für den gestörten Einteilchen-Hamiltonian gebildet sind. Mit [KSch1] nennen wir die äußeren Felder, die dieser Bedingung genügen, regulär.

Bongaarts [B] bearbeitete hingegen die Frage nach der Existenz von Operatoren für die volle Zeitentwicklung im Fockraum der freien Felder, indem er Implementierungen von Transformationen betrachtete, welche durch die Zeitentwicklung im Einteilchen-Hilbertraum generiert werden.

In der Folge von Fortschritten bei der experimentellen Bestätigung der QED gab es Ende der siebziger Jahre eine Reihe von Untersuchungen, die mit mathematisch strengen Methoden für den Fall der Fermi - Statistik kritische Phänomene in der Struktur des Vakuums für die volle Zeitentwicklung im Fockraum untersuchten [L;KSch2;SchS;S]. Es liegt hierbei die Beobachtung bei mathematisch nicht exakten Modellen (s. [RFK] und die dort zitierte Literatur) zugrunde, nach der das Vakuum ab einer kritischen Kopplungsstärke der äußeren Felder von einem neutralen in einen geladenen Zustand übergeht. Obwohl es eine spontane Teilchenerzeugung im Falle statischer äußerer Felder

nicht geben kann, bleibt deren Betrachtung von Interesse. Kovarianzforderungen der Physik lassen für zeitabhängige äußere Felder den Gebrauch des "Teilchen"-Begriffs nur für ein - und auslaufende Zustände zu [FSch]. Die Untersuchung von kritischen Phänomenen hat sich so mit der Struktur des Streuoperators zu beschäftigen, die Analyse desselben weist starke Parallelen zur Untersuchung des Vakuums im Fall stationä– rer äußerer Felder auf [S]. Neuere Publikationen auf diesem Gebiet beschäftigten sich mit äußeren Feldern, welche sich zeitlich adiabatisch ändern [N1-N3]. Die experimentelle Verifikation der spontanen Positron-Erzeugung bei Streuungen superschwerer Atomkerne in den letzten Jahren [Schw; C] hat wieder zu einem verstärkten Interesse auch an den mathematischen Aspekten der damit verbundenen Fragestellungen geführt, insbesondere auch zu Untersuchungen dieser Phänomene im Zusammenhang mit der Spektraltheorie des Dirac - Operators [S]. Im Falle von Pi-Mesonen ist, wie in [RFK] argumentiert wird, die Diskussion superkritischer Felder eher akademischer Natur, da die Parameter für den kritischen Fall jenseits des experimentellen Zugriffs liegen. Die mir bekannten Arbeiten zu kritischen Phänomenen im Modell der äußeren Felder behandeln die Fermi-Statistik, ältere Arbeiten zu den Bose-Feldern wurden nicht mathematisch streng ausgeführt [SchSW;SchSw;RFK].

Das vorrangige Thema dieser Arbeit ist die Behandlung der oben skizzierten Fragen für den Fall von Klein-Gordon-Teilchen in statischen äußeren Feldern. Im Abschnitt 1.1 werden die Grundlagen dieses Modells im Rahmen des oben angesprochenen Modells von Feldoperatoren und deren Transformationen im Fockraum vorgestellt. Die Theorie der Implementierungen der durch "pseudo"-unitäre Abbildungen generierten Feldoperatortransformationen wird auf den Fall "pseudo"-partieller Isometrieen erweitert (Abschnitt 1.2). In Abschnitt 1.3 wird die bekannte Bedingung für die Implementierbarkeit der Zeitentwicklung für den allgemeinen Fall pseudo-selbstadjungierter Einteilchen-Hamiltoniane bereitgestellt. Während die Implementierung im Bosonen-Fall ohne Einschränkung an die Kopplungsstärke der äußeren Felder geschehen kann und auch keine Unstetigkeiten bei den implementierenden Transformationen auftreten (im Gegensatz

etwa zum Fermi-Fall, s. [R1] zusammen mit [KSch2]), wird in 1.4 bei der Suche nach einem Vakuumzustand für den vollen Fockraum-Hamiltonian das Auftreten von kritischen Phänomenen klar. Nur für den Fall "schwacher" Kopplungsstärken kann so für reguläre äußere Felder ein 'gestörtes' Vakuum und damit eine explizite Konstruktion des Fockraum-Hamiltonians und (die Ergebnisse aus 1.2 nutzend) eines Operators, der über wesentliche Eigenschaften eines Wellenoperators im Fockraum verfügt, durchgeführt werden. Diese Bedingungen implizieren insbesondere, daß der (pseudoselbstadjungierte) Einteilchen-Hamiltonian ähnlich zu einem explizit angebbaren selbstadjungierten Operator ist. Die "Physikalität" des gewonnenen Fockraum-Hamiltonians wird diskutiert. Der Beweis, daß die Regularität der äußeren Felder notwendig und hinreichend für die Äquivalenz der oben angesprochenen Darstellungen ist, wird mit den Methoden der Beweise für die Bedingungen unitärer Implementierbarkeit geführt und so beide Vorgehensweisen miteinander in Beziehung gesetzt. In 1.5 wird schließlich die Vermutung aus [L;KSch1], daß die Regularität äußerer Felder und die Bedingungen für die Implementierbarkeit der Zeitentwicklung äquivalent sind, für den Fall "schwacher" Felder bewiesen.

Im 2. Kapitel wird die Spektraltheorie des klassischen (i.e. Einteilchen-) Klein-Gordon-Operators diskutiert. Der Ansatz für den freien K.-G.-Operator H₀ erfolgt so allgemein, daß die Betrachtung eines "unterlegten" Magnetfeldes in Kapitel 5 möglich ist. Wir untersuchen den vollen K.-G.-Operator in einem Skalarprodukt, in welchem er nicht symmetrisch ist, wohl aber "pseudo"-symmetrisch. Für relativ H₀-beschränkte Potentiale läßt sich dieser formale Operator zu einem wohldefinierten Operator H erweitern. Für "kleine" Kopplungsstärken der Störungen kann die Ähnlichkeit von H zu einem selbstadjungierten Operator explizit angegeben werden. Mit Hilfe einer Familie quadratischer Operatoren lassen sich weitere spektrale Eigenschaften für H ableiten (Abschnitt 2.2). Ein weiterer Vorteil bei der Wahl eines "pseudo"-selbstadjungierten Hamiltonians ist es, auch Störungen starker Kopplungsstärken betrachten zu können. In Abschnitt 2.3 wird für relativ H₀-kompakte Störungen die Wohldefiniertheit von H und

dessen spektrale Eigenschaften abgeleitet. Hiermit werden Voraussetzungen für die Erarbeitung von Regularitätsbedingungen an die Potentiale ohne Einschränkung an die Kopplungsstärke gegeben.

Diese Ausarbeitung erfolgt im bisher betrachteten allgemeinen Fall im 3. Kapitel. Anhand einer Verallgemeinerung der Beweisideen aus [N;Sch] für den Fall des Dirac-Operators, wird die Regularität für möglichst schwache Bedingungen an die externen Felder gezeigt. Des Weiteren wird eine notwendige Bedingung aufgeführt.

Mit diesen Mitteln können die Regularitätsbedingungen sowohl im 4. Kapitel für den gewöhnlich betrachteten Fall, in welchem der freie Hamiltonian keine weiteren Felder enthält, wie in Abschnitt 5.3, wo der Physik zusätzliche homogene Magnetfelder zugrunde liegen, angewandt werden. Im 4. Kapitel wird neben der Erarbeitung einer im gewissen Sinne schwächstmöglichen Bedingung sowohl an elektrische wie an skalare reguläre äußere Felder die bekannte Irregularität von Magnetfeldern gezeigt. Mit Hilfe eines Satzes über die Existenz starker Limiten von Folgen "pseudo" – selbstadjungierter Operatoren wird in 4.2 gezeigt, daß das Coulombpotential nicht regulär ist.

In Kapitel 5 betrachten wir die physikalische Situation, in welcher die äußeren Felder auf Teilchen in einem "unterlegten" Magnetfeld wirken, d.h. der "freie" Hamiltonian soll schon Teile des Magnetfeldes enthalten. Ergebnisse für die Spektraltheorie des sich ergebenden vollen K.-G.-Hamiltonians werden für allgemeine Magnetfelder in 5.1 und darüber hinausgehende für das homogene Magnetfeld in 5.2 entwickelt. In 5.2 kommen unter anderem Ergebnisse aus 2.2 zur Anwendung, wenn die Existenz von Eigenwerten unabhängig von der Kopplungsstärke einer Klasse nichttrivialer elektrostatischer Potentiale in drei Dimensionen gezeigt wird. Ergebnisse aus 5.1 lassen die Vermutung zu (welche natürlich die Untersuchung dieses Systems motivierte), daß die Regularitätsforderungen hier schwächer sind als die für den in Kapitel 4 betrachteten Fall. In 5.3 kann jedoch gezeigt werden, daß sich auch hier weder äußere Magnetfelder noch das Coulompotential unter den regulären Potentialen befinden.

Im Anhang werden schließlich zwei Bemerkungen aus den Kapiteln 1 und 2 bewiesen und die (in der Literatur bekannten) Beweise der Sätze 1.9 und 1.11 sowie des Lemmas 1.10 angeführt.

Die Notationen dieser Arbeit sind weitgehend die aus [K]. Im Unterschied hierzu wird die Resolventenmenge und das Spektrum eines Operators T mit $\rho(T)$ und $\sigma(T)$ bezeichnet. Mit einem beidseitig stetigen Operator J nennen wir einen Operator T kurz J-symmetrisch bzw. J-selbstadjungiert, falls JT symmetrisch bzw. selbstadjungiert ist. Zwei Teilräume M_1, M_2 eines Hilbertraumes heißen J-orthogonal, falls M_1 orthogonal zu JM_2 ist. c bezeichnet universell eine positive Konstante.

Ich möchte an dieser Stelle all denen danken, die mich während der Erstellung dieser Arbeit durch kritische Diskussionen oder auf andere Art unterstützten. Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Veselić für seine Anregungen und seine stete Diskussionsbereitschaft.

1. ZUR QUANTENTHEORIE GELADENER BOSONEN-FELDER IN ÄUßEREN STATISCHEN FELDERN

1.1 Grundlagen

Sei im folgenden \mathscr{H} ein separabler Hilbertraum, $\mathscr{H}^{(n)}$ bezeichne für n>0 das n-fache vollständige Tensorprodukt von \mathscr{H} mit sich selbst und $\mathscr{H}^{(0)}:=\mathbb{C}$. S_n sei der Symmetrisierungsoperator in $\mathscr{H}^{(n)}$ (Def. s. [RSI \S II.4]) und $P_s:=\bigoplus_{n=0}^\infty S_n$.

Dann ist der Bose-Fockraum $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ gegeben durch $\mathscr{F}:=\mathscr{F}(\mathscr{H}):=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{H}({}_{s}^{n})$ mit $\mathscr{H}({}_{s}^{n}):=\mathrm{S}_{n}\mathscr{H}({}_{s}^{n})$. Ω benennt den Vektor ${}^{\mathrm{t}}(1,0,0,\ldots)$ ϵ \mathscr{F} , das Vakuum. Sei weiter D_{f} ϵ \mathscr{F} die Menge von Vektoren $\phi=\left\{\phi^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Komponenten.

Für zwei Typen von Operatoren in & können wir deren "Zweitquantisierungen" kanonisch konstruieren.

Sei A selbstadjungiert in \mathcal{H} mit determinierendem Bereich D' und bezeichne $D_A:=\{\phi\in D_f\mid \phi^{(n)}\in \mathop{\otimes}\limits_{j=1}^n D^j\ \forall\ n\in\mathbb{N}\}. \ \text{Die lineare Erweiterung des Operators, welcher auf } D_A\cap\mathcal{H}^{(n)},\ n>0\ ,\ \text{durch}$

$$A \otimes I \otimes ... \otimes I + I \otimes A \otimes I \otimes ... \otimes I + ... + I \otimes ... \otimes I \otimes A$$

$$(1.1)$$

gegeben ist und auf $\mathcal{H}^{(0)}$ verschwindet, ist wesentlich selbstadjungiert auf D_A , seinen Abschluß bezeichnen wir mit $d\Gamma(A)$. Als erste Anwendung definieren wir den "Anzahloperator" $\mathcal{N}:=d\Gamma(I)$.

Die spektralen Eigenschaften von $d\Gamma(A)$ lassen sich nun leicht ableiten.

Lemma 1.1

Sei A selbstadjungiert in \mathcal{H} , $d\Gamma(A)$ wie oben definiert.

Es gilt:

$$\begin{split} \sigma(\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{A})) &= \{0\} \cup \{ \ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \ ; \ \lambda_{j} \in \sigma(\mathrm{A}) \ \} \ , \\ \sigma_{\mathrm{p}}(\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{A})) &= \{0\} \cup \{ \ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \ ; \ \lambda_{j} \in \sigma_{\mathrm{p}}(\mathrm{A}) \ \} \ , \\ \sigma_{\mathrm{c}}(\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{A})) &= \{ \ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \ , \ \lambda_{j} \in \sigma(\mathrm{A}) \ , \\ &= und \ \lambda_{j} \in \sigma_{\mathrm{c}}(\mathrm{A}) \quad \text{für ein } j, \ 1 \le j \le n \ \} \quad ; \\ \mathcal{H}_{\mathrm{x}}(\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{A})) &= \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{x}}(\mathrm{A})^{(n)} \qquad \qquad \text{für } \mathrm{x} = \mathrm{p,s,sc} \ , \end{split}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{x}}(\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{A})) &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{n+1}} \left(\mathcal{H}_{\mathrm{x}}(\mathrm{A}) \otimes \mathcal{H}^{(n)} \right) \quad \text{für } \mathrm{x} = \mathrm{c,ac} \quad . \tag{1.2}$$

Beweis: Seien T_1 , T_2 selbstadjungiert in den Hilberträumen \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 und $\{E_1(\lambda)\}$, $\{E_2(\lambda)\}$ die zugehörigen spektralen Familien. Nach [W Th.8.34] gilt für die spektrale Familie $\{E(\lambda)\}$ des Operators $T:=\overline{T_1 \otimes I_1 + I_2 \otimes T_2}$ in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$:

$$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2, \mathbf{E}(\lambda) (\mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{w}_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v}_1, \mathbf{E}_1(\lambda - \mu) \mathbf{w}_1) d_{\mu} (\mathbf{v}_2, \mathbf{E}_2(\mu) \mathbf{w}_2) ,$$
 (1.3)

für $v_1, w_1 \in \mathcal{H}_1$, $v_2, w_2 \in \mathcal{H}_2$. Mit der Charakterisierung der spektralen Teilräume und der zugehörigen Spektren (s. z.B. [K VI § 5,X § 2]) kann man nun leicht ablesen, daß das folgende gilt:

Für den Operator $S := T_1 \oplus T_2$ erhalten wir die spektrale Familie $E'(\lambda) = E_1(\lambda) \oplus E_2(\lambda)$ und so:

$$\sigma(S) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2) , \quad \sigma_{p, c}(S) = \sigma_{p, c}(T_1) \cup \sigma_{p, c}(T_2) ,$$

$$\mathcal{H}_{x}(S) = \mathcal{H}_{x}(T_1) \oplus \mathcal{H}_{x}(T_2) \quad \text{für } x = p, s, c, ac, sc .$$

$$(1.5)$$

Nun können wir d $\Gamma(A)$ schreiben als die direkte Summe $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{A^n}$ von selbstadjungierten Operatoren $\overline{A^n}$, den Abschlüssen der durch (1.1) auf $\mathcal{H}^{(n)}$ definierten Operatoren. Somit läßt sich mit (1.4) und (1.5) auf die Behauptung schließen. \square

Zum anderen können wir die "zweite Quantisierung" für in \mathcal{H} partiell isometrische Operatoren angeben. Sei B ϵ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine partielle Isometrie mit den orthogonalen Projektoren auf Anfangs – und Endbereich P und P'. Wir betrachten nun den Operator, welcher auf $\mathcal{H}^{\binom{n}{s}}$ für n > 0 durch $\sum_{j=1}^{n}$ B, für n = 0 durch die Einheit gegeben ist. Die lineare Erweiterung dieses Operators auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ ist dann aus $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$, wir bezeichnen sie mit $\Gamma(B)$. Es gilt

$$\Gamma(B)^* = \Gamma(B^*), \Gamma(B)^*\Gamma(B) = \Gamma(B^*B), \Gamma(B)\Gamma(B)^* = \Gamma(BB^*).$$
 (1.6)

Nun impliziert eine direkte Zerlegung von \mathcal{H} in zwei abgeschlossene Teilräume $\mathcal{H} = P \mathcal{H} \oplus (I - P) \mathcal{H}$, hier mittels eines in \mathcal{H} orthogonalen Projektors P, die Isomorphie:

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{F}(P\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}((I-P)\mathcal{H})$$

wobei $\mathscr{F}(P\mathscr{H})$ und $\mathscr{F}((I-P)\mathscr{H})$ die Bose-Fockräume über $P\mathscr{H}$ und $(I-P)\mathscr{H}$ bezeichnen. Seien die Vakua der beiden letztgenannten Fockräume Ω_P und Ω_{I-P} , so sind diese Fockräume mittels

$$\mathscr{T}(P\mathscr{H})\cong\mathscr{T}(P\mathscr{H})\otimes\{\Omega_{I-P}\}\ ,\ \mathscr{T}((I-P)\mathscr{H})\cong\{\Omega_{P}\}\otimes\mathscr{T}((I-P)\mathscr{H})$$
 isomorph zu Teilräumen von $\mathscr{T}(\mathscr{H})$.

Nach (1.6) ist klar, daß $\Gamma(B)$ eine partielle Isometrie in $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ ist, die Operatoren

$$\Gamma(P) = \Gamma(B^*B)$$
 , $\Gamma(P') = \Gamma(B)\Gamma(B^*)$

sind die in $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ orthogonalen Projektoren auf den Anfangs - und Endbereich

$$\Gamma(\mathsf{P}) \ \mathcal{I}(\mathcal{H}) \ = \ \mathcal{I}(\mathsf{P}\,\mathcal{H}) \otimes \big\{\,\Omega_{\mathsf{I}\,-\,\mathsf{P}}\,\big\}$$

und

$$\Gamma(\mathrm{P}^{\scriptscriptstyle\mathsf{I}})\ \mathcal{I}(\mathcal{H}) = \mathcal{I}(\mathrm{P}^{\scriptscriptstyle\mathsf{I}}\,\mathcal{H})\otimes \big\{\,\Omega_{\,\,\mathsf{I}_{\,\mathsf{P}}\,\mathsf{P}^{\,\mathsf{I}}}\,\big\}$$

von $\Gamma(B)$.

Die Bezeichnungen $\Gamma(B)$ und d $\Gamma(A)$ rühren daher, daß für einen in $\mathscr H$ selbstadjungierten Operator A d $\Gamma(A)$ der Generator der in $\mathscr F$ unitären Gruppe

$$\Gamma(\exp(i t A)) = \exp(i t d\Gamma(A))$$
 ist.

Für festes v ϵ \mathcal{H} definiert man nun die Abbildung c(v): $\mathcal{H}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(n-1)}$ durch

$$c(\mathbf{v}) (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{v}_n) := (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) (\mathbf{v}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{v}_n)$$

und lineare Erweiterung auf $\mathcal{H}^{(n)}$ und die Abbildung $c^*(v):\mathcal{H}^{(n)} \to \mathcal{H}^{(n+1)}$ durch

$$c^*(v)(v_1\otimes v_2\otimes...\otimes v_n) := v\otimes v_1\otimes...\otimes v_n$$

analog. Vernichtungsoperatoren $c_s(v)$ in ${\mathscr F}$ sind nun auf D_f gegeben durch

$$c_s(\mathbf{v}) := (\mathscr{N} + \mathbf{I})^{\frac{1}{2}} c(\mathbf{v})$$
,

die Erzeugungsoperatoren cs*(v) auf Df durch

$$c_s^*(v) := P_s c^*(v) (\mathcal{N} + I)^{\frac{1}{2}}$$
.

Die Operatoren $c_s(v)$, $c_s^*(v)$, $v \in \mathcal{H}$ sind unbeschränkt und abschließbar.

Seien nun P., P. orthogonale Projektoren in *H* mit

$$P_+^0 + P_-^0 = I . (1.7)$$

Wir definieren $\mathcal{H}^0_{\pm} := \mathrm{P}^0_{\pm} \mathcal{H}$; $\mathcal{F}(\mathcal{H}^0_+)$ und $\mathcal{F}(\mathcal{H}^0_-)$ seien die Bose-Fockräume über \mathcal{H}^0_+ und \mathcal{H}^0_- . Bezeichne nun a(f), $a^*(f)$ und b(g), $b^*(g)$ die Vernichtungs-bzw. Erzeugungsoperatoren in $\mathcal{F}(\mathcal{H}^0_+)$ und $\mathcal{F}(\mathcal{H}^0_-)$ mit $f \in \mathcal{H}^0_+$, $g \in \mathcal{H}^0_-$. Wir identifizieren

dann a(f), $a^*(f)$ und b(g), $b^*(g)$ mit den Operatoren $a(f) \otimes I$, $a^*(f) \otimes I$ und $I \otimes b(g)$, $I \otimes b^*(g)$ in

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathcal{F}(\mathcal{H}_{+}^{0} \oplus \mathcal{H}_{-}^{0}) \cong \mathcal{F}(\mathcal{H}_{+}^{0}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{H}_{-}^{0})$$

$$\tag{1.8}$$

und bezeichnen sie wiederum einfach mit a(f), $a^*(f)$, b(g), $b^*(g)$. Es ergeben sich aus dieser Definition die kanonischen Vertauschungsrelationen ("CCR's") auf D_f :

$$[a(f), a(f')] = [b(g), b(g')] = [a^{(*)}(f), b(g)] = 0 ,$$

$$[a(f), a^{*}(f')] = (f, f') , [b(g), b^{*}(g')] = (g, g')$$
(1.9)

für f, f' ϵ \mathcal{H}^0_+ , g, g' ϵ \mathcal{H}^0_- . (*) benennt hier und im folgenden die Formel mit * wie die ohne *, in Gleichungen sind auf beiden Seiten jeweils dieselben Symbole zu verstehen.

Bezeichnen wir nun die Abschlüsse der Leiteroperatoren mit denselben Symbolen, so sind die Definitionsbereiche dieser Operatoren gegeben durch

$$D(a(f)) = \{ \phi \in \mathcal{F} \mid \lim_{N \to \infty} a(f) P_{N} \phi \text{ existient } \}$$
 (1.10)

und analog die der übrigen Operatoren. Hier ist P_N der spektrale Projektor des Anzahloperators \mathcal{N} auf das Intervall [0,N]. Weiter gilt:

$$D(a(f)) = D(a^*(f))$$
 , $D(b(g)) = D(b^*(g))$
 $a^*(f) = a(f)^*$, $b^*(g) = b(g)^*$,

für f $\in \mathcal{H}^0_+$, g $\in \mathcal{H}^0_-$.

Wir benötigen noch folgende in 3 dichte Teilräume

$$\begin{split} & D_{\bigcap} := \bigcap_{f \in \mathscr{H}^0_+} D(a(f)) \bigcap_{g \in \mathscr{H}^0_-} D(b(g)) \;, \\ & D_{\infty} := \bigcap_{j=1}^{\infty} D(\mathscr{N}^j) \;, \\ & D := \mathscr{L} \; \{ \prod_{i=1}^n a^*(f_i) \prod_{j=1}^r b^*(g_j) \; \Omega \; | \; f_i \in \mathscr{H}^0_+, \, g_j \in \mathscr{H}^0_-; \, n, \, r \in \mathbb{N} \; \} \;. \end{split}$$

(\mathscr{L} bezeichnet die lineare Hülle der Vektoren.) Es ist $D_{\infty} \in D_{\Omega}$; D_{∞} ist invariant unter der Wirkung der Leiteroperatoren. Weiterhin gelten die CCR's (1.9) auf D_{∞} . Mit $\psi \in D_f$ oder $\psi \in D$ gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{a}^{(*)}(\mathbf{f}) \psi\| \le \|\mathbf{f}\| \mathbf{c}(\psi) , \|\mathbf{b}^{(*)}(\mathbf{g}) \psi\| \le \|\mathbf{g}\| \mathbf{c}(\psi) ,$$
 (1.11)

für $f \in \mathcal{H}^0_+$, $g \in \mathcal{H}^0_-$.

Schließlich sind die Feldoperatoren auf D_{\bigcap} definiert durch

$$\Phi(v) := a(P_{+}^{0}v) + b^{*}(CP_{-}^{0}v)$$
(1.12)

für alle v ϵ \mathcal{H} ; C sei eine Konjugation in \mathcal{H}^0_- . Gemäß (1.9) ergeben sich die Vertauschungsrelationen auf D_m

$$[\Phi(\mathbf{v}), \Phi(\mathbf{w})] = [\Phi(\mathbf{v})^*, \Phi(\mathbf{v})^*] = 0,$$

$$[\Phi(\mathbf{v}), \Phi(\mathbf{w})^*] = (\mathbf{v}, J\mathbf{w}),$$
 (1.13)

für alle $v, w \in \mathcal{H}$; J bezeichnet

$$J := P_+^0 - P_-^0 . (1.14)$$

Gegenüber anderen Formalismen hat der Gebrauch von Feldoperatoren zum einen den Vorteil, daß die Abbildung $v \mapsto \Phi(v)$ komplex antilinear ist, zum anderen sind Feldoperatoren eng mit den in der Physik gebrauchten Operatoren verbunden (s. z.B. [R3]).

Wir wollen nun die (unten angeführte) Irreduzibilität der Weylalgebra im Formalismus der Feldoperatoren nutzen. Dazu definieren wir auf D_f

$$d^{(*)}(v) := a^{(*)}(P^0_{+}v) + b^{(*)}(P^0_{-}v), \Phi_s(v) := 1/\sqrt{2} (d(v) + d^*(v)) \quad \forall \ v \in \mathcal{H}.$$

Die Operatoren $\Phi_s(v)$ sind wesentlich selbstadjungiert, ihre Abschlüsse, die "Segal - Feldoperatoren", bezeichnen wir mit demselben Symbol. Es gilt :

$$\begin{split} & D(\Phi_{s}(v)) = \{ \phi \in \mathcal{F} \mid \lim_{N \to \infty} (d^{*}(v) P_{N-1} + d(v) P_{N+1}) \phi \text{ existient } \} \\ & \Phi_{s}(v) \phi = \lim_{N \to \infty} (d^{*}(v) P_{N-1} + d(v) P_{N+1}) \phi \text{ für } \phi \in D(\Phi_{s}(v)) . \end{split}$$

Gilt nun auf D_f für ein $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$

$$B \Phi(v)^{(*)} = \Phi(v)^{(*)} B \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

so hier ebenfalls

$$B \Phi_{s}(v) = \Phi_{s}(v) B \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Da die $\Phi_s(v)$ selbstadjungiert sind mit determinierender Bereich D_f , folgt (es ist $\{(\Phi_s(v) - i) \psi \mid \psi \in D_f\}$ dicht in \mathscr{F}), daß die Resolvente von $\Phi_s(v)$ mit B auf D_f und so überall vertauscht. Es ergibt sich $B \Phi_s(v) \subset \Phi_s(v) B$ und mit den Weyloperatoren $W(v) := \exp i\Phi_s(v) : B W(v) = W(v) B$ für alle $v \in \mathscr{H}$ auf D_f und so überall. Wie man nun leicht sieht (s. z.B. [RS II $\S X$]) ist die Menge der Operatoren $\{W(v) \mid v \in \mathscr{H}\}$ irreduzibel auf $\mathscr{F}(\mathscr{H})$, es folgt $B = \alpha$ I. Wir erhalten also, daß falls für ein $B \in \mathscr{B}(\mathscr{F})$

$$B \Phi (v)^{(*)} = \Phi (v)^{(*)} B \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

auf Df gilt, B ein vielfaches der Einheit sein muß.

Zum Abschluß dieses Abschnittes betrachten wir eine triviale Form einer Implementierung von Transformationen der Feldoperatoren.

Sei B $\in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ partielle Isometrie mit Anfangsbereich P \mathcal{H} und Endbereich P' \mathcal{H} , für welche

$$BJ = JB$$
 , i.e. $P_{\pm}^{0}BP_{\mp}^{0} = 0$

gelte. Dann folgt mit dem oben definierten $\Gamma(B)$ auf D_f :

$$\Gamma(B) a^*(f) = a^*(Bf) \Gamma(B) ,$$

$$\Gamma(B) a(f) \Gamma(P) = a(Bf) \Gamma(B) ,$$

$$a(f) \Gamma(B) = \Gamma(B) a(B^*f) ,$$

$$\Gamma(P') a^*(f) \Gamma(B) = \Gamma(B) a^*(B^*f)$$
(1.15)

für alle f ϵ \mathcal{H}^0_+ . Die gleichen Gleichungen gelten mit b^(*)(g) an der Stelle von a^(*)(f) für alle g ϵ \mathcal{H}^0_- . Es ist $\Gamma(B) P_N = P_{N^+} \Gamma(B)$ für ein $N^+ \leq N$ und so gilt mit geeignetem $\psi \epsilon$ \mathcal{F} für alle f ϵ \mathcal{H}^0_+ :

$$\Gamma(B) \lim_{N \to \infty} a^{*}(f) P_{N} \psi = \lim_{N \to \infty} a^{*}(Bf) \Gamma(B) P_{N} \psi$$

$$= \lim_{N^{1} \to \infty} a^{*}(Bf) P_{N^{1}} \Gamma(B) \psi. \tag{1.16}$$

Folglich bildet $\Gamma(B)$ D(a(f)) in D(a(Bf)) ab, analoges gilt für D(b(g)). Damit gilt $\Gamma(B)$ D_{\bigcap} C D_{\bigcap} . Außerdem sieht man an (1.16) und den übrigen so aus (1.15) gewonnenen Gleichungen, daß (1.15) und die analogen Gleichungen für $b^{(*)}(g)$ auf D_{\bigcap} gelten. Bezeichne nun \tilde{B} den Operator

$$P_{+}^{0} \tilde{B} P_{+}^{0} := P_{+}^{0} B P_{+}^{0} , P_{-}^{0} \tilde{B} P_{-}^{0} := P_{-}^{0} C B C P_{-}^{0} , P_{\pm}^{0} \tilde{B} P_{\mp}^{0} = 0.$$
 (1.17)

Hiermit folgt aus (1.15) auf D_{\bigcap} :

$$\Gamma(\tilde{B}) \Phi(v) \Gamma(\tilde{P}) = \Phi(Bv) \Gamma(\tilde{B}),$$

$$\Gamma(\tilde{P}') \Phi(v) \Gamma(\tilde{B}) = \Gamma(\tilde{B}) \Phi(B^*v),$$
(1.18)

für alle $v \in \mathcal{H}$.

Beweise für alle obigen Behauptungen sind, so nicht skizziert, in [RSI;RSII;R4] zu finden.

1.2 Partiell isometrische Implementierbarkeit

Wir wollen nun Transformationen der Feldoperatoren

$$\Phi(\mathbf{v}) \mapsto \hat{\Phi}(\mathbf{v}) \quad \forall \, \mathbf{v} \in \mathscr{H}$$

betrachten, welche zuerst einmal durch einen Operator U ϵ $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, gemäß

$$\widehat{\Phi}(\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{U}^*\mathbf{v}) \tag{1.19}$$

für alle $v \in \mathcal{H}$, auf D_{\bigcap} generiert seien. Diese Transformationen sollen von der Gestalt sein, daß die Operatoren $\widehat{\Phi}(v)$ wiederum den Vertauschungsrelationen (1.13) genügen. Es muß somit gelten :

$$(U^*v, JU^*w) = (v, Jw)$$

für alle v, w ϵ M', wobei M' einen abgeschlossenen Teilraum von \mathcal{H} bezeichne. Sei P' ein Projektor auf M' (i.e. P' ϵ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, P'² = P') so ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$UJU^* = P'J$$
,

woraus die J-Symmetrie von P' klar wird. Sei weiter P der J-symmetrische Projektor

$$P := JU^*JU.$$

Wir gelangen also zu Transformationen, welche die Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren invariant lassen, falls

$$U J U^*J = P'$$
, $J U^*J U = P$ (1.20)

gilt, wobei P und P' die J-symmetrischen Projektoren auf den "Anfangsbereich" (i.e. - U P = U) und "Endbereich" (i.e. P'U = U) von U bezeichnen.

Wir nennen einen Operator U ϵ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, welcher (1.20) genügt, partiell J-isometrisch mit Anfangsbereich (kurz "AB") P \mathcal{H} und Endbereich ("EB") P' \mathcal{H} . Diese Bezeichnung soll den J-unitären Fall, i.e. $P = P' = \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}$, einschließen.

Sei U partiell J-isometrisch, so nennen wir die gemäß (1.19) durch U generierte Transformation der Feldoperatoren partiell isometrisch implementierbar, falls eine partielle Isometrie $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existiert, so daß auf D

$$\mathcal{U} \ \widehat{\Phi} \ (\mathbf{v}) = \mathcal{P}' \ \Phi \ (\mathbf{v}) \ \mathcal{U} \tag{1.21}$$

für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt. Hier und im folgenden bezeichnen \mathscr{P} und \mathscr{P}' die orthogonalen Projektoren auf den Anfangs – und Endbereich von \mathscr{U} . Falls ein solches \mathscr{U} existiert, muß es nach (1.21) D_{\bigcap} in D_{\bigcap} abbilden, genauer $\mathscr{P}D_{\bigcap}$ auf $\mathscr{P}'D_{\bigcap}$.

Weiterhin ist & durch (1.21) bis auf einen Phasenfaktor bestimmt :

Ist auch \mathcal{U}' partielle Isometrie mit AB $\mathscr{P}\mathscr{T}$ und EB $\mathscr{P}'\mathscr{T}$, welche (1.21) erfüllt, so gilt auf D_{\bigcap} : $\mathscr{P}'\Phi(v)$ $\mathscr{U}'^*=\mathscr{U}\Phi(U^*v)$ $\mathscr{U}'^*=\mathscr{U}\mathscr{U}'^*\Phi(v)$ \mathscr{P}' für alle $v\in\mathscr{H}$; die gleichen Gleichungen erhält man für $\Phi(v)^*$ an der Stelle von $\Phi(v)$. Wie in Abschnitt 1.1 gezeigt, führt dies zusammen mit der Irreduzibilität der Weyloperatoren $\{W(v)\mid v\in P'\mathscr{H}\}$ auf $\mathscr{P}'\mathscr{T}$, zu $\mathscr{U}\mathscr{U}'^*=\alpha\mathscr{P}'$ für ein $\alpha\in\mathbb{C}$. Also sind \mathscr{U} und \mathscr{U}' bis auf einen Phasenfaktor identisch.

Anstatt (1.21) auf D_{\bigcap} zu fordern, können wir auch auf D_f

$$\mathscr{U}\widehat{\Phi}(\mathbf{v})^{(*)} = \mathscr{P}^{\mathsf{I}}\Phi(\mathbf{v})^{(*)} \mathscr{U} \text{ für alle } \mathbf{v} \in \mathscr{H}$$

verlangen. Die letzten Gleichungen führen, wie man mit dem Gleichungen für das Irreduzibilitätsargument aus Abschnitt 1.1 leicht sieht, zu (1.21).

Natürlich sind die Projektoren P und \mathscr{P} , sowie P' und \mathscr{P}' miteinander verbunden. Wir setzen in (1.21) $U \equiv P$, für das zugehörige \mathscr{U} gilt : $\mathscr{U}\mathscr{U}^* = \mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{P}$. Auf D_{\bigcap} folgt :

$$\mathcal{U}^{2} \mathcal{U}^{*} \Phi(\mathbf{v}) \mathcal{P} = \mathcal{U}^{2} \Phi(\mathbf{J} \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{v}) \mathcal{U}^{*} = \mathcal{U}^{2} \Phi(\mathbf{P}^{*} \mathbf{P}^{*} \mathbf{v}) \mathcal{U}^{*} = \mathcal{P} \Phi(\mathbf{v}) \mathcal{U}^{2} \mathcal{U}^{*}$$

für alle $v \in \mathcal{H}$. Mit den analogen Gleichungen für $\Phi(v)^*$ und dem obigen Irreduzibilitätsargument folgt \mathcal{U}^2 $\mathcal{U}^* = \mathcal{P}$ und also zusammen mit \mathcal{U} $\mathcal{U}^* = \mathcal{P}$: $\mathcal{U} = \mathcal{U}^* = \mathcal{P}$

(bis auf einen Phasenfaktor). Man erhält auf D_{\bigcap} :

$$\mathcal{P} \Phi (\mathbf{v}) \mathcal{P} = \mathcal{P} \Phi (\mathbf{P}^* \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}$$

und ebenso (1.22)

$$\mathcal{P}^{\mathsf{I}} \Phi (\mathsf{v}) \mathcal{P}^{\mathsf{I}} = \mathcal{P}^{\mathsf{I}} \Phi (\mathsf{P}^{\mathsf{I}} \mathsf{v}) \qquad \forall \, \mathsf{v} \in \mathcal{H}.$$

Mit Hilfe von (1.22) können wir (1.21) schreiben als

$$\mathcal{U} \Phi (U^* v) = \mathcal{P}^1 \Phi (P^1 v) \mathcal{U}.$$

Mit $w := U^*v = P^*w = JPJw$ und $UJw = UJU^*v = P^IJv$ erhalten wir

$$\mathscr{U} \Phi (P^* w) = \mathscr{U} \Phi (w) \mathscr{P} = \mathscr{P}^{\dagger} \Phi (J U J w) \mathscr{U}$$
(1.23)

auf D_{\cap} für alle $w \in \mathcal{H}$.

(1.23) ist einfach die "Implementierung" der zu (1.19) inversen Transformation

$$\Phi(\mathbf{v}) \longmapsto \Phi^{\mathsf{I}}(\mathbf{v}) := \Phi(\mathbf{J} \mathbf{U} \mathbf{J} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}. \tag{1.24}$$

Die Implementierbarkeit von (1.19) und die von (1.24) sind folglich äquivalent. (Umgekehrt würde ausgehend von der Gleichung $\mathcal{U}\Phi(\mathbf{v})\mathcal{P}=\Phi(\mathbf{J}\mathbf{U}\mathbf{J}\mathbf{w})\mathcal{U}$ dann $\mathcal{P}\Phi(\mathbf{v})\mathcal{P}=\Phi(\mathbf{P}^*\mathbf{v})\mathcal{P}$ und damit $\Phi(\mathbf{U}^*\mathbf{v})=\mathcal{P}^\mathsf{T}\Phi(\mathbf{v})\mathcal{U}$ folgen.)

Für die Implementierbarkeit J-unitärer Transformationen liefert der folgende Satz, dessen Beweis mit mathematisch exakten Methoden auf [Sh] zurückgeht, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die unitäre Implementierbarkeit (zum Beweis der Aussagen in der unten zitierten Form, siehe auch [R1] bzw. Abschnitt 1.4).

Satz 1.2

Die Transformation (1.19) mit J-unitärem U ϵ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist genau dann unitär implementierbar, wenn

$$P^{0}_{+} U P^{0}_{-} , P^{0}_{-} U P^{0}_{+} \in \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H}) .$$
 (1.25)

Für einen Spezialfall partieller J-Isometrien wollen wir nun notwendige und hinreichende Bedingungen für die Implementierbarkeit aufzeigen. Wir betrachten solche Operatoren U, für die es eine Zerlegung gibt, so daß mit Hilfe von Satz 1.2 und der kanonischen Zweitquantisierung aus Abschnitt 1.1 Implementierungen für die Komponenten vorliegen. Im Rahmen des "Segal-Ansatzes" zur Bogoliubov-Transformation ist dieses Vorgehen sehr "natürlich", das dem nachfolgenden Satz entsprechende Theorem im Rahmen dieses Zugangs wurde in [Wa2] bewiesen. Wir folgen dieser Beweisidee. Eine Abwandlung des Satzes werden wir im nächsten Abschnitt anwenden.

Lemma 1.3

Sei U ϵ $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ partiell J-isometrisch. Mögen die Projektoren auf Anfangs- und Endbereich von U mit J vertauschen:

$$JP = P J , JP' = P'J . \qquad (1.26)$$

Sei
$$U = T |U|$$
 (1.27)

die polare Zerlegung von U.

Dann ist $|U| \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ partiell J-isometrisch mit AB und EB P \mathcal{H} .

T ϵ $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ ist partiell isometrisch wie auch partiell J-isometrisch, es gilt :

$$TJ = JT$$
,
 $T^*JT = JP$, $TJT^* = JP'$, $T^*T = P$, $TT^* = P'$.

Beweis: Sei $S := U^*U$, so ist (wegen $R(U) = P^{\dagger}\mathcal{H}$)

$$S J S = U^* U J U^* U = U^* J P' U = U^* J U = J P$$
 (1.28)

Nun ist S nichtnegativ, folglich auch JSJ. Wegen $J^{-1}=J$ gilt

$$(JSJ)^{\frac{1}{2}} = JS^{\frac{1}{2}}J$$
.

Nach (1.28) und (1.26) ergibt sich

$$JSJS = P = SJSJ$$

und damit (s. z.B. $\llbracket K \text{ Th.V } 3.35 \rrbracket$)

$$(JSJ)^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}} = S^{\frac{1}{2}}(JSJ)^{\frac{1}{2}} = P$$
.

Wegen $S^{\frac{1}{2}} = |U|$ gilt also:

$$J \mid U \mid J \mid U \mid = \mid U \mid J \mid U \mid J = P .$$

Somit liefert T := U J |U| J die gewünschte polare Zerlegung:

$$T \mid U \mid = U J \mid U \mid J \mid U \mid = U P = U .$$

Nun ist

$$|U| J |U| J |U| = P |U| = |U| P = |U|$$

und damit

$$\begin{split} T \, J &= \, U \, J \, |U| \, = \, U \, J \, |U| \, J \, |U| \, J \, |U| \, = \, U \, J \, |U| \, |U| \, J \, |U| \, J \\ &= \, U \, J \, U^* U \, J \, |U| \, J \, = \, P' J \, U \, J \, |U| \, J \, = \, J \, U \, J \, |U| \, J \\ &= \, J \, T \; . \end{split}$$

Weiter erhält man

$$T^*T = J |U| J |U| |U| J |U| J$$

= P ,
 $T T^* = U J U^*U J U^*$
= P'

Satz 1.4

Sei U ϵ $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ eine partielle J-Isometrie und gelte (1.26). Seien P,P', \mathscr{P} , \mathscr{P}' wie oben definiert.

Die Transformation (1.19) ist genau dann durch ein \mathscr{U} mit $\mathscr{P} = \Gamma(\tilde{P})$, $\mathscr{P}' = \Gamma(\tilde{P}')$ partiell isometrisch implementierbar, falls

$$P^{0}_{+} U P^{0}_{-}, P^{0}_{-} U P^{0}_{+} \in \mathcal{B}_{2}(P \mathcal{H})$$
 (1.29)

Beweis: Seien $P_{\pm}^{0} U P_{\mp}^{0} \epsilon \mathcal{B}_{2}(P\mathcal{H})$. Dies ist äquivalent mit $P_{\pm}^{0} U^{*}P_{\mp}^{0} \epsilon \mathcal{B}_{2}(P\mathcal{H})$, weiter vertauscht der Operator T aus der polaren Zerlegung (1.27) nach Lemma 1.3 mit P_{\pm}^{0} , so daß

$$P_{\pm}^{0} U^{*}P_{\mp}^{0} = P_{\pm}^{0} |U| P_{\mp}^{0} T^{*}$$
und
$$P_{\pm}^{0} U^{*}P_{\mp}^{0} T = P_{\pm}^{0} |U| P_{\mp}^{0} T^{*}T = P_{\pm}^{0} |U| P_{\mp}^{0} P$$

$$= P_{\pm}^{0} |U| P_{\mp}^{0}$$

$$= P_{\pm}^{0} |U| P_{\mp}^{0}$$
(1.30)

(es ist |U|P = |U|) gilt. Also sind $P_{\pm}^{0}UP_{\mp}^{0} \in \mathcal{B}_{2}(P\mathcal{H})$ genau dann, wenn $P_{\pm}^{0}|U|P_{\mp}^{0} \in \mathcal{B}_{2}(P\mathcal{H})$ (was wiederum äquivalent ist mit $P_{\pm}^{0}|U|P_{\mp}^{0} \in \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H})$). Nach Lemma 1.3 ist |U| auf $P\mathcal{H}$ J-unitär, nach Satz 1.2 existiert somit eine unitäre Transformation $\mathcal{U}_{P}^{1}: \mathcal{I}(P\mathcal{H}) \longmapsto \mathcal{I}(P\mathcal{H})$, welche $D_{\bigcap} \cap \mathcal{I}(P\mathcal{H})$ auf sich abbildet, so daß hier

$$\mathcal{U}_{\mathbf{p}}^{\mathsf{T}} \Phi (|\mathbf{U}|\mathbf{v}) = \Phi (\mathbf{v}) \mathcal{U}_{\mathbf{p}}^{\mathsf{T}}$$
(1.31)

für alle $v \in P\mathcal{H}$ gilt. Wenn wir im folgenden Tensorproduktzerlegungen des Fockraumes betrachten, so wollen wir die Anteile der Feldoperatoren auf den Teilräumen mit demselben Symbol wie dem für die Operatoren in $\mathcal F$ bezeichnen. Wir erweitern $\mathcal U_p$ ' auf $\mathcal F$, indem wir $\mathcal U$ ' durch

$$\mathcal{U}' := \mathcal{U}_{\mathbf{p}}' \otimes \mathbf{I} \tag{1.32}$$

auf $\mathscr{T}(\mathscr{H}) \cong \mathscr{T}(P\mathscr{H}) \otimes \mathscr{T}((I-P)\mathscr{H})$ definieren. \mathscr{U}' ist damit unitär auf \mathscr{F} und bil-

 $\det D_{\bigcap}$ auf D_{\bigcap} ab. Auf D_{\bigcap} erhält man mit (1.31)

$$\Phi (v) \mathcal{U}' = \Phi (P v + (I-P) v) \mathcal{U}'$$

$$= \mathcal{U}' \Phi (|U| v + (I-P) v)$$
(1.33)

für alle $v \in \mathcal{H}$. Nach Lemma 1.3 ist T in der polaren Zerlegung (1.27) eine partielle Isometrie in \mathcal{H} , welche mit J vertauscht. Wir definieren nun $\Gamma(\tilde{T})$ gemäß Abschnitt 1.1. Mit

$$\mathcal{U} := \Gamma(\tilde{\mathbf{T}}) \mathcal{U}^{\mathsf{T}}$$

gilt dann:

$$\mathcal{U} \mathcal{U}^* = \Gamma(\tilde{T}) \mathcal{U}' \mathcal{U}'^* \Gamma(\tilde{T})^* = \Gamma(\tilde{T}) \Gamma(\tilde{T})^* = \Gamma(\tilde{P}')$$

$$\mathcal{U}^* \mathcal{U} = \mathcal{U}'^* \Gamma(\tilde{T})^* \Gamma(\tilde{T}) \mathcal{U}'$$

$$= \mathcal{U}'^* \Gamma(\tilde{P}) \mathcal{U}'$$

$$= \Gamma(\tilde{P}) ,$$
(1.34)

da \mathscr{U}' nach (1.32) mit $\Gamma(\tilde{P})$ vertauscht (\mathscr{U}' hat AB und EB $\mathscr{F}(P\mathscr{H})$). Der so definierte Operator \mathscr{U} ist demnach eine partielle Isometrie in \mathscr{F} mit AB und EB $\Gamma(\tilde{P})\mathscr{F}$ und $\Gamma(\tilde{P}')\mathscr{F}$. Da dies für $\Gamma(\tilde{T})$ gilt, bildet auch $\mathscr{U}\mathscr{P}D_{\bigcap}$ auf $\mathscr{P}'D_{\bigcap}$ ab. Mit (1.18) und (1.33) folgt auf D_{\bigcap}

$$\mathcal{P}^{\mathsf{I}} \Phi (\mathsf{v}) \mathcal{U} = \mathcal{P}^{\mathsf{I}} \Phi (\mathsf{v}) \Gamma(\tilde{\mathsf{T}}) \mathcal{U}^{\mathsf{I}}$$

$$= \Gamma(\tilde{\mathsf{T}}) \Phi (\mathsf{T}^{*}\mathsf{v}) \mathcal{U}^{\mathsf{I}}$$

$$= \mathcal{U} \Phi (|\mathsf{U}|\mathsf{T}^{*}\mathsf{v} + (\mathsf{I}-\mathsf{P}) \mathsf{T}^{*}\mathsf{v})$$

$$= \mathcal{U} \Phi (\mathsf{U}^{*}\mathsf{v} + (\mathsf{I}-\mathsf{T}^{*}\mathsf{T}) \mathsf{T}^{*}\mathsf{v})$$

$$= \mathcal{U} \Phi (\mathsf{U}^{*}\mathsf{v})$$

 $\forall v \in \mathcal{H}$.

Sei nun andererseits (1.19) partiell isometrisch implementierbar. Dann gilt (1.21) mit einem $\mathscr{U} \in \mathscr{B}(\mathscr{T})$, so daß $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \Gamma(\tilde{P})$, $\mathscr{U}\mathscr{U}^* = \Gamma(\tilde{P}')$. Wir definieren nun mit T aus (1.27)

$$\mathcal{U}_{|\mathfrak{V}|} := \Gamma(\tilde{T})^* \mathcal{U}$$
.

Es ist

$$\begin{split} \mathcal{U}_{\left|\mathbb{U}\right|}^{*}\mathcal{U}_{\left|\mathbb{U}\right|} &= \mathcal{U}^{*}\Gamma(\tilde{T}) \; \Gamma(\tilde{T})^{*}\mathcal{U} = \mathcal{U}^{*}\Gamma(\tilde{P}') \; \mathcal{U} = \mathcal{U}^{*}\mathcal{U} = \Gamma(\tilde{P}) \; , \\ \mathcal{U}_{\left|\mathbb{U}\right|}^{*}\mathcal{U}_{\left|\mathbb{U}\right|}^{*} &= \Gamma(\tilde{T})^{*}\mathcal{U} \; \mathcal{U}^{*}\Gamma(\tilde{T}) = \Gamma(\tilde{T})^{*}\Gamma(\tilde{P}') \; \Gamma(\tilde{T}) = \Gamma(\tilde{T})^{*}\Gamma(\tilde{T}) = \Gamma(\tilde{P}) \; , \end{split}$$

und $\mathscr{U}_{|\mathfrak{V}|}$ somit eine partielle Isometrie in \mathscr{F} mit AB und EB $\Gamma(\tilde{P})\mathscr{F}$. Damit ist $\mathscr{U}_{|\mathfrak{V}|}$ auf $\Gamma(\tilde{P})\mathscr{F}$ unitär. Weiterhin bildet nach Definition $\mathscr{U}_{|\mathfrak{V}|}$ \mathscr{P}_{D} auf \mathscr{P}_{D} ab. Auf \mathscr{P}_{D} gilt für alle $v \in P\mathscr{H}$:

$$\begin{split} \Phi \left(\mathbf{v} \right) \; & \; \mathcal{U}_{\left| \mathbf{U} \right|} \; = \; \Gamma (\tilde{\mathbf{T}})^{*} \; \Phi \left(\mathbf{T} \; \mathbf{v} \right) \; \mathcal{U} \\ & = \; \mathcal{U}_{\left| \mathbf{U} \right|} \; \Phi \left(\mathbf{U}^{*} \mathbf{T} \; \mathbf{v} \right) \\ & = \; \mathcal{U}_{\left| \mathbf{U} \right|} \; \Phi \left(\left| \mathbf{U} \right| \; \mathbf{T}^{*} \mathbf{T} \; \mathbf{v} \right) \\ & = \; \mathcal{U}_{\left| \mathbf{U} \right|} \; \Phi \left(\left| \mathbf{U} \right| \; \mathbf{P} \; \mathbf{v} \right) \\ & = \; \mathcal{U}_{\left| \mathbf{U} \right|} \; \Phi \left(\left| \mathbf{U} \right| \; \mathbf{v} \right) \; . \end{split}$$

Also ist die Restriktion von $\mathscr{U}_{|\mathbb{U}|}$ auf $\mathscr{F}(P\mathscr{H})$ die unitäre Implementierung der Feldoperatortransformation, welche durch den auf $P\mathscr{H}$ J-unitären Operator $|\mathbb{U}|$ generiert wird. Nach Satz 1.2 folgt $P^0_{\pm} |\mathbb{U}| P^0_{\mp} \epsilon \mathscr{B}_2(P\mathscr{H})$, was nach (1.30) äquivalent mit $P^0_{\pm} \mathbb{U} P^0_{\mp} \epsilon \mathscr{B}_2(P\mathscr{H})$ ist. \square

1.3 Implementierung für die Zeitentwicklung und das Problem des Fockraum-Wellenoperators

Wir wollen nun die bekannten (u.a. [B;H;Se]) Bedingungen für die Implementierbarkeit der Zeitentwicklung für den allgemeinen Fall einer stark stetigen J-unitären Zeitentwicklungsgruppe aufzeigen. Die "Implementierung" für die Wellenoperatoren als Anwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 1.2 wird diskutiert.

Satz 1.5

Sei U_t eine einparametrige stark stetige Gruppe von beschränkten J-unitären Operatoren in ${\mathscr H}$.

Die Transformation (1.19) mit $U \equiv U_t$ ist genau dann unitär implementierbar durch eine stark stetige unitäre Gruppe \mathcal{U}_t , falls $\mathbb{R} \ni t \longmapsto P^0_+ U_t P^0_-$ stetig in $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ist.

Beweis: Nach Satz 1.2 existieren unitäre Operatoren \mathcal{U}_t , $t \in \mathbb{R}$, so daß (1.21) mit $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, genau dann, wenn $P_+^0 \cup_t P_-^0 \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist (Es genügt diese eine Bedingung, da: $\|P_+^0 \cup_t P_+^0\|_2 = \|P_+^0 \cup_t P_-^0\|_2 = \|P_+^0 \cup_t P_-^0\|_2$.). Aus Gleichung (1.21) (mit $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_t$) folgt, daß die { $\mathcal{U}_t \mid t \in \mathbb{R}$ } eine unitäre Gruppe bilden. Es bleibt also zu zeigen, daß

$$U_t \stackrel{\underline{\mathfrak{s}}}{\longrightarrow} I \iff P^0_+ \ U_t \ P^0_- \ \stackrel{-\cdots}{\longrightarrow} 0 \ \ \text{in} \ \ \mathscr{B}_2(\mathscr{H}) \quad \text{für } t \stackrel{\longrightarrow}{\longrightarrow} 0 \ \ .$$

In [R1;Se] wird gezeigt, daß wir den Phasenfaktor in \mathcal{U}_t so wählen können, daß der Vakuumerwartungswert durch

$$(\Omega, \ \mathcal{U}_t \ \Omega) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda_j(t)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

gegeben ist. Hier sind $\{\lambda_j(t) \mid j \in \mathbb{N}\}$ die singulären Werte des H.S.-Operators $\Lambda := P^0_+ U_t P^0_- (P^0_- U_t P^0_-)^{-1}$. (Es folgt unmittelbar aus der J-Unitarität der U_t , daß $(P^0_- U_t P^0_-)^{-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert und aus $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ ist, und ebenso, daß $0 \le \lambda_j(t) \le \theta < 1$ $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.)

Gilt nun $\mathcal{U}_t \xrightarrow{-s} I$ für $t \to 0$, so folgt $(\Omega, \mathcal{U}_t \Omega) \to 1$ und damit $\lambda_j(t) \to 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dies gilt genau dann, wenn $\| \Lambda \|_2^2 = \sum\limits_{j=1}^\infty \lambda_j(t)^2 \to 0$ und somit $P^0_+ U_t P^0_- \to 0$ in der H.S. - Norm für $t \to 0$.

Gilt umgekehrt die letztgenannte Stetigkeit, so folgt $(\Omega, \mathcal{U}_t \Omega) \to 1$, also $\mathcal{U}_t \Omega \to \Omega$ für $t \to 0$. Auf D_{\bigcap} hat man mit (1.23): $a^{(*)}(U_t f) \mathcal{U}_t = \mathcal{U}_t a^{(*)}(f)$, $b^{(*)}(U_t g) \mathcal{U}_t = \mathcal{U}_t b^{(*)}(g)$, $\forall f \in \mathcal{H}^0_+$, $\forall g \in \mathcal{H}^0_-$, es folgt $U_t \to I$ auf D und da D dicht in \mathcal{F} und \mathcal{U}_t , $t \in \mathbb{R}$, gleichmäßig beschränkt sind, $\mathcal{U}_t \to I$ für $t \to 0$. \square

Nun zum Operator der Zeitentwicklung in \mathscr{F} . Hierzu bezeichne zuerst H_0 den in \mathscr{H} selbstadjungierten freien (Einteilchen-) Hamiltonian. Sei weiter $0 \in \rho(H_0)$. P_{\pm}^0 sind jetzt die Projektoren auf den positiven und negativen Teilraum für H_0 . Als Gruppe der freien Zeitentwicklung in \mathscr{F} erhält man (mit der Notation (1.17)) $\Gamma(\exp(i H_0)^{\tilde{}})$, t $\in \mathbb{R}$. Es folgt als freier Hamiltonian B_0 der Operator $d\Gamma(\tilde{H}_0)$, wobei \tilde{H}_0 auf $D(H_0)$ entsprechend (1.17) gebildet sei. \tilde{H}_0 ist selbstadjungiert und positiv definit, B_0 nichtnegativ mit einfachem Eigenwert 0. Es ergibt sich:

$$\Phi (\exp(-i H_0 t) v) = \exp(-i B_0 t) \Phi (v) \exp(i B_0 t),$$
 (1.35)

auf \mathbf{D}_{\bigcap} für alle $\,\mathbf{v}\,\,\epsilon\,\,\mathcal{H}\,\,,\,\,\mathbf{t}\,\,\epsilon\,\,\mathbb{R}\,\,,\,\,\mathbf{sowie}$

$$\exp(i B_0 t) \Omega = \Omega \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{1.36}$$

(Vertauscht H_0 mit der Konjugation C, so folgt einfach $B_0 = d\Gamma(|H_0|) = d\Gamma(J|H_0)$. Dies gilt z.B. für den Fall, in welchem C die natürliche Konjugation in $\mathcal{H} \equiv L_2$ und H_0 ein Multiplikationsoperator (im Impulsraum) ist.)

H bezeichne nun den in \mathcal{H} J-selbstadjungierten vollen Einteilchen-Hamiltonian. Wir wollen zunächst annehmen, daß H der Generator einer stark stetigen einparametrigen Gruppe beschränkter Operatoren in \mathcal{H} sei, welche wir mit $\{\exp(i H t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ bezeichnen.

Bongaarts [B] folgend, verstehen wir unter dem vollen Hamiltonian in ${\mathcal F}$ einen selbstadjungierten Operator B, mit welchem auf D_{\cap}

$$\Phi \left(\exp(i H t)^* v \right) = \exp(-i B t) \Phi \left(v \right) \exp(i B t), \qquad (1.37)$$

für alle $v \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$ gilt (Hier tritt der adjungierte Operator entsprechend (1.19) auf.). Da, wie oben gezeigt, $\exp(i B t)$ bis auf einen Phasenfaktor eindeutig durch (1.37) bestimmt ist, ist B bis auf eine Konstante festgelegt.

Korollar 1.6

voller.

Ein in 3 selbstadjungierter Operator B, welcher (1.37) erfüllt, existiert genau dann, wenn

$$P^0_+ \exp(i H t) P^0_- \epsilon \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \quad \forall t \epsilon \mathbb{R}.$$
 (1.38)

Beweis: Nach Satz 1.5 existiert eine stark stetige einparametrige unitäre Gruppe \mathcal{U}_t , welche die Transformation der Feldoperatoren implementiert, genau dann, wenn (1.38) gilt ((1.38) und P^0_+ exp(i H t) $P^0_- \to 0$ implizieren P^0_+ exp(i H t) $P^0_- \to 0$ in der H.S. - Norm für $t \to 0$). Nach dem Satz von Stones existiert ein selbstadjungierter Operator, welcher die Gruppe \mathcal{U}_t generiert. \square

Unter der Bedingung (1.38) an den Hamiltonian H läßt sich die Zeitentwicklungsgruppe in Sdarstellen (s. [R1]), jedoch erfährt man mit Hilfe dieser Darstellung wenig über die Struktur des Hamiltonians B. Hierzu ist der Zugang im nächsten Abschnitt sinn-

Eine Möglichkeit etwas über die spektralen Eigenschaften von B zu erfahren, wäre die Konstruktion von Fockraum - Wellenoperatoren.

Das folgende Lemma soll kurz die Eigenschaften der "Einteilchen" - Wellenoperatoren für den Fall J-selbstadjungierter Hamiltoniane H vorstellen.

Lemma 1.7

Sei H J-selbstadjungiert und ähnlich einem selbstadjungierten Operator in ${\mathcal H}$. Die Wellenoperatoren

$$W_{1, 2} := s - \lim_{t \to \pm_{00}} \exp(i H t) \exp(-i H_0 t) P_{ac}(H_0)$$
 (1.39)

als Elemente aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mögen existieren, wobei $P_{ac}(H_0)$ den orthogonalen Projektor auf den absolut stetigen Teilraum von H_0 bezeichne.

Dann sind die Teilräume R(W_{1,2}) abgeschlossen und sie reduzieren H. Es gilt die Verknüpfungsrelation

$$H W_j \supset W_j H_0 \quad j = 1, 2.$$
 (1.40)

Seien $P_{1,2}$ die J-orthogonalen Projektoren auf $R(W_{1,2})$, so sind die Operatoren $W_{1,2}$ partiell J-isometrisch mit Anfangsbereich $P_{ac}(H_0)$ \mathcal{H} und Endbereichen $P_{1,2}$ \mathcal{H} .

Beweis: Da Hähnlich einem selbstadjungierten Operator ist, existiert ein in \mathcal{H} beidseitig stetiger Operator A, so daß

$$\exp(i H t) = A^{-1} \exp(i H' t) A \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit einem in ${\mathscr H}$ selbstadjungierten Operator H' gilt. Damit ist exp (i H t) wohldefiniert, für die Wellenoperatoren erhalten wir

$$W_{1, 2} = A^{-1} s - \lim_{t \to \pm \infty} \exp(i H^{1}t) A \exp(-i H_{0} t) P_{ac}(H_{0})$$
,

und damit "verallgemeinerte" Wellenoperatoren, deren Existenz und Vollständigkeit im Rahmen der "2-Hilbertraum" - Theorie untersucht werden kann.

Um die Abgeschlossenheit von R(W_{1, 2}) zu zeigen, betrachten wir die Operatoren

$$\begin{array}{lll} D(V_{1,\,2}) &:= \{ \ v \ \epsilon \ \mathscr{H} | \ \underset{t \ \rightarrow \pm \, \omega}{\text{lim}} \ \exp \left(i \ H't \right) \ A \ \exp \left(-i \ H_0 \ t \right) \ v & \text{existient} \ \} \\ V_{1,\,2} \ v &:= \ \underset{t \ \rightarrow \pm \, \omega}{\text{lim}} \ \exp \left(i \ H't \right) \ A \ \exp \left(-i \ H_0 \ t \right) \ v & \text{für} \ v \ \epsilon \ D(V_{1,\,2}) \ . \end{array}$$

Wir können analog zum Beweis von [W Th.11.1] (wo A=I) vorgehen und erhalten, daß $D(V_{1,\,2})$ abgeschlossen sind. Da $V_{1,\,2}$ beidseitig stetig sind (weil dies auch für A zutrifft), folgt die Abgeschlossenheit von $R(V_{1,\,2})$. Nun ist $P_{ac}(H_0)\mathcal{H}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $D(V_{1,\,2})$, woraus sich die Abgeschlossenheit von $V_{1,\,2}$ $P_{ac}(H_0)\mathcal{H}$, also auch die von $A^{-1}V_{1,\,2}$ $P_{ac}(H_0)\mathcal{H}$ und somit die von $R(W_{1,\,2})$ ergibt. Wie im oben zitierten Theorem können wir hier zeigen, daß H_0 $D(V_{1,\,2})$ und H^1 $R(V_{1,\,2})$ reduziert. Aus der Ähnlichkeit folgt dann, daß H $R(W_{1,\,2})$ reduziert.

Die Verknüpfungsrelationen folgen wie im Fall "gewöhnlicher" Wellenoperatoren. Für $v \in (P_{ac}(H_0))^{\perp}$ ist $W_{1, 2} v = 0$. $P_{ac}(H_0)$ ist ein orthogonaler Projektor und wegen $P_{ac}(H_0) J = J P_{ac}(H_0)$ (s.[K Th.X 1.6]) auch J-orthogonal. Es gilt wegen der J-Unitarität von exp (i H t):

$$(\exp (i H t) \exp (-i H_0 t) v, J \exp (i H t) \exp (-i H_0 t) w) =$$

= $(\exp (-i H_0 t) v, J \exp (-i H_0 t) w) = (v, J w)$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $v, w \in P_{ac} \mathcal{H}$. Damit sind die $W_{1, 2}$ nach unserer Definition partiell J-isometrisch. \square

Wellenoperatoren in 3 lassen sich i.A. nicht analog zu den Einteilchen - Wellenoperatoren als

s-lim exp(iBt) exp(-iB₀t)
$$P_{ac}(B_0)$$
 (1.41)
t-±0

definieren, was bekannt ist (s. z.B. [BR]) und was wir in Abschnitt 1.4 kurz ableiten werden. Eine Möglichkeit einen Operator in \mathcal{T} zu finden, der wesentliche Eigenschaften von Wellenoperatoren aufweist, ist, die Implementierung der durch Wellenoperatoren in \mathcal{H} generierten Feldoperatortransformationen zu betrachten.

Bemerkung 1.8:

Nach Satz 1.4 existieren Operatoren, welche die durch W_{1, 2} generierten Feldoperatortransformationen partiell isometrisch implementieren, falls

$$P_{\varepsilon}^{0} W_{j} P_{-\varepsilon}^{0} \in \mathcal{B}_{2}(P_{ac}(H_{0}) \mathcal{H})$$

gilt für $\varepsilon = +, -, j = 1, 2$. Da H ähnlich einem selbstadjungierten Operator sein sollte, ist $\sigma(H) \in \mathbb{R}$. Aus den Verknüpfungsrelationen der Einteilchen-Wellenoperatoren ergibt sich:

$$(H - i\eta)^{-1} W_{1, 2} = W_{1, 2} (H_0 - i\eta)^{-1} \quad \forall \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
.

Wiederum wegen der Ähnlichkeit von H zu einem selbstadjungierten Operator, können wir die expliziten Ausdrücke für die spektralen Projektoren selbstadjungierter Operatoren [K. Lemma VI 5.6] benutzen. Wir nehmen an, daß es eine Lücke im Spektrum von H gibt, so daß mit P+, P- J-symmetrische Projektoren in \mathcal{X} existieren, welche mit H vertauschen und für die P+ + P- = I gilt. Diese Projektoren sind ähnlich den spektralen Projektoren auf den positiven und negativen Teilraum des zu H ähnlichen selbstadjungierten Operators. Dann erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$P_{\pm} W_{1, 2} = W_{1, 2} P_{\pm}^{0}$$

Es gilt also P^0_{ϵ} W_j $P^0_{-\epsilon}$ ϵ $\mathscr{B}_2(P_{ac}(H_0)\mathscr{H})$ genau dann, wenn

$$P^0_\epsilon \, P_{-\epsilon} \, W_j \ \epsilon \ \mathscr{B}_2(P_{ac}(H_0) \, \mathscr{H}) \ \text{oder} \ P_{ac}(H_0) \, P^0_\epsilon \, P_{-\epsilon} \, W_j \ \epsilon \ \mathscr{B}_2(\, \mathscr{H}) \, , \, was \, wegen$$

$$P_{ac}(H_0) P_{\varepsilon}^0 P_{-\varepsilon} W_j J W_j^* J = P_{ac}(H_0) P_{\varepsilon}^0 P_{-\varepsilon} P_j$$

und

$$P_{ac}(H_0) P_{\varepsilon}^0 P_{-\varepsilon} P_j W_j = P_{ac}(H_0) P_{\varepsilon}^0 P_{-\varepsilon} W_j$$
,

äquivalent zu

$$P_{ac}(H_0) P_{\varepsilon}^0 P_{-\varepsilon} P_{j} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$$
(1.42)

ist, jeweils für ϵ = +, - , j = 1, 2 .

Nun benötigen wir für die Anwendung von Satz 1.4 zusätzlich, daß die Projektoren P_1 , 2 mit J vertauschen (Für $P_{ac}(H_0)$ ist dies trivial erfüllt [K Th.X 1.6].). Für den Fall des Klein-Gordon Hamiltonian kann man sich nun überzeugen, daß diese Bedingung praktisch nur erfüllt ist, falls $P_1 = P_2 = I$ und damit das Spektrum von H rein absolut stetig ist (Anhang Satz A.1). Als praktische Anwendung gelangen wir so nur zu einer Aussage über die Implementierung von J-unitären Wellenoperatoren. Nach dem oben Gezeigten liegt die unitäre Implementierbarkeit in diesem Fall genau dann vor, wenn

$$P_{+}^{0} P_{-} , P_{-}^{0} P_{+} \in \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H}) .$$
 (1.43)

Um zu einer "Implementierung der Wellenoperatoren außerhalb dieses Spezialfalls zu gelangen, nutzt uns eine Modifizierung von Satz 1.4 im nächsten Abschnitt. Dort werden die Bedingungen (1.43) von zentraler Bedeutung sein.

1.4 Konstruktion von Fockraum -Hamiltonian und - "Wellenoperator"

Den zweite Zugang zu den dynamischen Größen im Fockraum können wir mit der Frage einleiten, wann in $\mathcal F$ für die Feldoperatoren eine weitere Quantisierung vorliegt, bezüglich welcher der Fockraum - Hamiltonian B kanonisch gegeben ist; d.h., wann gibt es ein weiteres System aus Leiteroperatoren und Vakuum, das $\mathcal F$ aufspannt, nun gewonnen mit Hilfe einer Zerlegung von $\mathcal H$ in Teilräume, welche H reduzieren?

In der Sprache der Theorie der C*-Algebren ausgedrückt ist gefragt, wann die Fock-Darstellung aus 1.1 äquivalent ist zu einer solchen, welche durch eine Zerlegung von \mathcal{H} in spektrale Teilräume für H bestimmt ist. Beantwortet wurde diese Frage schon für Fock-Darstellungen der Clifford-Algebra in [MV] und später in [P2;KSch1]. Uns soll hier besonders interessieren, was für "starke" externe Felder gesagt werden kann. Weiter wird gezeigt, daß die obige Frage mit den Beweismethoden für die unitäre Implementierbarkeit (Satz 2.1) gelöst werden kann.

Sei H J-selbstadjungiert, P,,P- zugehörige "spektrale Projektoren", worunter wir J-symmetrische Projektoren, die mit H vertauschen, verstehen wollen. Gelte weiter

$$P_{+} + P_{-} = I$$
 (1.44)

Sei K ϵ $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ gegeben durch

$$K := P_{+} - P_{-}$$
 (1.45)

Wir definieren auf D_0 :

$$\Phi(P_{*}v) =: \tilde{a}(P_{*}JP_{*}v) , \Phi(P_{-}v) =: -\tilde{b}^{*}(C_{1}P_{-}JP_{-}v)$$

für alle $v \in \mathcal{H}$ und erhalten :

$$\tilde{a}(f) = a(P_{+}^{0} f) - b^{*}(C P_{-}^{0} f) ,$$

$$\tilde{b}^{*}(C_{1} g) = -a(P_{+}^{0} g) + b^{*}(C P_{-}^{0} g)$$
(1.46)

für f ϵ \mathscr{H}_{+} , g ϵ \mathscr{H}_{-} ; hier bezeichne C_{1} eine Konjugation in \mathscr{H}_{-} (Man beachte, daß

wegen der J-Symmetrie von P- $C_1^2 = C_1$, $(C_1 g, J C_1 g^1) = (g^1, J g)$ für alle $g, g^1 \in \mathcal{H}_-$ gilt.). Sei weiter:

$$\tilde{a}^*(f) := a(f)^*, \quad \tilde{b}^*(g) := \tilde{b}(g)^*.$$
 (1.47)

Aus (1.9) (auf $D_{_{\infty}}$) ergeben sich die Vertauschungsrelationen auf $D_{_{\infty}}$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{f}) , \tilde{\mathbf{a}}^*(\mathbf{f}') \end{bmatrix} = (\mathbf{f}, \mathbf{J} \mathbf{f}') = (\mathbf{f}, \mathbf{f}')_{\mathbf{J}K} ,$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{g}) , \tilde{\mathbf{b}}^*(\mathbf{g}') \end{bmatrix} = (\mathbf{g}, -\mathbf{J} \mathbf{g}') = (\mathbf{g}, \mathbf{g}')_{\mathbf{J}K} ,$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{f}) , \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{f}') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{g}) , \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{g}') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{f}) , \tilde{\mathbf{b}}^{(*)}(\mathbf{g}) \end{bmatrix} = 0$$

$$(1.48)$$

für alle f, f' ϵ \mathcal{H}_+ , g, g' ϵ \mathcal{H}_- . Hier bezeichnet $(\cdot,\cdot)_{JK}$ folgende sesquilineare Form auf \mathcal{H} :

$$(f, g)_{JK} := (f, J K g) \quad \forall f, g \in \mathcal{H}.$$

$$(1.49)$$

Man beachte, daß JK ein symmetrischer, beidseitig stetiger Operator auf & ist.

Insofern, als daß auf der rechten Seite von (1.48) nicht mehr das \mathcal{X} -Skalarprodukt erscheint, ist die Transformation (1.46) keine Bogoliubov-Transformation. Die auftretende Sesquilinearform (1.49) ist jedoch an dieser Stelle sehr "natürlich", da bezüglich dieser Form der Operator H symmetrisch ist.

Gesucht ist nun nach einem Vakuum für die Operatoren $\tilde{a}^{(*)}(P_+ v)$, $\tilde{b}^{(*)}(P_- v)$, d.h., nach einem nichttrivialen (auf eins normierten) Vektor $\tilde{\Omega}$ aus \mathscr{F} mit

$$\tilde{\Omega} \in D_{\Omega}$$
, $\tilde{a}(f) \tilde{\Omega} = \tilde{b}(g) \tilde{\Omega} = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}_{+}, \forall g \in \mathcal{H}_{-}$. (1.50)

Falls es einen solchen Vektor gibt, ist wegen der Irreduzibilität der Weylalgebra klar, daß er bis auf einen Phasenfaktor eindeutig durch (1.50) bestimmt ist.

Wir müssen zunächst verlangen, daß JK nichtnegativ ist, wäre dies nicht der Fall, so würde unmittelbar aus der Existenz von $\tilde{\Omega}$ folgen :

$$\parallel \tilde{a}^*(f) \tilde{\Omega} \parallel^2 = (\tilde{\Omega}, [\tilde{a}(f), \tilde{a}^*(f)] \tilde{\Omega}) = (f, Jf) \parallel \tilde{\Omega} \parallel^2$$

und damit für $f \in \mathcal{H}_+$ mit (f, J f) < 0 ein Widerspruch.

Es sei vermerkt, daß JK genau dann nichtnegativ ist, wenn dies auf J \mathcal{H}_+ und -J \mathcal{H}_- zutrifft. Weiter folgt aus J K ≥ 0 sofort $\mathcal{H}_+ \cap \mathcal{H}_-^0 = \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^0 = \{0\}$.

Wir entwickeln nun notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz des Vakuums (1.50), indem wir bekannte technische Lemmata zum Beweis von Satz 2.1 so verallgemeinern, daß sie auch hier anwendbar sind. Da nun die Grundlagen der Beweise der folgenden Sätze 1.9 und 1.11 und des Lemma 1.10 bekannt sind, haben wir diese nur im Anhang hinzugefügt.

Ausgangspunkt seien die abgeschlossenen Teilräume von & M und M'. Bezeichnen

$$A_1 \in \mathcal{B}(M, \mathcal{H}^0_+)$$
, $A_2 \in \mathcal{B}(M', \mathcal{H}^0_+)$, $A_3 \in \mathcal{B}(M, \mathcal{H}^0_-)$, $A_4 \in \mathcal{B}(M', \mathcal{H}^0_-)$. (1.51)

Satz 1.9

Gelte $R(A_1) = \mathcal{H}^0_+$, $R(A_4) = \mathcal{H}^0_-$ und existiere ein Vektor $\Omega' \in D_{\bigcap}$, $\Omega' \neq 0$ mit

$$a(A_1 \mathbf{v}) \Omega^{\mathsf{I}} = b^{\mathsf{*}}(C A_3 \mathbf{v}) \Omega^{\mathsf{I}} \quad \forall \mathbf{v} \in M ,$$

$$b(C A_4 \mathbf{v}) \Omega^{\mathsf{I}} = a^{\mathsf{*}}(A_2 \mathbf{v}) \Omega^{\mathsf{I}} \quad \forall \mathbf{v} \in M^{\mathsf{I}} .$$
 (1.52)

Dann sind A₂ und A₃ H.S. - Operatoren.

Für einen Operator A ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}^0_-, \mathcal{H}^0_+)$ bezeichne $\{\lambda_j \epsilon \mathbb{R} \mid j \epsilon \mathbb{N} \}$, $0 < \lambda_j \le \theta$ $\forall j \epsilon \mathbb{N}$ die singulären Werte von A. Durch

$$A a^*b^* := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a^*(f_j^0) b^*(g_j^0)$$
 (1.53)

mit orthonormalen Systemen $\{f_j^0 \mid j \in \mathbb{N}\}$ und $\{g_j^0 \mid j \in \mathbb{N}\}$ für \mathcal{H}^0_+ und \mathcal{H}^0_- ist ein auf D_f wohldefinierter Operator mit Bild in D_f gegeben. Es gilt :

Lemma 1.10

Sei A $\in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}^0_-, \mathcal{H}^0_+)$ und

$$\exp(A \ a^*b^*) := s \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (A \ a^*b^*)^n . \tag{1.54}$$

Dann ist Ω aus D(Aa*b*) genau dann, wenn spr A < 1 ist. In diesem Fall ist exp Aa*b* ein beschränkter Operator auf D mit Bild in D_{∞}. Es gilt:

$$\| \exp (A a^*b^*) \Omega \| = \det (Id_{20} - A^*A)^{-\frac{1}{2}}.$$
 (1.55)

Mit diesem Ergebnis können wir nun den folgenden Satz formulieren :

Satz 1.11

Seien $A_1,...,A_4$ wie in Satz 1.9 und $A =: A_2 A_4^{-1} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}^0_-,\mathcal{H}^0_+)$. Gelte weiter :

$$||A|| < 1 \text{ und } A_2^*A_1 = A_4^*A_3$$
 (1.56)

Dann ist Ω' (1.52) gegeben durch:

$$Ω' = \exp(i β) \det (Id_{\mathcal{H}_{-}^{0}} - A^*A)^{-\frac{1}{2}} \exp(A a^*b^*) Ω ,$$
(1.57)

mit $0 \le \beta < 2\pi$.

Mit den Sätzen 1.9 und 1.11 läßt sich nun sofort Satz 2.1 beweisen. Äquivalent zur Existenz eines in ${\mathscr F}$ unitären Operators ${\mathscr U}$, welcher (1.21) erfüllt, ist (, wie bekannt oder wie man im weiteren mit Satz 1.17 leicht sieht,) die Existenz eines Vakuums Ω' für die mittels (1.24) transformierten Leiteroperatoren :

$$\Phi (J U J v) =: a'(P^0_+ v) + b'^*(C P^0_- v)$$

oder

$$a'(P_{+}^{0} v) = a(P_{+}^{0} U P_{+}^{0} v) - b^{*}(C P_{-}^{0} U P_{+}^{0} v) ,$$

$$b'(C P_{-}^{0} v) = -a^{*}(P_{+}^{0} U P_{-}^{0} v) + b(C P_{-}^{0} U P_{-}^{0} v)$$
(1.58)

 $\forall \ v \in \mathscr{H} \ . \ \mathrm{Mit} \quad \mathrm{A}_1 := \mathrm{P}^0_+ \ \mathrm{U} \ \mathrm{P}^0_+ \ , \ \mathrm{A}_2 := \mathrm{P}^0_+ \ \mathrm{U} \ \mathrm{P}^0_- \ , \ \mathrm{A}_3 := \mathrm{P}^0_+ \ \mathrm{U} \ \mathrm{P}^0_+ \ , \ \mathrm{A}_4 := \mathrm{P}^0_- \ \mathrm{U} \ \mathrm{P}^0_- \ \ \mathrm{erh\"{a}lt}$

man wegen der J-Unitarität von U, daß $R(A_1) = \mathcal{H}^0_+$, $R(A_4) = \mathcal{H}^0_-$ gilt und die Bedingung (1.56) erfüllt ist. Mit den Sätzen 1.9 und 1.11 folgt damit, daß es ein Vakuum für die Operatoren (1.58) genau dann gibt, wenn P^0_\pm U P^0_\mp H.S. - Operatoren sind.

Nun zurück zu der Frage, wann das Vakuum $\tilde{\Omega}$ (1.50) existiert.

Zur Anwendung von Satz 1.9 beginnen wir mit den Abkürzungen

$$\mathcal{H}_{\pm} := P_{\pm} \mathcal{H} \tag{1.59}$$

$$P_1:\,\mathcal{H}_+ \to \,\mathcal{H}_+^0\ \ \, ,\,P_1\,f:=\,P_+^0\,f\ \, ,\,f\,\epsilon\,\,\mathcal{H}_+\ \ \, ,$$

$$P_2: \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+^0 , P_2 g := P_+^0 g , g \in \mathcal{H}_- , \qquad (1.60)$$

$$P_3: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-^0$$
, $P_3 f := P_-^0 f$, $f \in \mathcal{H}_+$,

$$P_4: \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_-^0$$
, $P_4g:=P_-^0g$, $g \in \mathcal{H}_-$.

Lemma 1.12

Sei $\mathcal{H}_+ \cap \mathcal{H}_-^0 = \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^0 = \{0\}.$

Dann ist $P_1^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^0_+, \mathcal{H}_+)$, $P_4^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^0_-, \mathcal{H}_-)$.

Es gilt

$$P_2^* P_1 = P_4^* P_3 . (1.61)$$

Beweis: Es ist

$$N(P_1) = \{ f \in \mathcal{H}_+ \mid P_+^0 f = 0 \text{ i.e. } f = P_-^0 f \} = \mathcal{H}_+ \cap \mathcal{H}_-^0 ,$$

 $N(P_4) = \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^0 .$ (1.62)

Sei f' $\epsilon R(P_1)^{\perp}$, wobei hier das orthogonale Komplement in \mathcal{H}^0_+ gemeint sei, so gilt für alle f $\epsilon \mathcal{H}_+$:

$$0 = (P_1 f, f') = (P_+^0 f, f') = (f, f') = (f, J f'), \qquad (1.63)$$

da die \mathcal{H}_{\pm} J-orthogonal zueinander sind. Es folgt f' ϵ \mathcal{H}_{-} , also $R(P_1)^{\perp} \subset \mathcal{H}_{-} \cap \mathcal{H}_{+}^{0}$. (Umgekehrt folgt für f' ϵ $\mathcal{H}_{-} \cap \mathcal{H}_{+}^{0}$ (1.63) und damit insgesamt $R(P_1)^{\perp} = \mathcal{H}_{-} \cap \mathcal{H}_{+}^{0}$.) Damit ist $R(P_1) = \mathcal{H}_{+}^{0}$, ebenso folgt $R(P_4) = \mathcal{H}_{-}^{0}$. P_1 , P_4 sind

abgeschlossen und invertierbar, mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt der erste Teil der Behauptung.

Der zu P₁ adjungierte Operator P₁* ist gegeben über

$$P_1^*: \mathcal{H}^0_+ \to \mathcal{H}_+ \quad \text{mit} \quad (P_1 \text{ f, f'})_{\mathcal{H}^0_+} = (f, P_1^* f')_{\mathcal{H}_+} \quad \forall \text{ f } \epsilon \mathcal{H}_+, \forall \text{ f' } \epsilon \mathcal{H}^0_+.$$

Nun gilt wegen der J-Orthogonalität von \mathcal{H}_{\pm} :

$$(P_{1} f, f')_{\mathcal{H}_{+}^{0}} = (P_{+}^{0} f, f') = (f, P_{+}^{0} f') = (f, J K f')$$

$$= (f, f')_{JK}$$

$$= (P_{+} f, P_{+} f')_{JK} + (P_{-} f, P_{-} f')_{JK}$$

$$= (f, J K P_{+} f')_{\mathcal{H}_{+}}$$

$$= (f, J P_{+} f')_{\mathcal{H}_{+}}$$

 $\forall f \in \mathcal{H}_+, \forall f' \in \mathcal{H}_+^0$. Somit ist

$$P_1^*: \mathcal{H}_+^0 \longrightarrow \mathcal{H}_+, P_1^*f = P_+JP_+f$$

und analog

$$\begin{split} & P_{2}^{\;*}: \; \mathscr{H}^{0}_{+} \longrightarrow \mathscr{H}_{-}, \;\; P_{2}^{\;*}f = P_{-} \, J \, P_{-} \, f \;\; , \\ & P_{3}^{\;*}: \; \mathscr{H}^{0}_{-} \longrightarrow \mathscr{H}_{+}, \;\; P_{3}^{\;*}g = - \; P_{+} \, J \, P_{+} \, g \\ & P_{4}^{\;*}: \; \mathscr{H}^{0}_{-} \longrightarrow \mathscr{H}_{-}, \;\; P_{4}^{\;*}g = - \; P_{-} \, J \, P_{-} \, g \;\; , \, f \, \epsilon \, \, \mathscr{H}^{0}_{+}, \, g \, \epsilon \, \, \mathscr{H}^{0}_{-} \;\; . \end{split}$$

Also gilt für f $\epsilon \mathcal{H}_{\bullet}$:

$$(P_2^*P_1 - P_4^*P_3) f = P_-JP_-(P_+^0 + P_-^0) f = P_-JP_-f = 0$$
.

Mit Lemma 1.12 folgt nun unmittelbar aus Satz 1.9 mit $M \equiv \mathcal{H}_+$, $M' \equiv \mathcal{H}_-$, $A_j \equiv P_j$, j=1,...,4:

Korollar 1.13

Sei $\mathcal{H}_{+} \cap \mathcal{H}_{-}^{0} = \mathcal{H}_{-} \cap \mathcal{H}_{+}^{0} = \{0\}$ und existiere ein nichttrivialer Vektor $\tilde{\Omega}$ wie in (1.50). Dann sind $P_{+}^{0} P_{-}$, $P_{-}^{0} P_{+}$ Hilbert - Schmidt Operatoren.

In Anlehnung an [KSch1] nennen wir Potentiale, welche zu der Bedingung (1.43)

$$P_+^0 P_-, P_-^0 P_+ \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$$

führen, regulär. Wegen der beidseitigen Stetigkeit von J, und da $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ein *-Ideal der Banachalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist, folgt wegen

$$J(P_+^0 P_-)^*J = P_-P_+^0 ; J(P_-^0 P_+)^*J = P_+P_-^0$$

(es ist $(P_{\pm})^* = J P_{\pm} J$) und

$$P_{+}^{0} P_{-} = P_{+}^{0} (P_{-} - P_{-}^{0}) \qquad P_{-}^{0} P_{+} = P_{-}^{0} (P_{+} - P_{+}^{0})$$

$$= P_{+}^{0} (P_{+}^{0} - P_{+}) \qquad = P_{+}^{0} (J - K)/2 ,$$

$$= - P_{+}^{0} (J - K)/2 ,$$

sowie

$$(J - K) = 2 (P_+^0 (P_- + P_-) - (P_+^0 + P_-^0) P_+)$$
$$= 2 (P_+^0 P_- - P_-^0 P_+) ,$$

daß auch

$$P_{+} P_{-}^{0}, P_{-} P_{+}^{0} \in \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H})$$
 und
$$J - K \in \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H})$$
 (1.64)

zwei äquivalente Regularitätsbedingungen sind.

Nun zu der hinreichenden Bedingung für die Existenz von $\tilde{\Omega}$ (1.50) nach Satz 1.11. Sei dazu J-K ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ und zuerst (wie oben angesprochen) JK nichtnegativ. Wir bilden

$$A: \mathcal{H}^0_- \to \mathcal{H}^0_+$$
, $Ag = P_2 P_4^{-1} g$ für $g \in \mathcal{H}^0_-$. (1.65)

A ist nach Lemma 1.12 aus $\mathcal{B}(\mathcal{H}^0_+,\mathcal{H}^0_+)$ und weiter gilt :

$$\| A \|^{2} = \sup_{\substack{g \in \mathcal{H}_{-}^{0} \\ g \neq 0}} \frac{\| P_{2} P_{4}^{-1} g \|^{2}}{\| g \|^{2}} = \sup_{\substack{g' \in \mathcal{H}_{-}^{-} \\ g' \neq 0}} \frac{\| P_{2} g' \|^{2}}{\| P_{4} g' \|^{2}}$$

$$= \sup_{\substack{g' \in \mathcal{H}_{-}^{-} \\ g' \in \mathcal{H}_{-}^{-} \end{pmatrix}} \frac{\| P_{2} P_{4}^{-1} g \|^{2}}{(g', J K g') + \| P_{2} g' \|^{2}}.$$
(1.66)

Es ist also ||A|| < 1 genau dann, wenn JK positiv definit, zuerst einmal auf \mathcal{H}_{-} und wegen $(P_2 P_4^{-1})^* = P_3 P_1^{-1}$ (s. (1.61)) auch auf \mathcal{H}_{+} ist.

P₂ ist nach Voraussetzung ein H.S. - Operator, somit auch A. Wir erhalten als Korollar zu Satz 1.11:

Korollar 1.14

Sei JK positiv definit, J-K ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$.

Dann ist $\tilde{\Omega}$ (1.50) gegeben durch (1.54) mit A aus (1.65).

Wie wir oben sahen, läßt sich das Vakuum für die Operatoren $\tilde{a}^{(*)}$, $\tilde{b}^{(*)}$ nur dann durch die "konventionelle" Konstruktion darstellen, wenn JK positiv definit ist. Diese Forderung ist (s. auch Kapitel 2) eine Bedingung an die Kopplungsstärke der äußeren Felder. Für Felder, deren Kopplungsstärke diese kritische Grenze überschreitet, gibt es nach dem oben Gezeigten kein eindeutiges Vakuum $\tilde{\Omega}$. Wir sehen, daß das Modell des äußeren Feldes an dieser Stelle durch die Unterschiede der Spin-Statistik im Gegensatz zum Fermionenfall nicht anwendbar ist. Es ist daher notwendig für große Energien "realistischere" Wechselwirkungen einzuführen, wie etwa (in mathematisch nicht strengen Modellen s. z.B. [RFK]) durch die Addition der Coulombenergie des Mesonfeldes zum Hamiltonian.

Die Bedingung der positiven Definitheit von JK impliziert, daß $(\cdot,\cdot)_{JK}$ ein Skalarprodukt wird, welches wegen

$$c_1 \parallel v \parallel \leq \parallel (JK)^{\frac{1}{2}} v \parallel \leq c_2 \parallel v \parallel , 0 < c_1 \leq c_2 \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

topologisch äquivalent zu dem ${\mathcal H}$ -Skalarprodukt ist. Den Hilbertraum bestehend aus

den Elementen von $\mathscr H$ und dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{\mathsf{JK}}$ nennen wir $\mathscr H_{\mathsf I}$. Wegen

$$((H - \lambda)^{-1} v, JKw) = (J(H - \lambda)^{-1} v, Kw) = (v, J(H - \overline{\lambda})^{-1} Kw)$$

= $(v, JK(H - \overline{\lambda})^{-1} w)$

für $v, w \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \rho(H)$ ist H in \mathcal{H}_1 selbstadjungiert und H ähnlich einem selbstadjungierten Operator, den wir mit

$$D(H') := D(H), \quad H'v := (JK)^{\frac{1}{2}} H (JK)^{-\frac{1}{2}} v \quad \forall v \in D(H')$$
 (1.67)

explizit angeben können.

Da wir uns auf den Fall positiv definiten JK's beschränken mußten, können wir von vornherein versuchen, nur mit Hilfe von Satz 1.2 notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von $\tilde{\Omega}$ (1.50) zu erreichen.

Gibt es nämlich einen Operator Q, derart daß:

$$Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
 J-unitär ist mit $Q P_{\pm}^{0} = P_{\pm} Q$, (1.68)

so liefert Satz 1.2, daß die durch Q generierte Transformation der Feldoperatoren genau dann unitär implementierbar ist, wenn $P^0_+ Q P^0_-$, $P^0_- Q P^0_+$ aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ sind. Dies ist wegen (1.68) und da $Q^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ der Bedingung $J-K \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ äquivalent. In diesem Fall existiert also ein Vakuum Ω^1 für Operatoren (1.58) mit U=Q und mit (1.68) gilt für alle $v \in \mathcal{H}$:

$$a(P_{+}^{0} P_{+} Q v) \Omega' = b^{*}(C P_{-}^{0} P_{+} Q v) \Omega'$$

 $a^{*}(P_{+}^{0} P_{-} Q v) \Omega' = b(C P_{-}^{0} P_{-} Q v) \Omega'$

Wegen $R(Q) = \mathcal{H}$ und mit (1.46) haben wir damit das Problem, $\tilde{\Omega}$ (1.50) zu finden, gelöst.

Es bleibt also zu prüfen, wann die Bedingung (1.68) erfüllt ist.

Satz 1.15

Existiert ein Operator Q mit (1.68), so ist JK positiv definit.

Bezeichne $H(\kappa)$ den J-selbstadjungierten Hamiltonian in Abhängigkeit von der Kopplungskonstante $\kappa \in [0,1]$ mit $H(0) = H_0$, H(1) = H; seien $P_{\pm}(\kappa)$ zugehörige spektrale Projektoren. Ist $\kappa \longmapsto P_{\pm}(\kappa)$ stetig auf [0,1], so existiert ein Operator Q mit (1.68).

Beweis: Aus der Existenz eines Q, für das (1.68) gilt, folgt wegen Q J = K Q, $R(Q) = \mathcal{H}, Q^{-1} = J Q^* J \in \mathcal{B}(\mathcal{H}):$

$$(v, J K v) = (Q w, J K Q w)$$

= $(w, Q^*J K Q w)$
= $(w, Q^*J Q J w)$
= $||w||^2 = ||Q^{-1} v||^2 \quad \forall v \in \mathcal{H}$

und damit die positive Definitheit von JK.

Ist nun $\kappa \mapsto P_{\pm}(\kappa)$ stetig auf [0,1], so gibt es für jedes $\kappa \in (0,1)$ eine Umgebung in [0,1], so daß für alle κ^{I} aus dieser Umgebung

$$\| P_{\bullet}(\kappa) - P_{\bullet}(\kappa^{\scriptscriptstyle \parallel}) \| < 1$$

gilt. Nun wissen wir aus [K S.156], daß der Operator

$$Q(\kappa,\kappa^{\mathsf{I}}) := (I + (P_{\mathsf{I}}(\kappa) - P_{\mathsf{I}}(\kappa^{\mathsf{I}}))^{2})^{-\frac{1}{2}} (P_{\mathsf{I}}(\kappa) P_{\mathsf{I}}(\kappa^{\mathsf{I}}) + P_{\mathsf{I}}(\kappa) P_{\mathsf{I}}(\kappa^{\mathsf{I}}))$$

aus $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ ist und die Eigenschaft

$$\mathsf{Q}(\kappa,\kappa^{\mathsf{I}})\;\mathsf{P}_{\pm}(\kappa^{\mathsf{I}}) = \mathsf{P}_{\pm}(\kappa)\;\mathsf{Q}(\kappa,\kappa^{\mathsf{I}})$$

hat. Wie man leicht sieht, folgt aus der J-Symmetrie der $P_{\pm}(\kappa)$, die J-Unitarität von $Q(\kappa,\kappa')$ für κ , κ' ϵ [0,1]. Eine endliche Hintereinanderausführung dieser Operation führt uns zu einer Überdeckung des Intervalls [0,1], das Produkt der so gewonnenen Operatoren $Q(\kappa,\kappa')$ hat die gewünschte Eigenschaft (1.68).

Wir können Satz 2.1 somit nicht für schwächere Bedingungen als die positive Definitheit von JK direkt anwenden. Andererseits zeigt die hinreichende Bedingung für die Existenz von Q (1.68), daß dies immer dann konstruiert werden kann, wenn die beiden Teile des durch P_{\pm} getrennten Spektrums getrennt "bleiben" und nicht mischen.

Für den Rest dieses Abschnittes wollen wir annehmen, daß JK positiv definit und J-K aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ sei. Wir können nun einen in \mathcal{F} unitären Operator angeben, welcher die Leiteroperatoren $a^{(*)}$, $b^{(*)}$ und $\tilde{a}^{(*)}$, $\tilde{b}^{(*)}$ ineinander transformiert.

Satz 1.16

Seien $\{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}, \{g_j \mid j \in \mathbb{N}\} \text{ und } \{f_j^0 \mid j \in \mathbb{N}\}, \{g_j^0 \mid j \in \mathbb{N}\}$ J-orthonormale und orthonormale Basen für \mathcal{H}_+ , \mathcal{H}_- und \mathcal{H}_+^0 , \mathcal{H}_-^0 .

Wir definieren den Operator O durch

$$\mathcal{O}\Omega := \det \left(\text{ Id}_{\mathcal{H}_{-}^{0}} - A^{*}A \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(A a^{*}b^{*} \right) \Omega \left(= \tilde{\Omega} \right)$$

$$\mathcal{O}_{1} = \prod_{l=1}^{n} a^{(*)} (f_{i_{l}^{0}}) \prod_{k=1}^{r} b^{(*)} (g_{j_{k}^{0}}) \Omega := \prod_{l=1}^{n} \tilde{a}^{(*)} (f_{i_{l}^{1}}) \prod_{k=1}^{r} \tilde{b}^{(*)} (g_{j_{k}^{1}}) \mathcal{O}\Omega , \qquad (1.69)$$

sowie durch lineare Erweiterung auf die Menge

$$D^{i} := \mathscr{L} \left\{ \prod_{l=1}^{n} a^{(*)}(f_{i_{l}}^{0}) \prod_{k=1}^{r} b^{(*)}(g_{j_{k}}^{0}) \Omega \mid n, r, i, j \in \mathbb{N} \right\} . \tag{1.70}$$

Hier ist A wie in (1.65) und die weiteren Ausdrücke wie in (1.53), (1.54) definiert. Die Abkürzung (*) in (1.69) ist hier so gemeint, daß falls auf der linken Seite $a^*(f_i^0)$ steht, rechts $\tilde{a}^*(f_i)$ erscheint, etc. .

Mit $\mathcal O$ ist hierdurch ein dicht definierter isometrischer Operator in $\mathcal F$ gegeben, sein Abschluß ist unitär.

Beweis: Nach Lemma 1.10 sind die rechten Seiten der Gleichungen (1.69) wohldefiniert (es ist $O\Omega \in D_m$). Mit den Bezeichnungen aus der Behauptung gilt:

$$\begin{pmatrix} \prod_{l=1}^{n} a^{*}(f_{i_{l}}^{0}) \Omega, \prod_{k=1}^{r} a^{*}(f_{j_{k}}^{0}) \Omega \end{pmatrix} = \delta_{nr} \sum_{\sigma \in S_{n}} \prod_{l=1}^{n} (f_{i_{l}}^{0}, f_{j_{\sigma(1)}}^{0})$$

$$= \delta_{nr} \sum_{\sigma \in S_{n}} \prod_{l=1}^{n} \delta_{i_{l}}^{1, j_{\sigma(1)}},$$

etc., wobei S_n die n-elementige symmetrische Gruppe bezeichnet. Wegen der Kommutatorrelationen (1.48) und Lemma 1.10 folgen ebenso Gleichungen wie:

$$\left(\prod_{l=1}^{n} \tilde{a}^{*}(f_{i_{l}}) \tilde{\Omega}, \prod_{k=1}^{r} \tilde{a}^{*}(f_{j_{k}}) \tilde{\Omega}\right) = \delta_{nr} \sum_{\sigma \in S_{n}} \prod_{l=1}^{n} \left(f_{i_{l}}, f_{j_{\sigma(1)}}\right)_{JK}$$

$$= \delta_{nr} \sum_{\sigma \in S_{n}} \prod_{l=1}^{n} \delta_{i_{l}}, \sigma_{(1)}, \qquad (1.71)$$

wobei die J-Orthonormalität $(f_j, f_k)_{l} = \delta_{jk} ||f_j||_{l}^2 = \delta_{jk}$ benutzt wurde. Hieraus ergibt sich für alle Vektoren der Gestalt

$$\psi = \sum_{k=1}^{N} c_{k} \prod_{i_{k}=1}^{n_{k}} a^{*}(f_{i_{k}}^{0}) \prod_{j_{k}=1}^{r_{k}} b^{*}(g_{j_{k}}^{0}) \Omega :$$

$$\| \mathcal{O} \psi \|^{2} = \sum_{k=1}^{N} |c_{k}|^{2} \prod_{i_{k}=1}^{n_{k}} \| f_{i_{k}} \|_{1}^{2} \prod_{j_{k}=1}^{r_{k}} \| g_{j_{k}} \|_{1}^{2} \| \mathcal{O} \Omega \|^{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |c_{k}|^{2} = \| \psi \|^{2} .$$

Somit ist \mathcal{O} eine wohldefinierte Isometrie in \mathcal{F} . Die Segal-Feldoperatoren (s. Abschnitt 1.1) haben mit (1.46) die Form

$$\Phi_{s}(P_{+}^{0} v - C P_{-}^{0} v) = 1/\sqrt{2} \left(\tilde{a}(P_{+} v) + \tilde{a}^{*}(P_{+} v) - \tilde{b}(C_{1} P_{-} v) - \tilde{b}^{*}(C_{1} P_{-} v) \right).$$

Auf D' gilt so wegen (1.69)

$$\mathcal{O} \Phi_s(f_j^0 - C g_k^0) = \Phi_s(f_j + g_k) \mathcal{O} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}$$

und weiter

$$\mathcal{O} \sum_{n=0}^{N} \frac{i^{n}}{n!} (\Phi_{s}(f_{j}^{0} - C g_{k}^{0}))^{n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{i^{n}}{n!} (\Phi_{s}(f_{j} + g_{k}))^{n} \mathcal{O} .$$

Die Vektoren aus D' sind analytische Vektoren für die Segal-Feldoperatoren, der

starke Limes $N \to \infty$ der linken Seite der letzten Gleichung existiert und ist gleich \mathcal{O} $W(f_j^0 - C g_k^0)$, also existiert auch der Limes der rechten Seite und ist gleich $W(f_j + g_k) \mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} W(f_j^0 - C g_k^0) = W(f_j + g_k) \mathcal{O} \quad \forall j, k \in \mathbb{N} \quad \text{auf } D^1.$$

Ersetzen wir $\mathscr O$ durch seinen Abschluß, so gilt diese Gleichung auch auf $\mathscr F$. Wir erhalten

$$W(f_j + g_k) \overline{O} O^* = \overline{O} W(f_j^0 - C g_k^0) O^* = \overline{O} O^* W(f_j + g_k)$$

und

$$\mathcal{O}^* \overline{\mathcal{O}} W(f_j^0 - C g_k^0) = W(f_j^0 - C g_k^0) \mathcal{O}^* \overline{\mathcal{O}}$$

für alle $j, k \in \mathbb{N}$. Da wir es mit vollständigen (J-)Orthonormalsystemen zu tun haben, folgt, wegen der Irreduzibilität der Weyloperatoren :

$$\mathcal{O}^* \overline{\mathcal{O}} = \alpha I$$
 , $\overline{\mathcal{O}} \mathcal{O}^* = \alpha^i I$, α , $\alpha^i \in \mathbb{C}$,

somit die Unitarität von $\overline{\mathcal{O}}$. \square

Ab nun bezeichne O den Abschluß des oben definierten Operators.

Korollar 1.17

Sei
$$\tilde{D} := \mathcal{L} \left\{ \prod_{j=1}^{n} \tilde{a}^{*}(f_{j}) \prod_{k=1}^{r} \tilde{b}^{*}(g_{k}) \tilde{\Omega} \mid f_{j} \in \mathcal{H}_{+}, g_{k} \in \mathcal{H}_{-}; n, r \in \mathbb{N} \right\}.$$
 (1.72)
Dann ist \tilde{D} dicht in \mathcal{F} .

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1.16, da \tilde{D} das Bild einer in ${\mathscr F}$ dichten Menge unter einem unitären Operator ist. ${\tt D}$

Analog zur "trivialen Zweitquantisierung" (vgl. 1.1) lassen sich nun Feldoperatortransformationen implementieren. Diese können durch solche J-selbstadjungierten oder partiell J-isometrischen Operatoren in \mathcal{H} generiert werden, welche durch \mathcal{H}_+ , \mathcal{H}_- reduziert werden.

Lemma 1.18

Sei U ϵ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ partiell J-isometrisch mit AB und EB P \mathcal{H} und P' \mathcal{H} . Vertausche U mit K. Sei $\tilde{\Gamma}(U)$ definiert durch

$$\tilde{\Gamma}(U) \; \tilde{\Omega} := \tilde{\Omega} \quad ,$$

$$\tilde{\Gamma}(U) \; \prod_{j=1}^{n} \; \tilde{a}^{*}(f_{j}) \; \prod_{k=1}^{r} \; \tilde{b}^{*}(g_{k}) \; \tilde{\Omega} \; := \; \prod_{j=1}^{n} \; \tilde{a}^{*}(U \; f_{j}) \; \prod_{k=1}^{r} \; \tilde{b}^{*}(C_{1} \; U \; C_{1} \; g_{k}) \; \tilde{\Omega}$$

$$(1.73)$$

für $f_j~\epsilon~\emph{H}_+$, $g_k~\epsilon~\emph{H}_-$, sowie durch lineare Erweiterung auf ganz \tilde{D} .

Der Abschluß von $\tilde{\Gamma}(U)$ ist eine partielle Isometrie aus $\mathscr{B}(\mathscr{F})$ mit AB $\tilde{\Gamma}(P)\mathscr{F}$ und EB $\tilde{\Gamma}(P')\mathscr{F}$. Bezeichnen wir den Abschluß mit demselben Symbol, so gilt auf D $_{\bigcap}$ für die Feldoperatoren :

$$\tilde{\Gamma}(U) \Phi(v) \tilde{\Gamma}(P) = \Phi(J U J v) \tilde{\Gamma}(U)$$
(1.74)

für alle v $\epsilon \, \mathcal{H}$.

Beweis: $\tilde{\Gamma}(U)$ ist wohldefiniert und beschränkt auf einer dichten Menge in \mathscr{F} . Es gilt auf \tilde{D} nach (1.73): $\tilde{\Gamma}(U)^* = \tilde{\Gamma}(J U^*J)$; für U, U' nach Voraussetzung ist: $\tilde{\Gamma}(U) \tilde{\Gamma}(U') = \tilde{\Gamma}(U U')$. Damit folgt

$$\tilde{\Gamma}(\mathrm{U}) \; \tilde{\Gamma}(\mathrm{U})^* = \tilde{\Gamma}(\mathrm{P}^{\scriptscriptstyle \mathsf{I}}) \;\;, \;\; \tilde{\Gamma}(\mathrm{U})^* \tilde{\Gamma}(\mathrm{U}) = \tilde{\Gamma}(\mathrm{P}) \;\;.$$

Weiterhin sind $\tilde{\Gamma}(P)$, $\tilde{\Gamma}(P')$ Projektoren. Da die P, P' J-symmetrisch sind, folgt wegen

$$\tilde{\Gamma}(P)^* = \tilde{\Gamma}(J P^*J) = \tilde{\Gamma}(P)$$

die Orthogonalität von $\tilde{\Gamma}(P)$ und ebenso die von $\tilde{\Gamma}(P')$.

(1.74) folgt mit
$$\Phi(J v) = \tilde{a}(P_+ v) - \tilde{b}^*(C_1 P_- v)$$
 sofort aus (1.73).

Lemma 1.19

Sei U & B(K) partiell J-isometrisch mit AB PK und EB P'K. Gelte weiter

$$KP = PK , KP' = P'K .$$
 (1.75)

Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$U = T Q , \qquad (1.76)$$

wobei Q partiell J-isometrisch mit AB und EB P # , T partiell J-isometrisch mit AB P # und EB P' # ist und T mit K vertauscht.

Beweis: Wenn wir mit U⁺ den Adjungierten zu U in \mathcal{X}_1 bezeichnen, i.e. U⁺ = K J U^{*}J K , so gilt:

$$U^{\dagger}KU = KP$$
 , $UKU^{\dagger} = P^{\dagger}K$,

d.h., U ist in \mathcal{H}_1 "partiell K-isometrisch". Sei $S := U^+U^-$, so ist S in \mathcal{H}_1 symmetrisch und nichtnegativ. Somit ist $\sigma(S) \in [0,\infty)$. Da \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_1 topologisch äquivalent sind, ist das Spektrum eines Operators in \mathcal{H}_1 gleich dem des Operators in \mathcal{H}_2 . Damit ist nach [K.V 3.10] $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ m-akkretiv, die Quadratwurzel $S^{\frac{1}{2}}$ existiert und ist eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt für KSK an der Stelle von S, da K symmetrisch in \mathcal{H}_1 und damit KSK symmetrisch und nichtnegativ in \mathcal{H}_1 ist. Wir können nun dem Beweis von Lemma 1.3 folgen, wo wir J durch K ersetzen und erhalten, da K und K bzw. K0 nach Voraussetzung vertauschen mit K1 und K2 ist.

$$Q K Q = K P = P K$$
,
 $U = T Q$,
 $T K = K T$.

Wegen $Q^+ = Q$ ist weiter $Q^* = JKQ^+KJ = JKQKJ$ und damit $(KQK)^* = JQJ$.

Wir erhalten

$$T^*JT = JQJU^*JUKQK = JQKPQK = JQKQK$$

= JP' ,
 $TJT^* = P'J$, $Q^*JQ = JP$, $QJQ^* = PJ$.

Satz 1.20

Sei $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ J-isometrisch mit EB $P'\mathcal{H}$. Vertausche K mit P'.

Dann ist die durch U generierte Feldoperatorentransformation genau dann isometrisch implementierbar durch eine Isometrie $\mathscr{U} \in \mathscr{B}(\mathscr{F})$ mit EB $\tilde{\Gamma}(P^1)\mathscr{F}$, wenn

$$P_{\pm}^{0} U P_{\mp}^{0} \in \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H}).$$

Beweis: Da nach weiterer Voraussetzung J-K ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ gilt, ist wegen

$$P_{+}^{0} U P_{-}^{0} = (P_{+}^{0} - P_{+}) U P_{-}^{0} + P_{+} U P_{-} + P_{+} U (P_{-}^{0} - P_{-})$$

= $(J-K)/2 U P_{-}^{0} - P_{+} U (J-K)/2 + P_{+} U P_{-}$

die H.S.-Bedingung aus der Voraussetzung äquivalent zu P_{\pm} U P_{\mp} ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$. Da T aus der Zerlegung (1.76) mit P_{\pm} vertauscht, sind diese Bedingungen äquivalent zu P_{\pm} Q P_{\mp} ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ mit Q aus (1.76), was wiederum P_{\pm}^0 Q P_{\mp}^0 ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ gleichkommt. "Implementierungen" für die Bestandteile T und Q der Zerlegung (1.76) erhält man nun mit der Hilfe von Lemma 1.18 und Satz 1.2. Der Beweis von Satz 1.20 verläuft dann völlig analog zu dem von Satz 1.4.

Man beachte, daß, um zu einer Implementierung der durch Q generierten Transformation zu gelangen, Q zumindest J-unitär auf einem Teilraum von $\mathcal H$ sein muß und somit Q und J vertauschen müssen.

Der obige Satz läßt sich natürlich allgemeiner für partielle J-Isometrien beweisen. Die dann im obigen Beweis vermerkte nötige Forderung an P, sowohl mit K wie auch mit J zu vertauschen, ist in der Anwendung jedoch schwer zu erfüllen.

Mit Hilfe von Lemma 1.18 und Satz 1.20 liegt nun die explizite Form des Fockraum-Hamiltonians sowie die "Implementierung" für Wellenoperatoren im Fall $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}$ (H₀) vor.

Satz 1.21

Sei H J-selbstadjungierter Generator der stark stetigen einparametrigen Gruppe gleichmäßig beschränkter J-unitärer Operatoren $\{\exp(i H t) \mid t \in \mathbb{N} \}$.

Dann ist die Gruppe der Zeitentwicklung in \mathcal{F} im Sinne von (1.37) (bis auf einen Phasenfaktor):

$$\exp (i B t) := \tilde{\Gamma}(\exp (i H t)) \tag{1.77}$$

Der in Selbstadjungierte Operator B ist hierbei gegeben durch

$$B \tilde{\Omega} = 0$$

$$B \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}^{*}(f_{i}) \prod_{j=1}^{r} \tilde{b}^{*}(g_{j}) \tilde{\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}^{*}(H f_{k}) \prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \tilde{a}^{*}(f_{i}) \prod_{j=1}^{r} \tilde{b}^{*}(g_{j}) \tilde{\Omega} - \frac{\Gamma}{1} \sum_{l=1}^{r} \tilde{b}^{*}(C_{l} H C_{l} g_{l}) \prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \tilde{a}^{*}(f_{i}) \prod_{\substack{j=1\\i\neq k}}^{r} \tilde{b}^{*}(g_{j}) \tilde{\Omega}$$

$$(1.78)$$

für $f_i \in \mathcal{H}_+ \cap D(H)$, $g_j \in \mathcal{H}_- \cap D(H)$, sowie durch lineare Erweiterung auf

$$D_{B} := \mathscr{L} \{ \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}^{*}(f_{i}) \prod_{j=1}^{r} \tilde{b}^{*}(g_{j}) \tilde{\Omega} \mid f_{i} \in \mathscr{H}_{+} \cap D(H), g_{j} \in \mathscr{H}_{-} \cap D(H); n,r \in \mathbb{N} \}.$$
 (1.79)

B ist wesentlich selbstadjungiert auf D_B .

Ist weiter JH positiv, so ist B nichtnegativ, 0 ist einfacher Eigenwert und das Spektrum von B gegeben durch das von $d\Gamma(|H'|)$, mit H' wie in (1.67) (s.hierzu Lemma 1.1).

Beweis: Zuerst einmal vertauscht exp (i H t) mit K für alle t ϵ R trivial. Wir kürzen ab: exp (i H t) =: Ut. Aus der Definition folgt sofort, daß { $\tilde{\Gamma}(U_t) \mid t \in \mathbb{R}$ } eine Gruppe bildet, weiter sind deren Elemente nach Lemma 1.18 unitär. Die starke Stetigkeit von t $\mapsto \tilde{\Gamma}(U_t)$ auf \tilde{D} erhält man entweder, indem man die Norm des Bildes von

Vektoren mit Ausdrücken wie (1.71) berechnet, aus der starken Stetigkeit von $t \mapsto U_t$, oder aus den (1.11) entsprechenden Ungleichungen für die $\tilde{a}^{(*)}(f)$, $\tilde{b}^{(*)}(g)$, welche die Stetigkeit von $t \mapsto \tilde{a}^{(*)}(U_t f) \psi$, $\forall \psi \in \tilde{D}$, $\forall f \in \mathscr{H}_+$, etc. implizieren. \tilde{D} ist dicht in \mathscr{F} , $t \mapsto \tilde{\Gamma}(U_t)$ gleichmäßig beschränkt und damit stark stetig in \mathscr{F} . Wegen (1.74) gilt (1.37) mit (1.77).

Durch Differentiation der Gleichung (1.73) mit $\tilde{\Gamma}(U) \equiv \tilde{\Gamma}(U_t) = \exp{(i B t)}$ an der Stelle t=0 folgen die Gleichungen (1.78). Da $\exp{(i B t)}$, $t \in \mathbb{R}$, D_B invariant läßt, ist B wesentlich selbstadjungiert auf D_B (s. z.B. [W Th.7.38]).

Wie wir oben sahen, ist H selbstadjungiert im Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{JK}$ (1.49). Ist weiter JH positiv, folgt

$$(f, H f)_{JK} = (f, J H f) > 0$$
, $(g, H g)_{JK} = -(g, J H g) < 0$

 \forall f ϵ $\mathcal{H}_+ \cap D(H)$, \forall g ϵ $\mathcal{H}_- \cap D(H)$, f, g \neq 0. Mit (1.78) erhält man, daß B nichtnegativ mit einfachem Eigenwert 0 ist.

Seien nun $\{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}, \{g_j \mid j \in \mathbb{N}\} \text{ und } \{f_j^0 \mid j \in \mathbb{N}\}, \{g_j^0 \mid j \in \mathbb{N}\} \text{ J-orthonormale}$ und orthonormale Basen für \mathcal{H}_+ , \mathcal{H}_- und \mathcal{H}_+^0 , \mathcal{H}_-^0 in D(H). Bezeichne ϕ einen Vektor

$$\phi = \prod_{l=1}^{n} a^{*}(f_{i_{l}}^{0}) \prod_{k=1}^{r} b^{*}(g_{j_{k}}^{0}) \Omega \qquad n, r \in \mathbb{N} .$$

$$(1.80)$$

Mit dem in Satz 1.16 definierten unitären Operator O erhalten wir:

$$\mathcal{O}^{*} B \mathcal{O} \phi = \mathcal{O}^{*} \left[\sum_{p=1}^{n} \tilde{a}^{*} (H f_{i_{p}}) \prod_{\substack{l=1 \ l\neq p}}^{n} \tilde{a}^{*} (f_{i_{l}}) \prod_{k=1}^{r} \tilde{b}^{*} (g_{j_{k}}) \tilde{\Omega} - \frac{1}{2} \int_{q=1}^{r} \tilde{b}^{*} (C_{1} H C_{1} g_{j_{q}}) \prod_{l=1}^{n} \tilde{a}^{*} (f_{i_{l}}) \prod_{\substack{k=1 \ k\neq q}}^{r} \tilde{b}^{*} (g_{j_{k}}) \tilde{\Omega} \right] \\
= \sum_{p=1}^{n} \sum_{t=1}^{\infty} (f_{t}, H f_{i_{p}})_{JK} a^{*} (f_{t}^{0}) \prod_{\substack{l=1 \ l\neq p}}^{n} a^{*} (f_{i_{l}}^{0}) \prod_{k=1}^{r} b^{*} (g_{j_{k}}^{0}) \Omega - \frac{1}{2} \int_{q=1}^{r} \sum_{s=1}^{\infty} (g_{s}, C_{1} H C_{1} g_{j_{q}})_{JK} b^{*} (g_{s}^{0}) \prod_{l=1}^{n} a^{*} (f_{i_{l}}^{0}) \prod_{\substack{k=1 \ k\neq q}}^{r} b^{*} (g_{j_{k}}^{0}) \Omega . \quad (1.81)$$

Hier wurde nach den Basen von &, und &. entwickelt und

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} c_j \tilde{a}^*(f_j) \psi = \lim_{N\to\infty} \tilde{a}^*(\sum_{j=1}^{N} c_j f_j) \psi$$

 $(c_j \in \mathbb{C})$ für alle $\psi \in \tilde{\mathbb{D}}$, sowie die analogen Identitäten für die \tilde{b}^* benutzt, welche aus den (1.11) entsprechenden Ungleichungen folgen. Bezeichne nun U_1 den auf \mathcal{H} unitären Operator, welcher die Basen ineinander transformiert :

$$U_{1} \cdot := \sum_{j=1}^{\infty} \left[(f_{j}^{0}, \cdot) (JK)^{\frac{1}{2}} f_{j} + (g_{j}^{0}, \cdot) (JK)^{\frac{1}{2}} g_{j} \right].$$

(Man beachte: $(JK)^{-\frac{1}{2}}U_1P_{\pm}^0 = P_{\pm}(JK)^{-\frac{1}{2}}U_1$.) Dann gilt

$$(f_{j}, H f_{k})_{JK} = (f_{j}, K H f_{k})_{JK}$$

$$= (f_{j}^{0}, U_{1}^{*}(JK)^{\frac{1}{2}} K H (JK)^{-\frac{1}{2}} U_{1} f_{k}^{0})$$

$$= (f_{j}^{0}, U_{1}^{*}|H^{1}| U_{1} f_{k}^{0})$$
(1.82)

und

$$- (g_{j}, C_{1} H C_{1} g_{k})_{JK} = (g_{j}, C_{1} K H C_{1} g_{k})_{JK}$$

$$= (g_{i}^{0}, U_{1}^{*}(JK)^{\frac{1}{2}} C_{1} K H C_{1} (JK)^{-\frac{1}{2}} U_{1} g_{k}^{0}) . \qquad (1.83)$$

Hier bezeichnet wie oben $H^1 = (JK)^{\frac{1}{2}} H (JK)^{-\frac{1}{2}}$, es ist $|H^1| = (JK)^{\frac{1}{2}} K H (JK)^{-\frac{1}{2}}$. Sei nun A ein in \mathcal{H} selbstadjungierter Operator mit JA = AJ, $\{f_j^0| j \in \mathbb{N}\}$, $\{g_j^0| j \in \mathbb{N}\}$ seien Teilmengen von D(A). Dann wirkt der in Abschnitt 1.1 definierte Operator $d\Gamma(A)$ auf Vektoren $\phi(1.80)$ wie:

$$d\Gamma(A) \phi = \sum_{p=1}^{n} a^{*}(A f_{i_{p}}^{0}) \prod_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{n} a^{*}(f_{i_{1}}^{0}) \prod_{k=1}^{r} b^{*}(g_{j_{k}}^{0}) \Omega +$$

$$+ \sum_{q=1}^{r} b^{*}(A g_{j_{q}}^{0}) \prod_{l=1}^{n} a^{*}(f_{i_{1}}^{0}) \prod_{\substack{k=1\\k\neq q}}^{r} b^{*}(g_{j_{k}}^{0}) \Omega$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{t=1}^{\infty} (f_{t_{t}}^{0}, A f_{i_{p}}^{0}) a^{*}(f_{t_{t}}^{0}) \prod_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{n} a^{*}(f_{i_{1}}^{0}) \prod_{k=1}^{r} b^{*}(g_{j_{k}}^{0}) \Omega +$$

$$+ \sum_{q=1}^{r} \sum_{s=1}^{\infty} (g_{s}^{0}, A g_{j_{q}}^{0}) b^{*}(g_{s}^{0}) \prod_{l=1}^{n} a^{*}(f_{i_{1}}^{0}) \prod_{\substack{k=1\\k\neq q}}^{r} b^{*}(g_{j_{k}}^{0}) \Omega . \qquad (1.84)$$

Wegen (1.11) ist wie oben das "Herausziehen" der Entwicklung legitim. B, \mathcal{O} , d $\Gamma(A)$ sind lineare Operatoren, die lineare Hülle von Vektoren der Gestalt von ϕ (1.80) ist dicht in \mathcal{F} und determinierender Bereich für die selbstadjungierten Operatoren B und

 $d\Gamma(A)$. Mit (1.81) -(1.84) folgt so die Identität

$$o^* B O = d\Gamma(\tilde{H})$$

mit
$$\tilde{H} := U_1^* (JK)^{\frac{1}{2}} (K H P_+ + C_1 K H C_1 P_-) (JK)^{-\frac{1}{2}} U_1)$$
.

(Man beachte, daß hierbei $P_{\pm}^{\circ} U_1^* | H^{\dagger} | U_1 P_{\mp}^0 = 0$ benötigt wurde.) Wegen der Ähnlichkeitstransformationen sind das Spektrum, die spektralen Teilräume und zugehörigen Spektren von \tilde{H} identisch mit denen von KH und so mit denen von $|H^{\dagger}|$ und so insgesamt jene von B gleich denen von $d\Gamma(|H^{\dagger}|)$. Aussagen über das Spektrum des letztgenannten Operators erhält man aus Lemma 1.1. \square

Wie im vorangehenden Satz vermerkt, gelangen wir mit (1.78) zu einem nach unten beschränkten Hamiltonian B für nichtnegatives JH. Ist JH z.B. nur durch eine negative Schranke nach unten beschränkt, so folgt wegen der Unbeschränktheit des Anzahloperators im Falle der Bose-Statistik, daß B nach unten unbeschränkt ist. Zweifellos ist der physikalische Hamiltonian H nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, so daß eine unphysikalische Willkür in der Wahl des Fockraum-Hamiltonians auftritt.

Wir können diese vermeiden, indem wir vom physikalischen Fockraum-Hamiltonian in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke der externen Felder, $\kappa \in \mathbb{C}$, $B(\kappa)$ verlangen, daß die Abbildung $\kappa \longmapsto B(\kappa)$ stetig im verallgemeinerten Sinne für alle zulässigen κ ist, i.e. für κ so, daß die Voraussetzung der positiven Definitheit von $JK(\kappa)$ erfüllt ist. Hierzu muß nach dem vorher Gesagten $JH(\kappa)$ nichtnegativ und die Abbildung $\kappa \longmapsto K(\kappa)$ stetig sein. Wir erreichen dies, indem wir für jedes κ $H(\kappa)$ durch Addition einer Konstanten so "verschieben", daß für den verschobenen Operator $H'(\kappa)$ 0 aus $\rho(H'(\kappa))$ und damit $JH'(\kappa)$ positiv definit ist. Die Regularitätsbedingungen (1.43) sind natürlich äquivalent zu denjenigen, wo $H'(\kappa)$ an die Stelle von $H(\kappa)$ tritt.

Es ist klar, daß der oben definierte Fockraum - Hamiltonian für $\sigma(H) = \sigma_p(H) \cup \sigma_{ac}(H)$ sich durch die den quadratischen Formen aus [KSch2] hier für den K.G. - Fall entsprechenden Ausdrücken schreiben läßt.

Wir wollen nun "Implementierungen" für die Einteilchen - Wellenoperatoren angeben. Wie schon oben erwähnt, ist es i.A. nicht möglich, Fockraum - Wellenoperatoren analog zu den Einteilchen - Wellenoperatoren zu definieren.

Würden die Operatoren

$$A_{1, 2} := s - \lim_{t \to \pm_{00}} \exp(i B t) \exp(-i B_0 t) P_{ac}(B_0)$$

existieren als Elemente aus $\,\mathscr{B}(\,\mathscr{F})$, so erhielte man die Verknüpfungsrelationen auf $\,\mathscr{F}$

$$\exp (-i B t) A_{1,2} = A_{1,2} \exp (-i B_0 t)$$

und somit

$$\exp (-i B t) A_{1, 2} \Omega = A_{1, 2} \exp (-i B_0 t) \Omega$$

= $A_{1, 2} \Omega$.

Wegen der Eindeutigkeit von $\tilde{\Omega}$ führt dies zu $A_{1,2} \Omega = \tilde{\Omega}$.

Weiter würde gelten

$$0 = \lim_{t \to \pm \infty} \| \exp(i B t) \exp(-i B_0 t) \Omega - \tilde{\Omega} \|$$

$$= \lim_{t \to \pm \infty} \| \exp(i B t) \Omega - \tilde{\Omega} \|$$

$$= \lim_{t \to \pm \infty} \| \Omega - \exp(-i B t) \tilde{\Omega} \|$$

$$= \| \Omega - \tilde{\Omega} \|,$$

also $\Omega = \tilde{\Omega}$ (a.e.). Mit (1.46), (1.50) sieht man, daß dies $P_{\pm}^0 = P_{\pm}$ zur Folge hätte.

Satz 1.22

Es mögen die Voraussetzungen von Lemma 1.7 gelten, also die Einteilchen-Wellenoperatoren W_{1, 2} existieren. H₀ habe ein rein absolut stetiges Spektrum.

Dann gibt es Isometrien $\mathcal{W}_{1,2} \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ mit EB $\tilde{\Gamma}(P_{1,2})\mathcal{F}$, so daß auf D_{Ω}

$$\mathcal{W}_{j} \Phi(\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{J} \mathbf{W}_{j} \mathbf{J} \mathbf{v}) \mathcal{W}_{j} \tag{1.85}$$

für alle v ϵ \mathcal{H} , j = 1, 2 gilt. Hier bezeichnen P_{1, 2} die J-ortogonalen Projektoren auf $R(W_{1, 2})$. Es gelten die Verknüpfungsrelationen

B
$$W_j \supset W_j B_0$$
 , $j = 1, 2$. (1.86)

Beweis: Da K mit P₁ und P₂ vertauscht, ist für den ersten Teil der Behauptung nach Satz 1.20 nur zu zeigen, daß P_{\pm}^{0} W_j P_{\mp}^{0} ϵ $\mathcal{B}_{2}(\mathcal{H})$, j=1,2 sind. Diese Bedingungen sind nach Bemerkung 1.8 wegen der Voraussetzung J-K ϵ $\mathcal{B}_{2}(\mathcal{H})$ erfüllt.

Nun erhalten wir mit (1.85), (1.35), (1.37), sowie den Verknüpfungsrelationen für die Einteilchen - Wellenoperatoren auf D_0 :

$$\exp (i B t) \mathcal{W}_j \Phi(v) = \Phi(J \exp (i H t) W_j J v) \exp (i B t) \mathcal{W}_j ,$$

 $\mathcal{W}_j \exp (i B_0 t) \Phi(v) = \Phi(J W_j J \exp (i H_0 t) v) \mathcal{W}_j \exp (i B_0 t)$ und hiermit

$$W_j \exp(i B_0 t) (\exp(i B t) W_j)^* \Phi(v) \mathcal{P}_j =$$

=
$$\Phi(\mathbf{v})$$
 \mathcal{W}_{j} exp (i B₀ t) (exp (i B t) \mathcal{W}_{j})*,

auf D_{\bigcap} für alle $v \in \mathcal{H}$, j = 1, 2, wobei $\mathscr{P}_j := \tilde{\Gamma}(P_j)$. Aus diesen Gleichungen und den analogen für $\Phi^*(v)$ folgt, wie in Abschnitt 1.1 gezeigt, wegen der Irreduzibilität der Weylalgebra, daß \mathscr{W}_j exp (i B_0 t) (exp (i B t) \mathscr{W}_j)* als Operatoren aus $\mathscr{B}(\mathscr{P}_j\mathscr{F})$ ein Vielfaches der Identität sein müssen. Damit gilt die Gleichheit bis auf einen Phasenfaktor von \mathscr{W}_j exp (i B_0 t) und exp (i B t) \mathscr{W}_j für alle t $\epsilon \mathbb{R}$, j = 1, 2. Mit dem Satz von Stones folgen die behaupteten Verknüpfungsrelationen.

1.5 Regularität und Implementierbarkeit der Zeitentwicklung

In diesem Abschnitt werden wir die (notwendige und hinreichende) Bedingung für die Existenz eines Hamiltonians in \mathcal{F} (1.38) mit der Regularitätsbedingung (1.43) vergleichen. Es ist leicht zu sehen (s. [KSch1] oder den folgenden Satz 1.24), daß die Letztere die Erste impliziert. Die Vermutung aus [L;KSch1], daß andererseits aus (1.38) auch
(1.43) folgt, daß also beide Bedingungen äquivalent sind, zeigen wir in Satz 1.24 für den
Fall "schwacher" Felder. Der Satz ist so formuliert, daß er (mit Hilfe eines für orthogonale Projektoren modifizierten Lemmas 1.10) sofort auf den Fall selbstadjungierten H's
und so auf den in der zitierten Literatur betrachteten Dirac-Operator übertragen
werden kann.

Zum Beweis benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 1.23

Seien A_1 , A_2 selbstadjungierte Operatoren in \mathcal{H} mit dichtem Schnitt ihrer Definitionsgebiete. Sei $A_1 - A_2 \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ und weiter $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ beschränkt und meßbar, gelte

$$| f(x) - f(y) | \le c_f | x - y | \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ und ein } c_f > 0.$$

Dann ist $f(A_1) - f(A_2) \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ mit

$$\left\| f(A_1) - f(A_2) \right\|_2 \le c_f \left\| A_1 - A_2 \right\|_2 ,$$

wobei cf dieselbe Konstante wie in der vorangehenden Ungleichung bezeichnet.

Lemma 1.23 ist leicht mit Hilfe des von Neumannschen Satzes über H.S.-Störungen selbstadjungierter Operatoren zu zeigen, was in [Wal] geschieht. Hinzugefügt haben wir die Bemerkung, daß die Konstanten in den obigen Ungleichungen gleich sind. Diese Tatsache wird erst im dritten Kapitel benötigt werden. In [Wal] wird auch das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 1.24

Sei $\{c_j \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{N}\}$ eine Menge nichtnegativer Zahlen und sei $\{d_j \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{N}\}$ eine Folge positiver von Null weg beschränkter Zahlen.

Falls $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \sin^2(d_j t)$ für alle t aus einem reellen Intervall um Null konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$.

Satz 1.25

Sei H J-selbstadjungierter Generator der stark stetigen einparametrigen Gruppe $\{\exp(i H t) \mid t \in \mathbb{R} \}$.

Gilt (1.43)

$$P_+^0 P_-, P_-^0 P_+ \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$$

so folgt (1.38)

$$P^0_+ \exp(i H t) P^0_- \epsilon \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sei nun zusätzlich H ähnlich einem selbstadjungierten Operator und gebe es ein a $\epsilon \rho(H) \cap \rho(H_0)$. P₊, P₋ seien dann die J-orthogonalen Projektoren auf die so getrennten spektralen Teilräume von H. Gelte weiter $\mathcal{H}_+ \cap \mathcal{H}_-^0 = \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}_+^0 = \{0\}$ (was hier die "schwachen" Felder ausmacht).

Dann impliziert

$$P^0_+ \exp(i H t) P^0_- \epsilon \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \quad \forall t \epsilon \mathcal{I},$$
 (1.87)

mit einem reellem Intervall um Null \mathcal{J} , auch (1.43).

Beweis: Es ist

$$P_{+}^{0} \exp(i H t) P_{-}^{0} = P_{+}^{0} (P_{+} + P_{-}) \exp(i H t) P_{-}^{0}$$
$$= P_{+}^{0} \exp(i H t) P_{+} P_{-}^{0} + P_{+}^{0} P_{-} \exp(i H t) P_{-}^{0}.$$

Also folgt aus (1.43) (1.38).

Ist nun Hähnlich einem selbstadjungierten Operator, so gibt es ein dem \mathcal{H} -Produkt topologisch äquivalentes Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{\mathtt{A}}$. Sei $\mathcal{H}_{\mathtt{A}}$ der Hilbertraum, bestehend aus den Elementen aus \mathcal{H} mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{\mathtt{A}}$. Nach dem von Neumannschen Satz über H.S.-Störungen selbstadjungierter Operatoren [K Th.X 2.1] existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein Operator A ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_{\mathtt{A}})$ mit $\|A\|_2 < \epsilon$, so daß der in $\mathcal{H}_{\mathtt{A}}$ selbstadjungierte Operator

$$E := H + A \tag{1.88}$$

ein reines Punktspektrum hat. Nach Voraussetzung gibt es eine Lücke im Spektum von H. Sei also a $\epsilon \rho(H)$, so gilt mit den P_{\pm} nach Voraussetzung

$$(f, H f)_{\bar{a}} \geq (a + \delta) \|f\|_{\bar{a}}^{2} \quad \forall f \in D(H) \cap \mathcal{H}_{\bullet}$$

$$(g, H g)_{\bar{a}} \leq (a - \delta) \|g\|_{\bar{a}}^{2} \quad \forall g \in D(H) \cap \mathcal{H}_{-} ,$$

für ein a $\epsilon \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Damit erhalten wir

$$(f, E f)_{\ddot{a}} = (f, H f)_{\ddot{a}} + (f, A f)_{\ddot{a}} \ge (a + \delta - ||A||_{2}) ||f||_{\ddot{a}}^{2}$$

$$\ge (a + \delta_{1}) ||f||_{\ddot{a}}^{2} \quad \forall f \in D(H) \cap \mathcal{H}_{+}$$
(1.89)

und

$$(g, E g)_{\ddot{a}} = (g, H g)_{\ddot{a}} + (g, A g)_{\ddot{a}} \le (a - \delta + ||A||_{2}) ||g||_{\ddot{a}}^{2}$$

$$\ge (a - \delta_{1}) ||g||_{\ddot{a}}^{2} \quad \forall g \in D(H) \cap \mathcal{H}_{-}, \qquad (1.90)$$

für ein $\delta_1 > 0$, indem wir A so wählen, daß $||A||_2 \le (\delta - \delta_1)(>0)$.

Gilt nun (1.38), so folgt, wegen H-E ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_a)$ und da die Funktion

 $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp(ixt)$ die Voraussetzungen von Lemma 1.23 erfüllt (es ist

 $|\exp(itx) - 1| \le |tx|$), mit diesem Lemma, daß $\exp(iHt) - \exp(iEt) \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_a)$ für alle $t \in \mathcal{I}$ gilt. Damit ist (1.87) äquivalent zu

$$P^0_+ \exp(i E t) P^0_- \epsilon \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_a) \quad \forall t \epsilon \mathcal{J}.$$

(Die H.S.-Normen von Operatoren in \mathcal{H} und $\mathcal{H}_{\mathtt{a}}$ sind äquivalent.) Also impliziert Bedingung (1.87):

$$\left[\begin{array}{ll} \mathbf{P_+^0, \, exp(i \, E \, t)} \end{array}\right] \, \epsilon \, \, \boldsymbol{\mathcal{B}_2(\, \mathcal{H}_a)} \quad \forall \, t \, \epsilon \, \, \boldsymbol{\mathcal{I}}$$

und somit

$$[P_{-}P_{+}^{0}P_{+}, \exp(i E t)] = P_{-}[P_{+}^{0}, \exp(i E t)]P_{+} \in \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H}_{a}) \quad \forall t \in \mathcal{J}.$$

Sei nun $\{h_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ eine orthonormale Basis für \mathscr{H}_a , bestehend aus den Eigenvektoren von E, i.e.

$$E h_{j} = \omega_{j} h_{j} , \omega_{j} \in \mathbb{R} , \forall j \in \mathbb{N} . \tag{1.91}$$

Dann gilt:

$$\| [P_{-}P_{+}^{0}P_{+}, \exp(i E t)] \|_{2}^{2} = \int_{j_{k}=1}^{\infty} |(h_{j}, P_{-}P_{+}^{0}P_{+} \exp(i \omega_{k} t) h_{k})_{a} - (\exp(-i \omega_{j} t) h_{j}, P_{-}P_{+}^{0}P_{+} h_{k})_{a}|^{2}$$

$$= \int_{j_{k}=1}^{\infty} |\exp(i \omega_{k} t) - \exp(i \omega_{j} t)|^{2} |(h_{j}, P_{-}P_{+}^{0}P_{+} h_{k})_{a}|^{2}$$

$$= 4 \int_{j_{k}=1}^{\infty} \sin^{2}(t/2 (\omega_{k} - \omega_{j})) |(P_{-}h_{j}, P_{+}^{0}P_{+} h_{k})_{a}|^{2} . (1.92)$$

Die Summanden der rechten Seite verschwinden, wenn nicht $h_j \in \mathcal{H}_-$, $h_k \in \mathcal{H}_+$ und so für die zugehörigen Eigenwerte nach (1.89) – (1.91)

$$\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{i}} \ge \mathbf{a} + \delta_{\mathbf{i}} - \mathbf{a} + \delta_{\mathbf{i}} = 2\delta_{\mathbf{i}} > 0$$

gilt. Gilt (1.87), so muß die Summe für alle t aus $\mathcal J$ konvergieren. Die $\omega_k - \omega_j$ sind von Null weg beschränkt, wir können Lemma 1.24 anwenden und erhalten, daß (1.87)

$$\infty > \sum_{j_{+}, k=1}^{\infty} | (P_{-} h_{j}, P_{+}^{0} P_{+} h_{k})_{j_{1}} |^{2} = || P_{-} P_{+}^{0} P_{+} ||_{2}^{2}$$

impliziert, daß also P-P+P+ aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_3)$ oder, äquivalent, aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ist. Dasselbe Ergebnis erhält man analog für P-P-P+. Mit den Bezeichnungen (1.60) gilt also:

$$P_{-} \, P_{+}^{0} \, P_{+} = P_{-} \, P_{+}^{0} \, P_{1} \, \epsilon \, \, \mathcal{B}_{2} (\, \mathcal{H}_{+}, \mathcal{H}_{-})$$

$$P_{-}P_{-}^{0}P_{+} = P_{4}P_{-}^{0}P_{+} \in \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H}_{+},\mathcal{H}_{-})$$
.

Nach Voraussetzung und Lemma 1.12 folgt

$$P_- P_+^0 \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_+^0, \mathcal{H}_-), P_-^0 P_+ \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-^0)$$

oder

$$P^0_+P_-, P^0_-P_+ \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$$
 . \Box

2. ZUR SPEKTRALTHEORIE FÜR DEN KLEIN-GORDON-OPERATOR

2.1 Der Fall "schwacher" Potentiale; der Klein-Gordon-Hamiltonian

Die Klein-Gordon Gleichung in ν (Raum-) Dimensionen, die das Verhalten eines spinlosen relativistischen Teilchens der Masse m>0 in einem statischen äußeren Feld, bestehend aus elektrostatischem Potential V, magnetischem Vektorpotential

 $A = {}^{t}(A_1,...,A_{\nu})$ und skalarem Potential A_{j} ("variable Masse") beschreibt, hat formal die Gestalt

$$(\mathrm{i}\,\partial_\mathrm{t}\,-\,\mathrm{V})^2\;\varphi=((\mathrm{i}\,\nabla\,-\,\mathrm{A})^2\,+\,\mathrm{m}^2\,-\,\mathrm{A}_4)\;\varphi$$

i.e.

-
$$\partial_t^2 \varphi$$
 - $2i \ V \ \partial_t \varphi = (h^2 - V^2) \varphi$,

$$\text{mit} \ h^2 := \ -\ \Delta \ + \ m^2 \ -\ i\ \nabla \cdot \ A \ -\ i\ A \cdot \ \nabla \ + \ A^2 \ -\ A_4 \ .$$

Diese Gleichung kann linearisiert werden durch

$$\mathrm{i} \partial_t \; \psi = \mathrm{L} \; \psi \;\; , \;\; \psi = \left[\begin{array}{c} \varphi \\ \left(\mathrm{i} \partial_t \; - \; V \right) \; \varphi \end{array} \right] \;\; , \;\; \mathrm{L} = \left[\begin{array}{c} \mathrm{V} \quad \mathrm{I} \\ \mathrm{h}^{\; 2} \quad \mathrm{V} \end{array} \right] \;\; . \label{eq:delta_t}$$

Die freie Gleichung ohne äußere Felder

-
$$\partial_t^2 \varphi = (-\Delta + m^2) \varphi =: \varepsilon_0^2 \varphi$$

hat die Form

$$\mathrm{i}\,\partial_t\;\psi=\,\mathrm{L}_0\;\psi\;\;,\;\;\psi=\left[\begin{array}{c}\varphi\\\mathrm{i}\,\partial_t\;\varphi\end{array}\right]\;,\;\;\mathrm{L}_0=\left[\begin{array}{c}0\;\;\mathrm{I}\\{\varepsilon_0}^2\;\;0\end{array}\right]\;,$$

weiter betrachten wir die Gleichung mit rein magnetischen Feldern

-
$$\partial_t^2 \varphi = ((i \nabla - A)^2 + m^2) \varphi =: \varepsilon_A^2 \varphi$$
,

sie ist äquivalent zu

$$\mathrm{i}\,\partial_t\;\psi=\,\mathrm{L}\mathcal{J}\psi\quad,\;\;\psi=\left[\begin{array}{c}\varphi\\\\(\mathrm{i}\,\partial_t\;-\,\mathrm{V})\;\varphi\end{array}\right]\;,\;\;\mathrm{L}_{_{\boldsymbol{A}}}=\left[\begin{array}{c}0\;\;\mathrm{I}\\\\\varepsilon_{_{\boldsymbol{A}}}^{^2}\;0\end{array}\right]\;.$$

Die Operatoren L_0 bzw. $L_{\underline{A}}$ sind nicht symmetrisch in L_2 , wohl aber in der Skala von Skalarprodukten

$$(\psi, \varphi)_{\alpha} := (\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} \psi_1, \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} \varphi_1) + (\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\alpha} \psi_2, \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\alpha} \varphi_2)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und L_2 -Produkt (\cdot, \cdot) , $\psi = {}^t(\psi_1, \psi_2)$, $\varphi = {}^t(\varphi_1, \varphi_2)$; ε bezeichne ε_0 bzw. $\varepsilon_{\mathbb{A}}$. Das Skalarprodukt mit $\alpha = 0$ (die "Anzahlnorm") ist das im folgenden relevante.

Anstelle eines Operators B im Skalarprodukt mit $\alpha = 0$ können wir äquivalent

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} \epsilon^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \text{ im } L_2 \text{ betrachten. } L_0, L_{\textbf{A}} \text{ haben dann die Form } \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix},$$

Sei nun im folgenden ϵ ein selbstadjungierter positiv definiter Operator in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$, von welchem wir aus technischen Gründen (s. Beweis von Satz 2.1) noch $\|i\partial_j \epsilon^{-1}\| \le 1$ für $j=1,...,\nu$ verlangen.

Im Hilbertraum $\mathscr{H}:=(\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^{\nu}))^2$ sei der "ungestörte" Hamiltonian gegeben durch

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} , D(H_0) = D(\varepsilon) \oplus D(\varepsilon) .$$
 (2.1)

(Der hier mit *X* bezeichnete Hilbertraum ist der "Ortsraum", während die Fragestellungen des ersten Kapitels i.A. im bei uns der Einfachheit halber gleich benannten "Impulsraum" betrachtet werden. Beide Räume sind durch eine unitäre Transformation verbunden.)

Ho ist damit selbstadjungiert und es gilt:

$$(-d,d) \in \rho(H_0)$$
 für ein $d > 0$.

Weiter sei
$$J := sign H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 (2.2)

Den "vollen" Hamiltonian wollen wir im folgenden Satz definieren. Ausgangspunkt ist nach dem oben Gesagten der formale Ausdruck

$$H_0 + \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{1}{2}} & V \varepsilon^{-\frac{1}{2}} & \varepsilon \\ \varepsilon + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} & h^2 & \varepsilon^{-\frac{1}{2}} & \varepsilon^{-\frac{1}{2}} & V \varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$
 (2.3)

Satz 2.1

Seien V, A_j , A_j , $j=1,...,\nu$ symmetrische relativ ϵ -beschränkte Operatoren in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$. Sei in $\mathscr H$

$$G := \begin{bmatrix} B & 0 \\ Y & B^* \end{bmatrix} , \qquad (2.4)$$

mit $B := V \varepsilon^{-1}$

$$Y := \sum_{j=1}^{\nu} \left\{ \left(A_{j} \varepsilon^{-1} \right)^{*} A_{j} \varepsilon^{-1} - \left(i \partial_{j} \varepsilon^{-1} \right)^{*} A_{j} \varepsilon^{-1} - \left(A_{j} \varepsilon^{-1} \right)^{*} i \partial_{j} \varepsilon^{-1} \right\} - \varepsilon^{-1} A_{j} \varepsilon^{-1} . \tag{2.5}$$

Ist
$$I - B^*B + Y$$
 positiv definit, (2.6)

so ist der Operator H, gegeben durch

$$H = |H_0|^{\frac{1}{2}} J(I + JG) |H_0|^{\frac{1}{2}} , \qquad (2.7)$$

dicht definiert in \mathcal{H} , JH ist selbstadjungiert und positiv definit. H ist ein abgeschlossener Operator mit rein reellem Spektrum, es ist $0 \in \rho(H)$. H ist vom skalaren Typ (im Sinne von Dunford), also ähnlich einem in \mathcal{H} selbstadjungierten Operator.

Zum Beweis des Satzes ziehen wir zwei Lemmata heran, welche in etwas allgemeinerer Form in [V2] bewiesen wurden.

Lemma 2.2

Sei T ein linearer Operator in \mathcal{X} , J' beidseitig stetig und selbstadjungiert in \mathcal{X} . Ist nun J'T selbstadjungiert und positiv definit, so ist T abgeschlossen, hat ein rein reelles Spektrum und es ist $0 \in \rho(T)$.

Lemma 2.3

Seien J', T wie in Lemma 2.2. Existiere

$$K' := \underset{\kappa \to \infty}{\text{w-lim}} \ \frac{1}{\prod} \int_{-\kappa}^{\kappa} (T - i\eta)^{-1} d\eta$$

als Element aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann ist J'K' positiv definit und $K'^2 = I$.

Beweis von Satz 2.1: Da V, A_j , A_j , $j=1,...,\nu$, relativ ε -beschränkt sind, gilt $V \varepsilon^{-1}$, $A_j \varepsilon^{-1}$, $A_j \varepsilon^{-1}$ ε $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Weiter ist nach der Voraussetzung an ε $i\partial_j \varepsilon^{-1}$ beschränkt, also insgesamt G aus $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Wegen $(V \varepsilon^{-1})^* = \varepsilon^{-1} V$ und $(A_j \varepsilon^{-1})^* A_j \varepsilon^{-1} \supset \varepsilon^{-1} A_j A_j \varepsilon^{-1}$ etc., ist H sicherlich eine Erweiterung von $H_0 + \mathscr{V}$ (2.3). Wegen (2.6) gilt nun

$$D := (I - B^*B + Y)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
(2.8)

und

$$(I + JG)^{-1} = \begin{bmatrix} I + Y & B^* \\ B & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D & -DB^* \\ -BD & I + BDB^* \end{bmatrix}$$
 (2.9)

ist symmetrisch und aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Damit gilt

$$H^{-1} = |H_0|^{-\frac{1}{2}} (I + JG)^{-1} J |H_0|^{-\frac{1}{2}}, \qquad (2.10)$$

also ist $H^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $0 \in \rho(H)$ und H abgeschlossen. Das Definitionsgebiet von H ist durch

$$D(H) = |H_0|^{-\frac{1}{2}} (I + JG)^{-1} J D(|H_0|^{\frac{1}{2}})$$
(2.11)

gegeben und somit dicht. Da JG symmetrisch ist, folglich auch H-IJ, ist JH selbstadjungiert. Aus (2.6) ergibt sich, daß I+JG und damit JH positiv definit sind. Nach Lemma 2.2 ist also $\sigma(H) \in \mathbb{R}$. Wir zeigen jetzt, daß

$$K := \underset{\kappa \to \infty}{\text{w-lim}} \frac{1}{\Pi} \int_{-\kappa}^{\kappa} (H - i\eta)^{-1} d\eta$$
 (2.12)

existiert und aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist. Auf D(H) gilt für $\lambda \in \rho(H_0)$:

$$H - \lambda = (H_0 - \lambda) |H_0|^{-\frac{1}{2}} \left[I + \frac{|H_0|}{H_0 - \lambda} G \right] |H_0|^{\frac{1}{2}}$$

Für $\lambda \in \rho(H_0) \cap \rho(H)$ ist dann $\left[I + \frac{\mid H_0 \mid}{\mid H_0 - \lambda \mid} G\right]^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und es gilt auf \mathcal{H}

$$(H - \lambda)^{-1} = |H_0|^{-\frac{1}{2}} \left[I + \frac{|H_0|}{H_0 - \lambda} G \right]^{-1} \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{H_0 - \lambda}$$

$$= (H_0 - \lambda)^{-1} - \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{H_0 - \lambda} G \left[I + \frac{|H_0|}{H_0 - \lambda} G \right]^{-1} \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{H_0 - \lambda} . \quad (2.13)$$

Zumindest alle nichtreellen λ sowie $\lambda = 0$ sind im Schnitt der Resolventenmengen. Somit gilt für f, g ϵ \mathcal{H} mit (2.13):

$$\left| \int_{-\kappa}^{\kappa} (f, [(H_0 - i\eta)^{-1} - (H - i\eta)^{-1}] g) d\eta \right| \le c \left[\int_{-\kappa}^{\kappa} (f, \frac{|H_0|}{|H_0|^2 + \eta|^2} f) d\eta \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\kappa}^{\kappa} (g, \frac{|H_0|}{|H_0|^2 + \eta|^2} g) d\eta \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

da G beschränkt und $\left[I + \frac{\mid H_0 \mid}{\mid H_0 - i \mid \eta} G\right]^{-1}$ gleichmäßig beschränkt in η ist. Mit dem Funktionalkalkül folgt

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{|H_0|}{|H_0|^2 + \eta|^2} d\eta = 2 F_{\kappa}(H_0) , \qquad (2.15)$$

mit $F_{\kappa}(x) = \arctan \frac{\kappa}{|x|}$. $F_{\kappa}(H_0)$ ist aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und gleichmäßig beschränkt in κ .

Aus (2.14) folgt dann

$$|(f, (J - K) g)| \le c ||f|| ||g||,$$
 (2.16)

so daß K existiert als Element aus $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Nach Lemma 2.3 ist hiermit JK positiv definit und $K^2 = I$. JH ist selbstadjungiert, damit nach der Definition von K auch JK. Hiermit ist das durch (1.49) gegebene Skalarprodukt ein dem \mathscr{H} -Skalarprodukt topologisch äquivalentes, in welchem H selbstadjungiert ist. \square

Die Resolvente des oben definierten Operators H stimmt mit der einer "pseudo-Friedrichschen Fortsetzung" des formalen Operators (2.3) in [V2] überein. Die etwas indirekte Bedingung (2.8) wurde gewählt, um in unserem Fall eines nicht weiter spezifizierten ε unnötig starken Forderungen an die Potentiale, etwa die untenstehende (2.24), zu vermeiden. Für rein elektrische Potentiale ist (2.8) äquivalent zu $\|V\varepsilon^{-1}\| \le b < 1$. Ist ε^2 der Abschluß von $-\Delta + m^2$, so ist schon (2.25) hinreichend für (2.8).

Bemerkung 2.4:

Wir haben hier mit (2.6) und ebenso im 2. Kapitel Bedingungen möglichst einfacher Form gewählt. Diese führen zu $0 \epsilon \rho(H)$. Es genügt aber, wenn diese garantierte Lücke im Spektrum von H an einer beliebigen Stelle a ϵ (-d,d) vorliegt. (2.6) ist dann durch die Forderung, daß

$$I - B'^*B' + Y$$
 positiv definit (2.17)

 $mit \quad B^{1} := (V - a) \varepsilon^{-1}$

sei, zu ersetzen. Dann gilt auf D(H):

$$H - a = |H_0|^{\frac{1}{2}} (J + G - a |H_0|^{-1}) |H_0|^{\frac{1}{2}}$$
$$= |H_0|^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} B' & I \\ I + Y & B^{I*} \end{bmatrix} |H_0|^{\frac{1}{2}}$$

und so $(H-a)^{-1}$ ϵ $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, also a ϵ $\rho(H)$. Entsprechend muß nun für die Integra-

tion in K ein Weg durch a gewählt werden. Weiterhin ist jetzt J(H-a) positiv definit, alle übrigen Aussagen des Satzes bleiben gleich.

Der Operator H ist nicht selbstadjungiert und im nächsten Abschnitt werden wir einen Hamiltonian, der nicht einmal mehr ähnlich einem selbstadjungierten Operator ist, betrachten. So wollen wir, wie schon in Kapitel 1 vermerkt, im folgenden von "spektralen Projektoren" für H nur verlangen, daß diese J-symmetrische Projektoren in \mathcal{H} seien, welche mit H vertauschen.

Korollar 2.5

Die Voraussetzungen von Satz 2.1 mögen gelten, K sei durch (2.12) gegeben.

Dann ist $\sigma(H) = \sigma_+ \cup \sigma_-$ mit $\sigma_+ \subset \mathbb{R}_+$, $\sigma_- \subset \mathbb{R}_-$ und

$$P_{+} := \frac{1}{2}(I + K) , P_{-} := \frac{1}{2}(I - K) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
 (2.18)

sind spektrale Projektoren für H, wobei

$$\sigma_{\varepsilon} = \sigma(H \mid P_{\varepsilon} \mathcal{H}), \ \varepsilon = +, -.$$
 (2.19)

Die P_± projezieren auf den positiven bzw. negativen Teilraum für H im Skalarprodukt (1.49).

Beweis: Im Beweis von Satz 2.1 wurde $K^2 = I$ gezeigt. Es folgt hier:

$$P_{+} + P_{-} = I , P_{\pm}^{2} = P_{\pm} , P_{\pm} P_{\mp} = 0 .$$
 (2.20)

Da K J-selbstadjungiert ist, gilt, daß auch die P_{\pm} J-selbstadjungiert sind und die zugehörigen Teilräume J-orthogonal. Daß H in $(\cdot, \cdot)_{JK}$ (1.49) auf $P_{\bullet}\mathcal{H} \cap D(H)$ ($P_{-}\mathcal{H} \cap D(H)$) positiv - (negativ -) definit ist, folgt wie im Beweis von Satz 1.21.

Es ist nach der Definition der P_{\pm} : $P_{\pm} H \in H P_{\pm}$. Wir verfahren nun analog zu [V1]: Bezeichne $H_{\epsilon} := H \wr P_{\epsilon} \mathcal{H}$, so impliziert für $\lambda \in \rho(H)$, $\epsilon = +, -$

$$(H - \lambda)^{-1} (H_{\varepsilon} - \lambda) = I \quad \text{auf} \quad P_{\varepsilon} D(H)$$

$$(H_{\varepsilon} - \lambda) (H - \lambda)^{-1} = I \quad \text{auf} \quad P_{\varepsilon} \mathcal{H}$$

dann $\sigma(H_{\varepsilon}) \subset \sigma(H)$ und

$$(\mathbf{H}_{\varepsilon} - \lambda)^{-1} = (\mathbf{H} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathbf{P}_{\varepsilon} \mathcal{H}.$$

Wenn wir nun für $z \in \rho(H)$ mit $Im z \neq 0$

$$(H - z)^{-1}P_{\varepsilon} = \frac{1}{2}(H - z)^{-1} + \varepsilon \operatorname{w-lim}_{\kappa \to \infty} \frac{1}{2 \Pi} \int_{-\kappa}^{\kappa} (H - z)^{-1} (H - i\eta)^{-1} d\eta$$

$$= \frac{1}{2}(H - z)^{-1} - \varepsilon \frac{1}{2 \Pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\eta - z)^{-1} ((H - z)^{-1} - (H - i\eta)^{-1}) d\eta$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \varepsilon \operatorname{sign}(\operatorname{Re} z)) (H - z)^{-1} + \varepsilon \frac{1}{2 \Pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\eta - z)^{-1} (H - i\eta)^{-1} d\eta \quad (2.21)$$

berechnen, so folgt, daß die Funktion $z \longmapsto (H-z)^{-1} t P_{\varepsilon} \mathcal{H}$ eine eindeutige analytische Fortsetzung auf $\rho(H) \cup \sigma_{-\varepsilon}$ hat und damit $\sigma(H_{-\varepsilon}) \subset \sigma_{\varepsilon}$, $\varepsilon = +, -$. Wir nehmen nun an, es gäbe ein $\lambda \in \sigma_{\varepsilon}$, $\lambda \notin \sigma(H_{\varepsilon})$, was natürlich auch $\lambda \notin \sigma(H_{-\varepsilon})$ und damit $\lambda \in \rho(H)$ zur Folge hätte. Auf \mathcal{H} gilt dann:

$$I = P_{+} + P_{-} = (H_{+} - \lambda) (H_{+} - \lambda)^{-1} P_{+} + (H_{-} - \lambda) (H_{-} - \lambda)^{-1} P_{-}$$
$$= (H_{-} - \lambda) [(H_{+} - \lambda)^{-1} P_{+} + (H_{-} - \lambda)^{-1} P_{-}]$$

und auf D(H) analog

$$I = [(H_{+} - \lambda)^{-1} P_{+} + (H_{-} - \lambda)^{-1} P_{-}](H_{-} - \lambda).$$

Hieraus folgt $\lambda \in \rho(H)$ und damit der Widerspruch mit der Annahme, so daß sich schließlich $\sigma(H_{\epsilon}) = \sigma_{\epsilon}$, $\epsilon = +,-$ ergibt. \square

2.2 "Schwache" Potentiale; die Operatorenfamilie T_x

Der Idee [V3] folgend, wollen wir nun spektrale Eigenschaften des K.G.-Hamiltonians H (2.7) aus denen für die Familie quadratischer Operatoren der formalen Gestalt

$$\varepsilon^{2} - (V - \lambda)^{2} + \sum_{j=1}^{\nu} (A_{j}^{2} - i\partial_{j} A_{j} - iA_{j} \partial_{j}) - A_{j}$$
 (2.22)

 $\lambda \in \mathbb{C}$ ableiten. Diese Operatorfamilie erhält man unmittelbar aus der Bestimmung der Energie der zeitunabhängigen K.G.-Gleichung. Die Sätze 2.6, 2.8 entsprechen Theoremen in [V3], Satz 2.9 folgt in Teilen einem dortigen Beweis. Alle folgenden Überlegungen gelten im Hilbertraum $L_2(\mathbb{R}^p)$.

Satz 2.6

Seien V, A_j , A_j , $j=1,...,\nu$ symmetrische relativ ϵ -beschränkte Operatoren in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$. Sei $\tau_{\lambda}(\cdot,\cdot)$ die sesquilineare Form

$$\tau_{\lambda}(f,g) = (\varepsilon f, \varepsilon g) + \sum_{j=1}^{\nu} [(A_{j} f, A_{j} g) - (A_{j} f, i\partial_{j} g) - (i\partial_{j} f, A_{j} g)] - ((V - \overline{\lambda}) f, (V - \lambda) g) - (f, A_{j} g)$$

$$=: (\varepsilon_{\lambda} f, \varepsilon_{\lambda} g) - ((V - \overline{\lambda}) f, (V - \lambda) g) - (f, A_{j} g)$$
(2.23)

 $\text{mit } \mathrm{D}(\ \tau_{\lambda}(\,\cdot\,,\cdot\,)\) = \mathrm{D}(\,\epsilon\,)\ ,\ \lambda\,\,\epsilon\,\,\mathbb{C}\ .$

Gelte weiter:

a)
$$\| V \varepsilon^{-1} \|^2 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \| A_j \varepsilon^{-1} \| + \| \varepsilon^{-1} A_j \varepsilon^{-1} \| \le b < 1$$
 (2.24)

oder, falls ε^2 der Abschluß des auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu})$ definierten Operators $-\Delta + m^2$ ist, alternativ zu a) mit dem oben definierten Operator $\varepsilon_{\mathbf{A}}$

b)
$$\| V \varepsilon_{A}^{-1} \|^{2} + \| \varepsilon_{A}^{-1} A_{J} \varepsilon_{A}^{-1} \| \le b < 1$$
. (2.25)

Dann folgt

- i) $\tau_{\lambda}(\cdot,\cdot)$ ist abgeschlossen und sektoriell für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, symmetrisch und von unten beschränkt für reelle λ , positiv definit für $\lambda = 0$.
- ii) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert eindeutig ein m-sektorieller Operator T_{λ} mit $D(T_{\lambda}) \in D(\epsilon)$, so daß

$$\tau_{\lambda}(f,g) = (f, T_{\lambda} g) \quad \forall g \in D(T_{\lambda}), \forall f \in D(\varepsilon)$$

- iii) $\mathrm{D}(\mathrm{T}_\lambda)$ ist determinierender Bereich für $\, au_\lambda(\,\cdot\,,\cdot\,)$.
- iv) Falls f ϵ D(ϵ), h ϵ L₂(\mathbb{R}^{ν}) und $\tau_{\lambda}(f,g)=(f,h)$ für alle g aus einem determinierenden Bereich für $\tau_{\lambda}(\cdot,\cdot)$, folgt g ϵ D(T_{λ}) und T_{λ} g = h.
- v) Für reelle λ ist T_{λ} selbstadjungiert und von unten beschränkt, für $\lambda=0$ positiv definit.
- vi) Es ist $D_T := D(T_\lambda)$ unabhängig von λ .

$$\mbox{vii} \;) \; \; \mbox{Für} \; \; \lambda \, = \, 0 \; \; \mbox{gilt} \; : \; \; D(\mbox{T}_0^{\frac{1}{2}}) \, = \, D(\mbox{ϵ}) \; \; , \quad \tau_0(\mbox{f},\mbox{g}) \, = \, \left(\mbox{T}_0^{\frac{1}{2}} \, \mbox{f}, \; \mbox{T}_0^{\frac{1}{2}} \, \mbox{g} \right) \; , \; \; \mbox{f}, \; \mbox{g} \; \mbox{ϵ} \; D(\mbox{ϵ}) \; . \label{eq:total_problem}$$

Beweis: i) Fall a): $(\varepsilon f, \varepsilon g)$ und $\sum_{j=1}^{\nu} (A_j f, A_j g)$ mit $f, g \in D(\varepsilon)$ sind positive abgeschlossene symmetrische Formen, was nach [K Th.VI 1.31] dann auch auf ihre Summe zutrifft. Wegen (2.24) gilt:

$$|-((V - \overline{\lambda}) f, (V - \lambda) f) - 2 \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Re} (A_j f, i \partial_j f) - (f, A_j f)| \le$$

$$\leq a' ||f||^2 + b' (\epsilon f, \epsilon f)$$

für alle $f \in D(\epsilon)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit b' < 1. Mit dem Satz über die Störung sektorieller Formen [K Th.VI 1.33] folgt dann, daß $\tau_{\lambda}(\cdot,\cdot)$ abgeschlossen und sektoriell ist.

Fall b): Es gilt:

$$(\varepsilon_{A} f, \varepsilon_{A} g) = \sum_{j=1}^{\nu} ([-i\partial_{j} + A_{j}] f, [-i\partial_{j} + A_{j}] g) + m^{2} (f, g) \quad \forall f, g \in \mathscr{I}(\mathbb{R}^{\nu}).$$

Die Form $(\varepsilon_{\underline{A}}\cdot,\varepsilon_{\underline{A}}\cdot)$ auf $D(\varepsilon)$ ist abgeschlossen und positiv definit. Aus (2.25) folgt

$$|-((V-\overline{\lambda})f,(V-\lambda)f)-(f,A_{\underline{A}}f)| \le a' ||f||^2 + b'(\varepsilon_{\underline{A}}f,\varepsilon_{\underline{A}}f)$$

für alle f ϵ D(ϵ), λ ϵ C mit b' < 1. Wie im Fall a) erhalten wir, daß $\tau_{\lambda}(\cdot, \cdot)$ abgeschlossen und sektoriell ist.

Symmetrie und Beschränktheit von unten für $\lambda \in \mathbb{R}$ sieht man sofort, die positive Definitheit für $\lambda = 0$ ergibt sich aus (2.24) bzw. (2.25).

- ii) bis v) folgen aus i) und dem ersten Darstellungssatz [K Th. VI 2.1-2.6].
- vi) Wegen

$$\tau_{\lambda}(f,g) = \tau_{\mu}(f,g) - (\lambda - \mu) [(\lambda + \mu) (f, g) - 2 (f, V g)]$$

für alle $f, g \in D(\varepsilon)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, erhält man, indem man $g \in D(T_{\mu})$ setzt und iv) verwendet:

$$T_{\lambda} \supset T_{u} - (\lambda - \mu) [\lambda + \mu - 2 V].$$

Da λ , μ beliebig sind, folgt

$$T_{\lambda} = T_{\mu} - (\lambda - \mu) \left[\lambda + \mu - 2 V \right] \tag{2.26}$$

 $\text{und } \mathrm{D}(\mathrm{T}_{\lambda}) = \mathrm{D}(\mathrm{T}_{\mu}) \qquad \forall \; \lambda, \; \mu \; \epsilon \; \mathbb{C} \; .$

vii) ergibt sich aus dem zweiten Darstellungssatz [K Th.VI 2.23]. 0

Wie man unmittelbar an Satz 2.6 i) sieht, implizieren (2.24) bzw. (2.25) die Bedingung (2.8) und damit insgesamt die Voraussetzungen von Satz 2.6 die von Satz 2.1.

Definition 2.7

Seien
$$q_{\pm}(f) := [(f, V f) \pm l(f)^{\frac{1}{2}}] / ||f||^{2} \quad \forall f \in D(\epsilon) \setminus \{0\},$$

wobei $l(f) := (f, V f)^{2} + [||\epsilon f||^{2} - ||V f||^{2} + \sum_{j=1}^{\nu} \{||A_{j} f||^{2} - 2 \operatorname{Re}(A_{j} f, i \partial_{j} f)\} - (f, A_{j} f)] ||f||^{2}.$

(2.27)

Seien weiter $Q_{\pm} := R(q_{\pm})$, $\Theta := Q_{+} \cup Q_{-}$, $\overline{\Theta}$ der Abschluß von Θ in \mathbb{R} , ρ die "Resolventenmenge" der Familie T_{λ} :

$$\rho := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \in \rho(T_{\lambda}) \}$$
 (2.28)

und das "Spektrum" σ der Familie das Komplement von ρ in ${\mathfrak C}$.

Satz 2.8

Die Voraussetzungen von Satz 2.6 seien erfüllt. Sei M gegeben durch

$$\mathbf{M} := \left\{ \ \lambda \ \epsilon \ \mathbb{R} \ | \ \mathbf{T}_{\lambda} \ \mathrm{ist \ positiv \ definit.} \ \right\}.$$

Dann gilt $\sigma \in \overline{\Theta}$, M ist ein beschränktes offenes Intervall um 0 mit $Q_- < M < Q_+$, $Q_- \cup \overline{M} \cup Q_+ = \mathbb{R}$. Die beiden Randpunkte von M gehören zu σ .

Beweis: Dieser Satz wurde in [V3] für eine Operatorenfamilie etwas anderer Gestalt bewiesen, der Beweis kann jedoch auf den vorliegenden Fall einfach übertragen werden.

Der obige Satz zeigt nun einige interessante Eigenschaften des Spektrums. Die Aufteilung in zwei nicht zusammenhängende Teile Q. und Q. ist nichts anderes als die in "positive" und "negative" Energien der Einteilchen - Gleichung. Wie schon in [V3] vermerkt, gibt es hiermit im Gegensatz z.B. zur Dirac - Gleichung ein direktes Kriterium für die Entscheidung, ob Teile des Spektrums zu positiven oder negativen Energien gehören (Natürlich ist bei der Trennung der beiden Teile des Spektrums der Nullpunkt

nicht wesentlich, vgl. Bemerkung 2.4.). Ein für uns im weiteren (Satz 2.12, Satz 5.6) wichtiger Schluß wird in Korollar 2.11 gezogen. Vorab ist das "Spektrum" σ mit dem Spektrum unseres K.G. - Operators zu identifizieren.

Satz 2.9

Seien die Voraussetzungen von Satz 2.6 erfüllt.

Dann ist das Spektrum des in Satz 2.1 definierten Operators H $\sigma(H)$ gleich dem "Spektrum" σ aus Definition 2.7.

Zum Beweis das folgende Lemma:

Lemma 2.10

Seien die Voraussetzungen von Satz 2.6 erfüllt, T_{λ} sei wie dort definiert.

Die Operatoren:

$$A_{\lambda} := -\varepsilon^{\frac{1}{2}} T_{\lambda}^{-1} (V - \lambda) \varepsilon^{-\frac{1}{2}}, \qquad B_{\lambda} := \varepsilon^{\frac{1}{2}} T_{\lambda}^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.29)$$

$$C_{\lambda} := \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (V - \lambda) T_{\lambda}^{-1} (V - \lambda) \varepsilon^{-\frac{1}{2}}, D_{\lambda} := -\varepsilon^{-\frac{1}{2}} (V - \lambda) T_{\lambda}^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

sind dicht definiert und beschränkt. Es existiert eindeutig ein dicht definierter abgeschlossener J-selbstadjungierter Operator H' mit Resolvente

$$(H^{1} - \lambda)^{-1} =: \begin{bmatrix} \overline{A}_{\lambda} & \overline{B}_{\lambda} \\ \overline{C}_{\lambda} & \overline{D}_{\lambda} \end{bmatrix} . \tag{2.30}$$

Beweis: Formal erhalten wir (2.30) als Resolvente des formalen Operators (2.3) mit dem Ausdruck (2.22) an der Stelle von T_{λ} .

Wir zeigen zuerst, daß für alle $\lambda \in \rho$ durch $A_{\lambda},...,D_{\lambda}$ dicht definierte beschränkte Operatoren gegeben sind.

Sei also $\lambda \in \rho$. T_{λ} und ϵ sind abgeschlossen mit $D(T_{\lambda}) \in D(\epsilon)$, so daß $\epsilon T_{\lambda}^{-1}$ überall definiert und beschränkt ist. Dasselbe gilt für $V T_{\lambda}^{-1}$. Hieraus und wegen

$$\begin{split} & A_{\lambda} \supset - \, \epsilon^{-\frac{1}{2}} \, \epsilon \, T_{\lambda}^{-1} \, (V - \lambda) \, \epsilon^{-\frac{1}{2}} \ , \\ & B_{\lambda} \supset \epsilon^{-\frac{1}{2}} \, \epsilon \, T_{\lambda}^{-1} \, \epsilon^{\frac{1}{2}} \end{split}$$

folgt, daß A_{λ} ,..., D_{λ} dicht definiert sind. Mit Interpolation läßt sich nun auch die Beschränktheit dieser Operatoren zeigen, hierzu können wir aber auch die Analytizität von $\rho \ni \lambda \longmapsto T_{\lambda}^{-1}$ und Satz 2.6 vii) benutzen :

Aus (2.26) folgt mit $\mu = 0$

$$T_{\lambda}^{-1} [I - \lambda (\lambda - 2 V) T_{0}^{-1}] = T_{0}^{-1}$$

oder

$$T_{\lambda}^{-1} = T_0^{-1} Z_{\lambda}^{-1}$$
,

da $Z_{\lambda} := [I - \lambda (\lambda - 2 V) T_0^{-1}]$ invertierbar mit überall definiertem beschränkten Inversen ist. Erneute Verwendung von (2.26) liefert

$$\begin{split} T_{\lambda}^{-1} &= T_{0}^{-1} + \lambda T_{0}^{-1} Z_{\lambda}^{-1} (\lambda - 2 V) T_{0}^{-1} \\ &= T_{0}^{-1} + T_{0}^{-1} Z_{\lambda}^{1-1} T_{0}^{-\frac{1}{2}} , \end{split}$$

wobei $Z_{\lambda}^{-1}:=\lambda Z_{\lambda}^{-1}(\lambda-2V) T_0^{-\frac{1}{2}}$ aus $\mathscr{B}(L_2(\mathbb{R}^{\nu}))$ ist, da wegen Satz 2.6 vii) $V T_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathscr{B}(L_2(\mathbb{R}^{\nu}))$ gilt. Mit diesem Satz folgt ebenfalls $\varepsilon T_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathscr{B}(L_2(\mathbb{R}^{\nu}))$. Nun ist die Beschränktheit von $A_{\lambda},...,D_{\lambda}$ leicht zu sehen. So gilt z.B.

$$A_{\lambda} = - \varepsilon^{\frac{1}{2}} T_{0}^{-1} (V - \lambda) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} T_{0}^{-1} Z_{\lambda}^{1-1} T_{0}^{-\frac{1}{2}} (V - \lambda) \varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit ist A_{λ} eine Restriktion des Operators

$$- \, \, \epsilon^{\, \frac{1}{2}} \, T_{0}^{\, \, -\frac{1}{2}} \, \left[\, (V \, - \, \overline{\lambda}) \, T_{0}^{\, \, -\frac{1}{2}} \, \right]^{\, \pmb{\ast}} \, \epsilon^{\, -\frac{1}{2}} \, - \, \epsilon^{\, \frac{1}{2}} \, T_{0}^{\, \, -1} \, Z_{\lambda}^{\, \, -1} \, \left[\, (V \, - \, \overline{\lambda}) \, T_{0}^{\, \, -\frac{1}{2}} \, \right]^{\, \pmb{\ast}} \, \epsilon^{\, -\frac{1}{2}} \, \, ,$$

welcher nach dem vorher Gesagten beschränkt ist. Analog zeigt man, daß B_{λ} die Restriktion von

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} T_0^{-\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} T_0^{-\frac{1}{2}})^* + \varepsilon^{\frac{1}{2}} T_0^{-1} Z_{\lambda}^{1-1} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} T_0^{-\frac{1}{2}})^*$$

und C, Restriktion von

$$- \, \, \epsilon^{\, -\frac{1}{2}} \, (V \, - \, \lambda) \, T_0^{\, -\frac{1}{2}} \, (\, \, \epsilon^{\, \frac{1}{2}} \, T_0^{\, -\frac{1}{2}} \,)^{\textstyle *} \, - \, \epsilon^{\, -\frac{1}{2}} \, (V \, - \, \lambda) \, T_0^{\, -1} \, Z_{\lambda}^{\, -1} \, (\, \epsilon^{\, \frac{1}{2}} \, T_0^{\, -\frac{1}{2}} \,)^{\textstyle *}$$

ist. D_{λ} ist beschränkt, da aus $T_{\lambda}^* = T_{\lambda}$ $A_{\lambda}^* = D_{\lambda}$ folgt.

Es gibt also eine eindeutige Fortsetzung aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: $R_{\lambda} := \begin{bmatrix} \overline{A}_{\lambda} & \overline{B}_{\lambda} \\ \overline{C}_{\lambda} & \overline{D}_{\lambda} \end{bmatrix}$ für alle $\lambda \in \rho$. R_{λ} erfüllt die Resolventengleichung

$$R_{\lambda} - R_{\mu} = (\mu - \lambda) R_{\lambda} R_{\mu} .$$

Um den Nullraum von R_{λ} zu untersuchen, betrachten wir den Operator auf dem dichten Teilraum $D(\epsilon^{\frac{1}{2}})^2$, wo er ja durch $\begin{bmatrix} A_{\lambda} & B_{\lambda} \\ C_{\lambda} & D_{\lambda} \end{bmatrix}$ gegeben ist. Aus

$$R_{\lambda} \left[\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \right] \, = \, 0 \quad \text{ für } \ f_1, \ f_2 \, \epsilon \, \, D(\epsilon^{\, \frac{1}{2}}) \quad \text{folgt}$$

$$A_{\lambda} f_1 + B_{\lambda} f_2 = 0 \ , \ C_{\lambda} f_1 + D_{\lambda} f_2 = 0 \ .$$

Es ergibt sich

$$T_{\lambda}^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_2 = T_{\lambda}^{-1} (V - \lambda) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} f_1$$

und dann ε^{-1} $f_1=0$ und somit $f_1=f_2=0$. R_λ hat auf einem dichten Teilraum und somit auf ganz $\mathscr H$ einen trivialen Nullraum. Es ist nun R_λ ein abgeschlossener injektiver Operator, welcher der ersten Resolventengleichung genügt und somit Resolvente zu einem abgeschlossenen Operator, den wir mit H^1 bezeichnen. Wegen $A_\lambda^*=D_X$, $B_\lambda^*=B_X$, $C_\lambda^*=C_X$ gilt $JR_\lambda J=R_X^*$ und, da $0 \in \rho$ ist, folgt die Selbstadjungiertheit von JH^1 . Damit ist H^1 eine dicht definierte Erweiterung von $H_0+\mathscr V$ (2.3). Somit gilt $\rho \in \rho(H^1)$. Ist $\lambda \in \rho(H^1)$ folgt mit (2.30) und $T_\lambda^{-1}=\varepsilon^{-\frac{1}{2}}B_\lambda \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ auch $\rho \supset \rho(H^1)$, also $\rho = \rho(H^1)$. \square

Beweis von Satz 2.9: Mit Lemma 2.10 ist lediglich der dort konstruierte Operator H' mit H zu identifizieren. Es sei daran erinnert, daß die Voraussetzungen von Satz 2.6 die von Satz 2.1 implizieren. Sowohl H wie auch H' sind J-selbstadjungiert, besitzen also vollen Bildbereich, so daß es genügt zu zeigen, daß ihre Inversen (es ist $0 \in \rho(H), \rho(H')$) auf einer dichten Teilmenge von \mathcal{H} identisch sind.

Wir benötigen hierzu noch eine Identität für T_0 . Für $f \in D(\epsilon)$, $g \in D_T$ gilt :

$$(f, T_0 g) = (\varepsilon f, \varepsilon g) - (\varepsilon f, (V \varepsilon^{-1})^* V \varepsilon^{-1} \varepsilon g) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu} [(\varepsilon f, (A_j \varepsilon^{-1})^* A_j \varepsilon^{-1} \varepsilon g) - (\varepsilon f, (i\partial_j \varepsilon^{-1})^* A_j \varepsilon^{-1} \varepsilon g) -$$

$$- (\varepsilon f, (A_j \varepsilon^{-1})^* i\partial_j \varepsilon^{-1} \varepsilon g)] - (\varepsilon f, \varepsilon^{-1} A_j \varepsilon^{-1} \varepsilon g).$$

$$(2.31)$$

Es folgt mit den Bezeichnungen (2.5):

$$T_0 \in \varepsilon(I - B^*B + Y)\varepsilon$$
.

Mit $g \in D(\varepsilon (I - B^*B + Y) \varepsilon)$ und $f \in D(\varepsilon)$, eingesetzt in die rechte Seite von (2.31), folgt die Gleichheit mit der linken Seite wegen Satz 2.6 iv) und somit

$$T_0 = \varepsilon (I - B^*B + Y) \varepsilon .$$

Wegen (2.6) folgt $T_0^{-1} \in \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^{\nu}))$ mit

$$T_0^{-1} = \varepsilon^{-1} (I - B^*B + Y)^{-1} \varepsilon^{-1}$$
.

Setzen wir dies in die Gleichung für H'-1 auf $D(\varepsilon^{\frac{1}{2}})^2$ ein, so folgt hier:

$$\begin{split} H^{1-1} &= |H_0|^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} & -D \, \varepsilon^{-1} \, V & D \\ I + V \, \varepsilon^{-1} \, D \, \varepsilon^{-1} \, V & -V \, \varepsilon^{-1} \, D \end{bmatrix} |H_0|^{-\frac{1}{2}} \\ &= |H_0|^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} & -D \, B^* & D \\ I + B \, D \, B^* & -B \, D \end{bmatrix} |H_0|^{-\frac{1}{2}} \, , \end{split}$$

mit D wie in (2.8). Hier wurde $\varepsilon^{-1} V \varepsilon^{-\frac{1}{2}} = \overline{\varepsilon^{-1} V} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ auf $D(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$, sowie $B^* = (V \varepsilon^{-1})^* = \overline{\varepsilon^{-1} V}$ benutzt. Nach (2.9), (2.10) folgt $H^{1-1} = H^{-1}$ auf $D(\varepsilon^{\frac{1}{2}})^2$ und damit die Behauptung. \square

Mit Satz 2.8 erhält man ein Kriterium für das Auftreten von Punkten des Spektrums von H in der spektralen Lücke (-d,d) des ungestörten Operators H₀.

Korollar 2.11

Die Voraussetzungen von Satz 2.6 mögen gelten, sei H wie in (2.7) definiert.

Enthält der Bildbereich Q. (bzw. Q.) des Funktionals (2.27) ein $\lambda < d$ (bzw. ein - $\lambda > -d$), so existiert (mindestens) ein $\lambda' \in \sigma(H)$ mit $\lambda' \in (-d,d)$,

i.e.: Es existiert ein $\lambda' \in (-d,d)$, $\lambda' \in \sigma_{\bullet}(H)$ (= σ_{\bullet}) (bzw. $\lambda' \in \sigma_{\bullet}(H)$ (= σ_{\bullet})) genau dann, wenn es ein $f \in D(\varepsilon) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\| \varepsilon f \|^{2} + \sum_{j=1}^{\nu} \{ \| A_{j} f \|^{2} - 2 \operatorname{Re} (A_{j} f, i \partial_{j} f) \} < d^{2} \| f \|^{2} + \| V f \|^{2} - 2 d (f, V f) + (f, A_{4} f)$$
(2.32)

(bzw. dieselbe Ungleichung mit -V an der Stelle von V gilt).

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 2.8, da sup Q- und inf Q+ aus σ und so mit Satz 2.9 aus $\sigma(H)$ sind. Gleichung (2.32) folgt dann aus $q_{\bullet}(f) < d$ (bzw. $q_{\bullet}(f) > -d$) mit (2.27). \square

Eine kurze Anwendung von Korollar 2.11 soll hier für die eindimensionale Klein --Gordon Gleichung mit elektrostatischem Potential gezeigt werden.

Sei $\, \epsilon^{\, 2} \,$ der Abschluß des auf $\, C_o^{o}(\mathbb{R}) \,$ gegebenen Operators

-
$$\partial_x^2$$
 + m² , m > 0 .

 $\epsilon := (\epsilon^{\,2})^{\frac{1}{2}}\,$ ist selbstadjungiert und positiv definit, es ist

$$\sigma(H_0) = \sigma_e(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty) .$$

Für eine Menge nichttrivialer elektrostatischer Potentiale kann man nun das Auftreten von Eigenwerten von H, unabhängig von der Kopplungsstärke der Potentiale zeigen.

Satz 2.12

Sei ε wie oben definiert und V Multiplikationsoperator in $L_2(\mathbb{R})$ mit einer reellwertigen Funktion $V(\cdot)$ ϵ $L_1(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ für ein p ϵ $[2,\infty)$, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x) dx < 0 \quad (bzw. \quad \int_{-\infty}^{\infty} V(x) dx > 0).$$

Sei ferner die Kopplungstärke von V "klein" (in dem Sinne, daß (2.6) gilt).

Dann besitzt der Klein-Gordon Hamiltonian (2.7) (mit $A_{\mathbf{J}} \equiv A_{\mathbf{j}} \equiv 0$) mindestens einen Eigenwert aus $\sigma_{\mathbf{I}}(H)$ (bzw. aus $\sigma_{\mathbf{I}}(H)$) in (-m,m), unabhängig von der Kopplungstärke von V.

Beweis: Aus $V(\cdot) \in L_p(\mathbb{R})$ mit $p \in [2,\infty)$ folgt mit dem Kriterium aus

[RSIII Th.XI 20], daß V relativ ε -kompakt ist. Dies impliziert die relative ε -Beschränktheit, so daß für kleine Kopplungsstärken die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt sind. Ferner folgt aus der relativen ε -Kompaktheit von V, daß der Operator G (2.4) kompakt ist und so wegen (2.13) und dem Satz von Weyl [RSIV Th.XIII 14], daß $\sigma_e(H_0) = \sigma_e(H)$ gilt. Es genügt also nach Korollar 2.11, die Existenz eines f ε D(ε)\{0} zu zeigen mit

$$\| \varepsilon f \|^2 < m^2 \| f \|^2 + \| V f \|^2 - 2 m (f, V f) ,$$
 (2.33)

um zu beweisen, daß es einen Eigenwert aus dem positiven Spektrum von H in (-m,m) gibt. Sei

$$f_{a}(x):=\,exp\,(\,\text{-}\,\,a\,\,\big|x\,\big|\,\,)\ ,\,a\,>0\ ,\,x\,\epsilon\,\,\mathbb{R}\ ,$$

so ist $f_a(\cdot)$ stückweise stetig differenzierbar, es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x f_a(x)|^2 dx = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2 a |x|) dx = a.$$

Für jedes W ϵ L₁(R) mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x) \, dx < 0$ erhält man dann mit dem Satz über die dominante Konvergenz

$$\lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 W(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx < 0.$$

Also existiert für jedes derartiges W ein a > 0, so daß

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \; |\; \partial_x \; f_a(x) \; |^2 \; dx \; + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \; |\; f_a(x) \; |^2 \; W(x) \; dx \; < 0 \; \; .$$

Es folgt

$$\parallel \epsilon \; f_a \parallel^2 = \parallel \; \partial_x \; f_a \; \parallel^2 \; + \; m^2 \; \|f_a\|^2 \; < \; (f_a, \; - \; W \; f_a) + \; m^2 \; \|f_a\|^2 \; \; .$$

Mit $W \equiv 2mV$ ergibt sich (2.33), wo $f \equiv f_a$.

Die Existenz von Eigenwerten aus dem negativen Teil des Spektrums von H für den

Fall, daß
$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x) dx > 0$$
 gilt, folgt analog. \Box

An Satz 2.12 ist das erwartete Resultat abzulesen, daß, für auf Teilchen attraktiv wirkende Potentiale (i.e. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} V(x) \, dx < 0$), Eigenwerte vom positiven Teil des Spektrums in die Lücke (-m,m) "wandern", umgekehrt für Teilchen abstoßende (also Antiteilchen anziehende) Potentiale (i.e. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} V(x) \, dx > 0$), solche vom negativen Teil des Spektrums.

2.3 Der Fall "starker" Potentiale

In diesem Abschnitt soll die Spektraltheorie für den K.G. Operator mit externen Potentialen "starker" Kopplungsstärke diskutiert werden, um die Schranke an die Kopplungsstärke (2.6) aufgeben zu können. Es wird nun der Hamiltonian nicht mehr zwangsläufig ähnlich einem selbstadjungierten Operator sein, komplexe Punkte im Spektrum sind möglich [SchSW]. Im Fall regulärer Potentiale wissen wir zumindest, daß diese nicht reellen Punkte des Spektrums diskret sind (Anhang Satz A.2).

Um zu möglichst einfachen Bedingungen an die externen Felder zu gelangen, soll der Ausgangspunkt die relative ε -Kompaktheit der Potentiale sein. Allein mit der relativen ε -Beschränktheit läßt sich, wie man an (2.13) sieht, nicht garantieren, daß die Resolventenmenge von H nicht leer ist. Eine andere Möglichkeit, starke Kopplungen einzuführen, wäre die Beschränktheit von H-H₀ zu verlangen. Dieser Ausdruck hat hier mit der Notation (2.4) die Form: $H-H_0=|H_0|^{\frac{1}{2}}G|H_0|^{\frac{1}{2}}$; die Forderung nach seiner Beschränktheit führt so im allgemeinen Fall zu keinen einfachen Bedingungen an die Potentiale.

Mit Satz 2.15 werden wir technische Voraussetzungen für die Erarbeitung von Regularitätsbedingungen im nächsten Abschnitt liefern.

Satz 2.13

Seien V, A_j , $j=1,...,\nu$, A_j symmetrische, relativ ϵ -kompakte Operatoren in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$. Sei H gegeben durch (2.7), mit G wie in (2.4).

Dann gilt :

- i) H ist dicht definiert und abgeschlossen, JH ist selbstadjungiert.
- ii) Es existiert ein d' > 0 , so daß $\sigma(H) \in \{z \in \mathbb{C} \mid |Im z| \le d' \}$. Es ist $\sigma_e(H) = \sigma_e(H_0)$, $\sigma(H) \cap \rho(H_0) = \sigma_d(H) \cap \rho(H_0)$; für $\lambda \in \sigma(H)$ folgt $\overline{\lambda} \in \sigma(H)$.

- iii) H generiert eine quasi beschränkte Gruppe J-unitärer Operatoren $\{ U(t) \mid t \in \mathbb{R} \} \quad \text{mit } || U(t) || \le \exp\left(d'|t|\right) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} .$
- iv) Für jedes $\tilde{b} \in (-d,d)$ gibt es ein r > 0 , so daß der schwache Limes

$$K := \underset{\kappa \to \infty}{\text{w-lim}} \frac{\int_{\Pi \text{ i}}^{a+i\kappa} \int_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} (H - \lambda)^{-1} d\lambda \qquad (2.34)$$

existiert als Element aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ für alle a ϵ (\tilde{b},r) . Für jedes \tilde{b} ist K unabhängig von der Wahl von a ϵ (\tilde{b},r) .

Beweis: Nach Voraussetzung sind die Potentiale relativ ε -beschränkt, also ist G ϵ $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ wohldefiniert. Weiter ist wegen der relativen ε -Kompaktheit der Potentiale G ϵ $\mathscr{B}_{\infty}(\mathscr{H})$. Wegen

$$\frac{\mid H_0 \mid}{\mid H_0 - \lambda} \stackrel{5}{\longrightarrow} 0$$
 für $\mid \text{Im } \lambda \mid \longrightarrow \infty$, $\lambda \in \rho(H_0)$

folgt (s. z.B. [W S.136])
$$\frac{\mid H_0 \mid}{H_0 - \lambda} G \longrightarrow 0 \quad \text{für } |\text{Im } \lambda \mid \longrightarrow \infty .$$

Also existiert ein d' > 0, so daß

$$\left\| \frac{\mid H_0 \mid}{\mid H_0 - \lambda} G \mid \right\| < 1 , \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \left| \operatorname{Im} \lambda \right| > d'.$$

Für diese λ ist der Operator I + $\frac{|H_0|}{H_0 - \lambda}$ G invertierbar mit Inversem aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und

$$\left\| \left[I + \frac{\left| H_0 \right|}{H_0 - \lambda} G \right]^{-1} \right\| \le c . \tag{2.35}$$

Nun ist $\rho(H_0)$ eine offene zusammenhängende Menge in \mathbb{C} , auf welcher die Abbildung $\lambda \mapsto \frac{\mid H_0 \mid}{\mid H_0 \mid -\lambda} G$ ϵ $\mathscr{B}_{\infty}(\mathscr{H})$ gegeben ist. Mit dem analytischen Fredholm Theorem [RSI Th.VI 14] ergibt sich hieraus und aus (2.35), daß

$$\left[I + \frac{|H_0|}{|H_0 - \lambda|}G\right]^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) , \lambda \in \rho(H_0) \backslash S , \qquad (2.36)$$

wobei S eine diskrete Teilmenge von $\rho(H_0)$ ist. Weiter folgt, daß der Nullraum

 $N\left[I + \frac{\mid H_0 \mid}{\mid H_0 - \mu}G\right]$ für alle $\mu \in S$ nichttrivial und endlichdimensional ist. Für $\lambda \in \rho(H_0)\backslash S$ ist also die rechte Seite von (2.13) aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, man erhält, daß H abgeschlossen ist mit Definitionsbereich

$$D(H) = |H_0|^{-\frac{1}{2}} \left[I + \frac{|H_0|}{|H_0 - \lambda|} G \right]^{-1} D(|H_0|^{\frac{1}{2}})$$
 (2.37)

mit $\lambda \in \rho(H_0) \setminus S$. D(H) ist dicht in \mathcal{H} und, wie man mit Hilfe der Resolventengleichung sieht, unabhängig von λ . Weiter folgt $\rho(H_0) \cap \rho(H) = \rho(H_0) \setminus S$ oder $S = \sigma(H) \cap \rho(H_0) = \sigma_p(H) \cap \rho(H_0) = \sigma_d(H) \cap \rho(H_0) \ .$

Nach dem oben Gesagten ist $\sigma(H) \in \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq d' \}$. Aus (2.13) mit $\lambda \equiv i\eta$, $|\eta| > d'$ ergibt sich aus der Kompaktheit von G und Weyl's Satz über die Invarianz des wesentlichen Spektrums $\sigma_e(H) = \sigma_e(H_0)$.

Wegen der J-Symmetrie von G ist für $\lambda \in \rho(H_0)\backslash S$

$$(H - \lambda)^{-1*} = J(H - \overline{\lambda})^{-1} J$$
 (2.38)

Da das Spektrum von H in (-d,d) aus isolierten Punkten besteht, gibt es reelle $\lambda \in \rho(H_0) \backslash S$. Dies impliziert die Selbstadjungiertheit von JH.

Nach [W Th.5.12] gilt $\{ \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \sigma(H) \} = \sigma(H^*)$. Nun ist wegen (2.38) und da J beidseitig stetig ist $\sigma(H) = \sigma(H^*)$.

iii) Nach ii) befindet sich das Spektrum von H in einem Streifen um die reelle Achse. Es gilt :

$$\parallel (\; -\mathrm{i} \; \mathrm{H} \; + \; \mathrm{d}^{_1} \; + \; \xi)^{-1} \parallel \leq 1/\xi \quad \mathrm{und} \quad \parallel (\mathrm{i} \; \mathrm{H} \; + \; \mathrm{d}^{_1} \; + \; \xi)^{-1} \parallel \leq 1/\xi$$

für alle $\xi > 0$. Nach [K IX §1.3] sind damit -iH+d' und iH+d' Generatoren von Kontraktions-Halbgruppen $\{ \exp(-(i H + d') t) \mid t \ge 0 \}$, $\{ \exp((i H - d') t) \mid t \ge 0 \}$. Weiterhin sind

 $\begin{array}{l} U_{l}(t):=\exp\left(-\left(i\;H+d^{l}\right)\;t\right)\exp\left(d^{l}t\right)\;, \qquad U_{2}(t):=\exp\left(\left(i\;H+d^{l}\right)\;t\right)\exp\left(d^{l}t\right), \qquad t\geq 0 \\ \\ \text{quasi-beschränkte Halbgruppen. Wie man an ihren Ableitungen auf D(H) sieht, sind} \\ \text{iH bzw. -iH die Generatoren der Halbgruppen und es gilt } U_{l}(t)^{-l}=U_{2}(t)\;\;,\;t\geq 0\;. \end{array}$

 $\text{Mit} \quad U(t) := \left\{ \begin{array}{ll} U_1(-t) & t \geq 0 \\ & 0 & \text{erhält man so eine stark stetige einparametrige Gruppe} \\ U_2(-t) & t < 0 & \end{array} \right.$

beschränkter Operatoren, für die $\|U(t)\| \le \exp(d'|t|)$, t $\in \mathbb{R}$ gilt. Aus der J-Symmetrie von H folgt

$$U_1(t)^* = J U_2(t) J = J U_1(t)^{-1} J$$
 für alle $t \ge 0$

und damit die J-Unitarität von U(t).

iv) Nach ii) gibt es ein d' > 0, so daß das Spektrum von H im Gebiet

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } z| \leq d', z \notin (-\infty, -d] \cup [d, \infty) \}$$

aus isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. Also liegen in der kompakten Menge { z ϵ C | |Im z | \leq d¹, |Re z | < d } endlich viele dieser Eigenwerte. Wir zeigen nun iv), indem wir o.E.d.A. die Aussage für $\tilde{b}=0$ beweisen. Bezeichne dazu μ_j , j=1,...,n, die oben beschriebenen Eigenwerte, so daß die ersten k, $0 \leq k \leq n$, derselben einen nichtverschwindenden Realteil besitzen, die restlichen rein imaginär sind. Dann existiert ein r, $0 < r \leq d$, nämlich

$$r = \begin{cases} d & \text{für } k = 0\\ \min \{ |\text{Re } \mu_j| \mid j = 1,...,k \} \text{ sonst} \end{cases}, \qquad (2.39)$$

so daß der Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Re } z < r\}$ in $\rho(H)$ liegt.

Sei nun $\lambda = a + i\eta$, $\eta \in \mathbb{R}$, für ein $a \in (0,r)$. Dann gilt für jedes η aus dem kompakten Intervall [-d',d'] und wegen (2.35) für alle $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\| \left[I + \frac{|H_0|}{|H_0 - \lambda|} G \right]^{-1} \| \le c . \tag{2.40}$$

Analog zu (2.14) erhalten wir hier mit Hilfe von (2.13) für alle f, g ϵ ${\mathcal H}$

$$\begin{split} & \left| \int\limits_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} (f, \left[(H_0 - \lambda)^{-1} - (H - \lambda)^{-1} \right] g) \, d\lambda \, \right| \, \leq \\ & \leq \sup_{\eta \in \left[-\kappa, \kappa \right]} \left[\left[I + \frac{\left| H_0 \right|}{H_0 - a + i\eta} \, G \right]^{-1} \left\| \left\| G \right\| \left[\int\limits_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} (f, \frac{\left| H_0 \right|}{(H_0 - \bar{\lambda}) \, (H_0 - \lambda)} \, f) \, d\lambda \, \right]^{\frac{1}{2}} \, \cdot \\ & \qquad \qquad \cdot \left[\int\limits_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} (g, \frac{\left| H_0 \right|}{(H_0 - \bar{\lambda}) \, (H_0 - \lambda)} \, g) \, d\lambda \, \right]^{\frac{1}{2}} \, , \end{split}$$

woraus wiederum

$$| (f, (K - J) g) | \le c ||f|| ||g||$$

und damit $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folgt.

Da weiterhin für $\lambda = a + i\eta$, $a \in (0,r)$, $\eta \in \mathbb{R}$, aus (2.13) und (2.40)

$$\| (H - \lambda)^{-1} \| \le \frac{c}{1 + |\eta|}$$
 (2.41)

folgt, ergibt sich für a, a' ϵ (0,r)

$$\left\| \int_{\mathbf{a}+\mathbf{i}\kappa}^{\mathbf{a}+\mathbf{i}\kappa} (\mathbf{H} - \lambda)^{-1} d\lambda \right\| \leq \frac{c}{1+|\kappa|} |\mathbf{a}^{\mathsf{I}} - \mathbf{a}|,$$

ein Ausdruck, der für $|\kappa| \to \infty$ gegen null strebt. Damit ist K (2.34) unabhängig von a ϵ (0,r). \Box

Im Gegensatz zum Fall "schwacher" Felder (s. Bemerkung nach Satz 2.8) gibt es hier kein Kriterium für die Entscheidung ,ob ein Punkt des Spektrums zum "positiven" oder "negativen" Teil gehört, das Spektrum von H ist ja nicht einmal mehr notwendig reell. Wir bleiben aber bei den Bezeichnungen P_{\pm} , σ_{\pm} und vermerken, daß die hierdurch gewählte Aufteilung des Spektrums natürlich abhängig ist von der Wahl des Integrationsweges in P_{\pm} (i.e. von \tilde{b} in (2.34)).

Satz 2.14

Die Voraussetzungen von Satz 2.13 mögen gelten, H und K seien wie dort definiert. Die Operatoren

$$P_{\pm} := \frac{1}{2} (I \pm K)$$
 (2.42)

sind spektrale Projektoren für H mit zugehörigen Spektren (2.19), wobei

$$\sigma_+ \subset \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z \geq r + \tilde{b} \}$$
, $\sigma_- \subset \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z \leq \tilde{b} \}$,

mit b, r wie in Satz 2.13 iv).

Beweis: Sei wieder o.E.d.A. in (2.34) $\tilde{b} = 0$, sei a ϵ (0,r) mit r wie in (2.39) und z ϵ ρ (H) mit Re z \neq 0. Dann erhält man analog zu (2.21):

$$P_{\varepsilon} (H - z)^{-1} = \frac{1}{2} (I + \varepsilon K) (H - z)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} (H - z)^{-1} + \varepsilon 2s - \lim_{\kappa \to \infty} \frac{1}{2 \Pi i} \int_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} (H - \lambda)^{-1} (H - z)^{-1} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \varepsilon sign(Re z - a)) (H - z)^{-1} +$$

$$+ \varepsilon \frac{1}{2 \Pi i} \int_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} (\lambda - z)^{-1} (H - \lambda)^{-1} d\lambda , \qquad (2.43)$$

 ϵ = +, - . Für a, a' ϵ (0,r), 0 < a < a' < Re z berechnen wir (einer Idee aus [V1] folgend):

$$(P_{-}(H - z)^{-1})^{2} = \frac{1}{(2 \Pi i)^{2}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\lambda - z)^{-1} (H - \lambda)^{-1} d\lambda \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\lambda^{1} - z)^{-1} (H - \lambda^{1})^{-1} d\lambda^{1}$$

$$= -\frac{1}{2 \Pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\lambda - z)^{-2} (H - \lambda)^{-1} d\lambda . \qquad (2.44)$$

Ebenso erhält man

$$P_{-}(H - z)^{-2} = -\frac{1}{2 \Pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\lambda - z)^{-2} (H - \lambda)^{-1} d\lambda . \qquad (2.45)$$

Da $(H - z)^{-1}$ mit P₋ (wobei $a \neq Re z$) vertauscht, gilt:

 $(P_-(H - z)^{-1})^2 = P_-^2(H - z)^{-2}$ und so wegen (2.44), (2.45):

$$(P_{-}^{2} - P_{-}) (H - z)^{-2} = 0$$
, $z \in \rho(H)$, Re $z > 0$.

Nun ist
$$R((H - z)^{-2})^{\perp} = N((H - z)^{-2*})$$

 $= N((H^* - \bar{z})^{-2})$
 $= N(J(H - \bar{z})^{-2}J)$
 $= \{0\}$,

da z $\epsilon \rho(H)$ auch $\bar{z} \epsilon \rho(H)$ impliziert (vgl. Beweis von Satz 2.13). Also ist $R((H-z)^{-2})$ dicht in \mathcal{H} , es folgt $P^2 = P$, somit insgesamt:

$$P_{+} + P_{-} = I$$
, $P_{+}^{2} = P_{+}$, $P_{-}^{2} = P_{-}$.

Die J-Symmetrie der P_{\pm} folgt wieder aus (2.38), die Behauptung bezüglich der Spektren folgt völlig analog zum Beweis von Korollar 1.4. \Box

Satz 2.15

Seien V, A_j , $j=1,...,\nu$, A_j symmetrische, relativ ϵ -beschränkte Operatoren in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ und weiter

$$|H_0|^{-\frac{1}{2}}G|H_0|^{\frac{1}{2}}$$

kompakt, mit G wie in (2.4). Sei H der Operator in &

$$H = H_0 \left(I + J |H_0|^{-\frac{1}{2}} G |H_0|^{\frac{1}{2}} \right) . \tag{2.46}$$

Dann treffen die Aussagen i) - iii) des Satzes 2.13 auch auf so definierten Operator H zu.

Gibt es zusätzlich ein $\delta > 0$, so daß

$$|H_0|^{-\frac{1}{2}+\delta}G|H_0|^{\frac{1}{2}}$$
 kompakt ist, (2.47)

so gilt auch die Aussage iv) von Satz 2.13 und alle Aussagen von Satz 2.14, wobei man in (2.34) den schwachen durch den starken Limes ersetzen kann. Der Operator J-K ist kompakt.

Beweis: Nach Voraussetzung sind die Potentiale relativ ε -beschränkt, wieder ist G (2.4) wohldefiniert als Element aus $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Weiterhin ist $|H_0|^{-\frac{1}{2}}G|H_0|^{\frac{1}{2}}$ beschränkt und dicht definiert, also abschließbar.

Sei $\lambda \in \rho(H_0)$. Aus $\frac{\mid H_0 \mid}{\mid H_0 - \lambda} \stackrel{\underline{=}}{\rightarrow} 0$ für $\mid \text{Im } \lambda \mid \longrightarrow \infty$ erhält man, wegen der Kompaktheit von $\mid H_0 \mid^{-\frac{1}{2}} G \mid H_0 \mid^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\mid H_0 \mid}{\mid H_0 - \lambda} \mid H_0 \mid^{-\frac{1}{2}} G \mid H_0 \mid^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$ für $\mid \text{Im } \lambda \mid \longrightarrow \infty$. Wie im Beweis von Satz 2.13 folgt die Existenz eines d' > 0, so daß für alle $\lambda \in \rho(H_0)$

mit $|\operatorname{Im} \lambda| > d'$ I + $\frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{|H_0 - \lambda|} |G_0|^{\frac{1}{2}}$ invertierbar mit in λ gleichmäßig beschränktem Inversen aus $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Wir kürzen ab:

$$A_{\lambda} := \frac{\overline{\left| H_0 \right|^{\frac{1}{2}}}}{\overline{H_0 - \lambda}} G \left| H_0 \right|^{\frac{1}{2}} , \lambda \in \rho(H_0).$$
 (2.48)

Weiter dem Beweis von Satz 2.13 folgend, erhalten wir

$$(I + A_{\lambda})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall \lambda \in \rho(H_0) \setminus S$$

mit einer diskreten Menge S C C. Nun gilt auf D(H) mit $\lambda \in \rho(H_0)$:

$$\label{eq:hamiltonian} H \ - \ \lambda = \left(H_0 \ - \ \lambda \right) \left(I \ + \ A_{\lambda} \right) \ .$$

Für $\lambda \in \rho(H_0) \backslash S$ folgt

$$(H - \lambda)^{-1} = (I + A_{\lambda})^{-1} (H_0 - \lambda)^{-1} , \qquad (2.49)$$

also ist H abgeschlossen. Der Definitionsbereich von H ist durch

$$D(H) = (I + A_{\lambda})^{-1} D(H_0)$$

für ein $\lambda \in \rho(H_0) \backslash S$ gegeben, somit dicht in \mathcal{H} und wegen der Gültigkeit der Resolventengleichung unabhängig von $\lambda \in \rho(H_0) \backslash S$. Unter Verwendung der J-Symmetrie von G erhält man aus

$$A_{\lambda} (H_0 - \lambda)^{-1} = \frac{\left| H_0 \right|^{\frac{1}{2}}}{H_0 - \lambda} G \frac{\left| H_0 \right|^{\frac{1}{2}}}{H_0 - \lambda} :$$

$$(H_0 - \bar{\lambda})^{-1} A_{\lambda}^* = \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{|H_0 - \bar{\lambda}|} G^* \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{|H_0 - \bar{\lambda}|}$$

$$= J \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{|H_0 - \bar{\lambda}|} G |H_0|^{\frac{1}{2}} J (H_0 - \bar{\lambda})^{-1}$$

$$= J A_{\bar{\lambda}} J (H_0 - \bar{\lambda})^{-1}$$

$$(2.50)$$

und damit

$$(H_0 - \bar{\lambda})^{-1} (I + A_{\lambda}^*)^{-1} = (I + J A_{\bar{\lambda}} J)^{-1} (H_0 - \bar{\lambda})^{-1}$$
(2.51)

für geeignete λ . Diese Gleichung zeigt nun, daß

$$((H - \lambda)^{-1})^* = (H_0 - \bar{\lambda})^{-1} (I + A_{\lambda}^*)^{-1}$$

$$= (I + J A_{\lambda} J)^{-1} (H_0 - \bar{\lambda})^{-1}$$

$$= J (I + A_{\lambda})^{-1} (H_0 - \bar{\lambda})^{-1} J$$

$$= J (H - \bar{\lambda})^{-1} J$$

für geeignete λ . Wie in Satz 2.13 gezeigt, impliziert dies die J-Selbstadjungiertheit von H, die Aussagen über das Spektrum folgen hier wie dort.

Nun ist

$$(H_0 - \lambda)^{-1} - (H - \lambda)^{-1} = A_{\lambda} (I + A_{\lambda})^{-1} (H_0 - \lambda)^{-1} . \tag{2.52}$$

Weiter gilt für $\lambda = a + i\eta$, $a \in (0,r)$, unabhängig von $\eta \in \mathbb{R}$,

$$||A_{\lambda}|| \le c$$
, $||(I + A_{\lambda})^{-1}|| \le c'$. (2.53)

Mit Funktionalkalkül erhält man für jedes δ , $0 \le \delta \le 1$:

$$\left\| \frac{\left| H_0 \right|^{1-\delta}}{H_0 - \lambda} \right\| \le \frac{c}{\left| \operatorname{Im} \lambda \right|^{\delta}} , \lambda \in \rho(H_0), \operatorname{Im} \lambda \ne 0 . \tag{2.54}$$

Die zusätzliche Bedingung (2.47) impliziert nun wegen

$$A_{\lambda} = \frac{\mid H_{0} \mid^{1-\delta}}{\mid H_{0} \mid^{-\frac{1}{2}+\delta}} \mid H_{0} \mid^{-\frac{1}{2}+\delta} G \mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}} \quad \text{auf } D(\mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}}) \quad \text{für } \lambda \in \rho(H_{0}):$$

$$\mid\mid A_{\lambda} \mid\mid \leq \frac{c}{1+\mid \text{Im } \lambda \mid^{\delta}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \quad . \tag{2.55}$$

Für $\lambda = a + i\eta$, $a \in (0,r)$, mit ranalog zu (2.39) definiert, $\eta \in \mathbb{R}$, folgt

$$\| (H_0 - \lambda)^{-1} - (H - \lambda)^{-1} \| \le \| A_{a+i\eta} \| \| (I + A_{a+i\eta})^{-1} \| \| (H_0 - \lambda)^{-1} \|$$

$$\le \frac{c}{1 + |Im |\lambda|^{1+\delta}} .$$

Da A_{λ} kompakt ist, ist auch $(H_0 - \lambda)^{-1} - (H - \lambda)^{-1}$ für alle $\lambda \in \rho(H_0) \backslash S$ kompakt, und da nach dem oben Gezeigten das Integral

$$J-K = \underset{\kappa \to \infty}{\text{s-lim}} \frac{1}{\prod i} \int_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} ((H_0 - \lambda)^{-1} - (H - \lambda)^{-1}) d\lambda$$

auch in der Operatornorm konvergiert, folgt die Kompaktheit von J-K (wobei wir wieder o.E.d.A. für den Operator K (2.34) einen Integrationsweg "in der Nähe" von Ogewählt haben). Für

$$K := \underset{\kappa \to \infty}{s - \lim} \frac{1}{\Pi i} \int_{a - i\kappa}^{a + i\kappa} (H - \lambda)^{-1} d\lambda \quad \epsilon \, \mathcal{B}(\mathcal{H}) . \qquad (2.56)$$

folgt die Unabhängigkeit von a ϵ (0,r) wie im Beweis von Satz 2.13, da (2.49) und (2.53)

$$\|(H - \lambda)^{-1}\| \le \frac{c}{1 + |\eta|} \quad \text{mit } \lambda = a + i\eta$$
 (2.57)

Bemerkung: Sowohl in Satz 2.13 wie in Satz 2.15 ist es legitim, den Operator H mit demselben Symbol wie den Operator aus Satz 2.1 zu bezeichnen. Gelten jeweils die Voraussetzungen zweier dieser Sätze, so folgt die Gleichheit der gleich bezeichneten Operatoren aus dem nichttrivialen Schnitt ihrer Resolventenmengen und der Gleichheit der Resolventen für Elemente desselben. Um die Gleichheit im Fall des Operators aus Satz 2.15 zu sehen, kann man sich der Identität auf \mathcal{H}

$$(I + A_{\lambda}) |H_0|^{-\frac{1}{2}} (I + \frac{|H_0|}{H_0 - \lambda} G)^{-1} \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{H_0 - \lambda} = (H_0 - \lambda)^{-1}$$

für geeignete λ bedienen.

3. REGULARITÄT ÄUßERER FELDER; DER ALLGEMEINE FALL

Im folgenden wollen wir mit Hilfe der Ergebnisse des 2. Kapitels Bedingungen an externe Potentiale im K.G. - Operator entwickeln, die notwendig und hinreichend für die Regularität (1.43) sind.

Wir beginnen mit einer der Implementierbarkeit der Zeitentwicklung (1.38) äquivalenten Bedingung. In den bekannten Arbeiten [B;H] wird für eine solche Bedingung die Dyson-Entwicklung der Gruppe exp (i H t) für endliche Zeiten benötigt, so daß hier $H-H_0$ als beschränkt anzunehmen ist. Für diesen Fall kann man mit Hilfe der zweiten von Neumannschen Reihe für die Resolvente von H zeigen, daß $\{\exp(i H t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige einparametrige Gruppe beschränkter [K IX § 2.1] J-unitärer Operatoren bilden. Wie dann in [B;H] gezeigt, ergibt sich:

Satz 3.1

Sei $H - H_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Dann gilt (1.38)

$$P^0_{+}\exp(\mathrm{i}\;H\;t)\;P^0_{-}\;\;\epsilon\;\;\mathcal{B}_2(\;\mathcal{H})\quad\forall\;\;t\;\epsilon\;\mathbb{R}$$

genau dann, wenn

$$P_{+}^{0} \int_{t_{1}}^{t_{2}} \exp(i H_{0} t) (H - H_{0}) \exp(-i H_{0} t) dt P_{-}^{0} \epsilon \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H}) \quad \forall t_{1}, t_{2} \epsilon \mathbb{R}$$
 (3.1)

(d.h. genau dann, wenn der erste Term der Bornschen Reihe ein H.S. Operator ist).

Zum einen haben wir in Satz 1.25 die Äquivalenz von (1.38) mit der H.S. - Bedingung an J-K nur für "schwache" Potentiale gezeigt, zum anderen ist die Bedingung der Beschränktheit von H-H₀, wie schon in 2.2 vermerkt, für den K.G. - Hamiltonian im allgemeinen Fall nur mit nicht sehr einfachen Forderungen zu garantieren. Um zu einer

möglichst großen Klasse von regulären Potentialen zu gelangen, werden wir die Beweisidee aus [NSch] (für den Fall der Dirac-Gleichung) verallgemeinern und auf den K.G.-Fall übertragen (Satz 3.5). Zu Beginn soll mit der Beweismethode aus Satz 1.25 eine zu (3.2) äquivalente Bedingung gewonnen werden.

Vorab ein technisches Lemma, welches in [B] bewiesen wird:

Lemma 3.2

Sei $t \mapsto B(t)$ eine stark stetige Abbildung von \mathbb{R} in $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ und gelte

$$\| B(t) \|_{2} \le F(t)$$
 für alle $t \in \mathbb{R}$,

mit einem $F(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

Dann ist auch

$$A := s - \lim_{\kappa \to \infty} \int_{-\kappa}^{\kappa} B(t) dt$$

aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ mit

$$\|A\|_{2} \le \int_{-\infty}^{\infty} \|B(t)\|_{2} dt$$
.

Satz 3.3

Sei H-H₀ ϵ $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, dann ist (3.1) äquivalent zu

$$s - \lim_{\kappa \to \infty} \int_{-\kappa}^{\kappa} X(i\eta) d\eta \quad \epsilon \quad \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H}) , \qquad (3.2)$$

wo
$$X(\lambda) := \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{H_0 - \lambda} G \frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{H_0 - \lambda} , \lambda \in \rho(H_0),$$
 (3.3)

(G wie in (2.4) , also hier :) G = $|H_0|^{-\frac{1}{2}}$ (H - H_0) $|H_0|^{-\frac{1}{2}}$.

Beweis: Der Beweis verwendet vieles der Beweistechnik von Satz 1.25. Es sei daher erlaubt, die Parallelen nur kurz zu skizzieren.

Ho ist selbstadjungiert, nach [K Th.X 2.1] existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Operator A ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ mit $\|A\| < \varepsilon$, so daß $H_p := H_0 + A$ ein reines Punktspektrum hat. Da (-d,d) ϵ $\rho(H_0)$, folgt analog zum Beweis von Satz 1.25, daß wir A so wählen können, daß $(-d_1,d_1)$ ϵ $\rho(H_p)$ gilt für ein d_1 , $0 < d_1 \le d$, und weiterhin H_p positiv definit in \mathcal{H}_+^0 und negativ definit in \mathcal{H}_-^0 ist. Weiter ergibt sich analog zu Satz 1.25, daß exp(i H_0 t) - exp(i H_p t) für alle t ϵ R aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ sind. Dann folgt mit

$$\begin{split} B := & \ P_{+}^{0} \int_{t_{1}}^{t_{2}} \exp(i \ H_{0} \ t) \ (H - H_{0}) \exp(-i \ H_{0} \ t) \ dt \ P_{-}^{0} - \\ & - P_{+}^{0} \int_{t_{1}}^{t_{2}} \exp(i \ H_{p} \ t) \ (H - H_{0}) \exp(-i \ H_{p} \ t) \ dt \ P_{-}^{0} \ : \end{split}$$

$$\parallel B \parallel_2^2 \le |t_1 - t_2| \parallel H - H_0 \parallel c(t_1, t_2)$$
.

Da wir nur ein endliches Integrationsintervall betrachten, gilt (1.38) somit genau dann, wenn

$$P_{+}^{0} \int_{t_{1}}^{t_{2}} \exp(i \ H_{p} \ t) \ (H \ - \ H_{0}) \ \exp(-i \ H_{p} \ t) \ dt \ P_{-}^{0} \ \epsilon \ \mathscr{B}_{2}(\mathscr{H}) \quad \forall \ t_{1}, \ t_{2} \ \epsilon \ \mathbb{R} \ .$$

Wir können nun mit $\{h_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ eine orthonormale Basis für \mathscr{H} wählen, welche aus Eigenvektoren von H_p besteht :

$$H_{p} h_{j} = \omega_{j} h_{j} , \omega_{j} \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}.$$

$$(3.4)$$

Weiter gilt nach dem oben Gesagten, daß \mathcal{H}_{\pm}^0 H_p reduzieren. Die den Eigenvektoren aus \mathcal{H}_{+}^0 (bzw. aus \mathcal{H}_{-}^0) zugehörigen Eigenwerte ω_j erfüllen $\omega_j > d_1$ (bzw. $\omega_j < -d_1$).

Wir erhalten nun

$$\|P_{+}^{0}\int_{t_{1}}^{t_{2}} \exp(i H_{p} t) (H - H_{0}) \exp(-i H_{p} t) dt P_{-}^{0}\|_{2}^{2} =$$

$$= \int_{j_{1}}^{\infty} \sum_{k=1}^{|I|} |(P_{+}^{0} h_{j_{1}}) \int_{t_{1}}^{t_{2}} \exp(i(\omega_{j_{1}} - \omega_{k})t) dt (H - H_{0}) P_{-}^{0} h_{k})|^{2}$$

$$= 4 \int_{j_{1}}^{\infty} \sum_{k=1}^{|I|} (\omega_{j_{1}} - \omega_{k})^{-2} |(P_{+}^{0} h_{j_{1}}) (H - H_{0}) P_{-}^{0} h_{k})|^{2} \sin^{2}[(\omega_{j_{1}} - \omega_{k}) (t_{1} - t_{2})/2]$$

$$= 4 \int_{j_{1}}^{\infty} \sum_{k=1}^{|I|} \frac{|\omega_{j_{1}} - \omega_{k}|}{(\omega_{j_{1}} - \omega_{k})^{2}} |(P_{+}^{0} h_{j_{1}}) (G_{-}^{0} h_{k})|^{2} \sin^{2}[(\omega_{j_{1}} - \omega_{k}) (t_{1} - t_{2})/2] . \quad (3.5)$$

Nach dem oben Gesagten verschwinden alle die Terme der Summe, wo nicht $\omega_j > d_1$ und $\omega_k < -d_1$, also $\omega_j - \omega_k > 2 d_1 (>0)$ gilt. Gilt (1.38), also auch (3.1), so muß die Summe für alle t_1 , $t_2 \in \mathbb{R}$ konvergieren. Wir können nun Lemma 1.24 anwenden und erhalten, daß (1.38) somit

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{\left| \omega_{j} \quad \omega_{k} \right|}{\left(\omega_{j} \quad - \quad \omega_{k} \right)^{2}} \mid \left(P_{+}^{0} h_{j}, G P_{-}^{0} h_{k} \right) \mid^{2} < \infty$$
(3.6)

impliziert. Andererseits folgt aus (3.6) trivial die Konvergenz von (3.5) und somit auch (1.38).

Nun zu Bedingung (3.2). Wir betrachten dazu zuerst die Funktion

$$f_{\eta}(x) := \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|x - i\eta|} = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Da $(-d_1,d_1)$ in den Resolventenmengen von H_0 und H_p enthalten ist, genügt es, die Funktion $f_n(x)$ nur für $|x| \ge d_1$ zu untersuchen. Hier gilt die Abschätzung:

$$|f_{\eta}(x) - f_{\eta}(y)| \le \frac{|x - y|}{2 d_1^{\frac{1}{2}} (d_1^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

Nach Lemma 1.23 folgt dann:

$$\left\| \; f_{\eta}(H_0) \; - \; f_{\eta}(H_p) \; \right\|_2 \leq \frac{1}{2} \; d_1^{\; -\frac{1}{2}} \; \left(d_1^{\; 2} \; + \; \eta^2 \right)^{\; -\frac{1}{2}} \; \left\| \; H_0 \; - \; H_p \; \right\|_2 \qquad \forall \; \eta \; \epsilon \; \mathbb{R} \; .$$

Es ist

$$\begin{split} B_{\eta} \;\; &:= \, f_{\eta}(H_0) \,\, \mathrm{G} \,\, f_{\eta}(H_0) \,\, - \,\, f_{\eta}(H_p) \,\, \mathrm{G} \,\, f_{\eta}(H_p) \\ &= \, f_{\eta}(H_0) \,\, \mathrm{G} \,\, (\,\, f_{\eta}(H_0) \,\, - \,\, f_{\eta}(H_p) \,\,) \,\, + \,\, (\,\, f_{\eta}(H_0) \,\, - \,\, f_{\eta}(H_p) \,\,) \,\, \mathrm{G} \,\, f_{\eta}(H_0) \,\, + \\ &- \,\, (\,\, f_{\eta}(H_0) \,\, - \,\, f_{\eta}(H_p) \,\,) \,\, \, \mathrm{G} \,\, (\,\, f_{\eta}(H_0) \,\, - \,\, f_{\eta}(H_p) \,\,) \quad . \end{split}$$

Da
$$\| f_{\eta}(H_0) \|^2 \le \sup_{\substack{\mu \mid \frac{1}{2} \\ \mu \in \mathbb{R}}} \frac{\| \mu \|^{\frac{1}{2}}}{(\mu^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}} = (d^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{4}} \le (d_1^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{4}}$$

und weil die Beschränktheit von H-Ho die von G impliziert, gilt :

$$\left\| \left\| \mathbf{B}_{\eta} \right\|_{2} \leq c \left\| \left\| \mathbf{G} \right\| \left\| \mathbf{H}_{0} - \mathbf{H}_{\mathbf{p}} \right\|_{2} \left(\mathbf{d}_{1}^{2} + \eta^{2} \right)^{-5/8} \right\|.$$

Wir können nun Lemma 3.2 anwenden und erhalten , daß s-lim $\int_{\kappa\to\infty}^{\kappa} B_{\eta} d\eta$ aus

 $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ist. Damit ergibt sich, daß (3.2) genau dann gilt, wenn

$$D := s - \lim_{\kappa \to \infty} \int_{-\kappa}^{\kappa} f_{\eta}(H_{p}) G f_{\eta}(H_{p}) d\eta \quad \epsilon \quad \mathcal{B}_{2}(\mathcal{H})$$

ist. Man erhält mit der Basis (3.4)

$$\| D \|_{2}^{2} = \int_{j, k=1}^{\infty} \left| \sum_{\varepsilon_{i} \in I=+, -} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \omega_{i} \omega_{k} \right|^{\frac{1}{2}}}{\left(\omega_{j} - i \eta \right) \left(\omega_{k} - i \eta \right)} d\eta \right| \left(P_{\varepsilon}^{0} h_{j}, G P_{\varepsilon^{1}}^{0} h_{k} \right) \right|^{2}.$$
 (3.7)

Nun gilt für a, b > 0

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a - i\eta)^{-1} (b - i\eta)^{-1} d\eta = 0 , \int_{-\infty}^{\infty} (a + i\eta)^{-1} (b - i\eta)^{-1} d\eta = 2 \pi (a + b)^{-1}$$

und damit

$$\|D\|_{2}^{2} = 16 \pi^{2} \sum_{j_{k}=1}^{\infty} \frac{|\omega_{j} - \omega_{k}|}{(\omega_{j} - \omega_{k})^{2}} \|(P_{+}^{0} h_{j}, G P_{-}^{0} h_{k})\|^{2}$$

wobei wir die J-Symmetrie von G benutzten. (Es ist

$$\mid (P_{-}^{0} h_{j}, G P_{+}^{0} h_{k}) \mid = \mid (P_{-}^{0} h_{j}, J G P_{+}^{0} h_{k}) \mid = \mid (G P_{-}^{0} h_{j}, P_{+}^{0} h_{k}) \mid .)$$

Mit (3.7) und (3.6) folgt die Behauptung. 🛮

Die Bedingung (3.2) bedeutet, daß der erste Beitrag zu J-K aus der zweiten Resolventengleichung für die Resolventen von H und H₀ ein H.S.-Operator ist. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß wir, um die Äquivalenz der Bedingungen (3.7) und (3.2) zu zeigen, nicht die Beschränktheit von H-H₀ sondern nur die von G benötigten.

Zum Beweis des Satzes 3.5 gebrauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.4

Gilt (3.2), so folgt mit der Bezeichnung (3.3):

$$\| P_{+}^{0} X(i\eta) P_{-}^{0} \|_{2} = \| P_{-}^{0} X(i\eta) P_{+}^{0} \|_{2} = \frac{c}{1 + |\eta|}$$
(3.8)

für alle $\eta \in \mathbb{R}$ und ein c > 0 unabhängig von η .

Beweis: Mit den Bezeichnungen und Rechnungen aus dem Beweis von Satz 3.3 erhalten wir:

$$\begin{split} \| \, P_+^0 \, X(\mathrm{i} \eta) \, P_-^0 \, \|_2^2 & \leq c \, \| \, P_+^0 \, \frac{ | \, H_p \, |^{\frac{1}{2}}}{H_p - \mathrm{i} \, \eta} \, G \, \frac{ | \, H_p \, |^{\frac{1}{2}}}{H_p - \mathrm{i} \, \eta} \, P_-^0 \, \|_2^2 \\ & = c \, \int_{\mathrm{j}, \, k=1}^\infty \frac{ | \, \omega_i \, \omega_k \, |}{ (\, \omega_j^{\, 2} \, + \, \eta^{\, 2}) \, (\, \omega_k^{\, 2} \, + \, \eta^{\, 2})} \, | \, (\, P_+^0 \, h_j , \, G \, P_-^0 \, h_k) \, |^2 \end{split}$$

für alle $\eta \in \mathbb{R}$. Nun gilt

$$\left(\left.\omega_{j}\right.^{2} + \left.\eta^{2}\right)\left(\left.\omega_{k}\right.^{2} + \left.\eta^{2}\right)\right. \geq \frac{1}{4}\left(2\left.\eta^{2} + d_{1}^{2}\right)\left(\left.\omega_{j} - \left.\omega_{k}\right)\right.^{2}\right.$$

für $|\omega_j|$, $|\omega_k| > d_1$. Da nach Voraussetzung und Satz 3.3 der Ausdruck (3.7) summierbar ist, folgt die Behauptung für $P^0_+ X(i\eta) P^0_-$. Weiterhin ist wegen der J-Symmetrie von G

$$P_{-}^{0} X(i\eta) P_{+}^{0} = -P_{-}^{0} \frac{|H_{0}|^{\frac{1}{2}}}{H_{0} - i\eta} JG J \frac{|H_{0}|^{\frac{1}{2}}}{H_{0} - i\eta} P_{+}^{0}$$

$$= -P_{-}^{0} \frac{|H_{0}|^{\frac{1}{2}}}{H_{0} - i\eta} G^{*} \frac{|H_{0}|^{\frac{1}{2}}}{H_{0} - i\eta} P_{+}^{0}$$

$$= - (P_{+}^{0} X(-i\eta) P_{-}^{0})^{*}, \qquad (3.9)$$

so daß die Abschätzung (3.8) auch für die H.S. - Norm von Po X(in) Po gilt. u

Satz 3.5

Seien V, A_j , $j=1,...,\nu$, A_j symmetrische, relativ ϵ -beschränkte Operatoren in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$. Sei G wie in (2.4).

Existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$|H_0|^{-\frac{1}{2} + \delta} G |H_0|^{\frac{1}{2}}$$
 (3.10)

kompakt ist, und gilt (3.2) so folgt mit H wie in Satz 2.15 und K wie in (2.56), daß $J-K \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ist, die Potentiale also regulär sind.

Ist umgekehrt J-K ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ und gibt es ein $\delta > 0$, so daß der Operator (3.10) beschränkt ist, so folgt (3.2).

Beweis: Natürlich verläuft der Beweis unabhängig von der Wahl der Aufteilung in "positive" und "negative" Teilspektren durch die Wahl des Integrationsweges in K. O.E.d.A. wählen wir wieder einen Weg "in der Nähe" der imaginären Achse. Nach (2.56), (2.52) ist

$$J - K = s - \lim_{\kappa \to \infty} \frac{1}{\prod i} \int_{a-i \kappa}^{a+i \kappa} A_{\lambda} (H - \lambda)^{-1} d\lambda , \qquad (3.11)$$

mit $A_{\lambda} := \frac{\overline{|H_0|^{\frac{1}{2}}}}{\overline{H_0 - \lambda}} G |H_0|^{\frac{1}{2}}$, a ϵ (0,r), r wie in (2.39).

Mit
$$P_{+}^{0} - P_{+} = (P_{+}^{0} + P_{-}^{0}) (P_{+}^{0} - P_{+}) (P_{+} + P_{-})$$

= $P_{+}^{0} (P_{+}^{0} - P_{+}) P_{-} + P_{-}^{0} (P_{+}^{0} - P_{+}) P_{+}$

und den elementaren Eigenschaften der Projektoren folgt

$$J - K = s - \lim_{\kappa \to \infty} \frac{1}{\Pi i} \int_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} (P_{+}^{0} A_{\lambda} P_{-} + P_{-}^{0} A_{\lambda} P_{+}) (H - \lambda)^{-1} d\lambda$$

$$= s - \lim_{\kappa \to \infty} \frac{1}{\Pi i} \int_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} (T_{1}(\lambda) + T_{2}(\lambda)) d\lambda , \qquad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} & \quad \mathbf{T}_{1}(\lambda) \; := \; (\; \mathbf{P}^{0}_{+} \; \mathbf{A}_{\lambda} \; \mathbf{P}^{0}_{-} \; + \; \mathbf{P}^{0}_{-} \; \mathbf{A}_{\lambda} \; \mathbf{P}^{0}_{+} \;) \; (\mathbf{H} \; - \; \lambda)^{-1} \\ & \quad \mathbf{T}_{2}(\lambda) \; := \; \frac{1}{2} \; \mathbf{J} \; \mathbf{A}_{\lambda} \; (\mathbf{J} \; - \; \mathbf{K}) \; (\mathbf{H} \; - \; \lambda)^{-1} \; \; . \end{aligned}$$

Sei hier und im folgenden Re $\lambda = a$. Mit (2.52), der Definition von A_{λ} und der Bezeichnung (3.3) ist dann

$$T_{1}(\lambda) = P_{+}^{0} X(\lambda) P_{-}^{0} + P_{-}^{0} X(\lambda) P_{+}^{0} - T_{3}(\lambda)$$
(3.13)

$${\rm mit} \qquad {\rm T}_3(\lambda) = ({\rm P}^0_+ \, {\rm A}_\lambda \, {\rm P}^0_- + {\rm P}^0_- \, {\rm A}_\lambda \, {\rm P}^0_+) \, {\rm A}_\lambda \, ({\rm H} \, - \, \lambda)^{-1} \ .$$

Um Bereichsprobleme zu vermeiden, betrachten wir den zu $T_3(\lambda)$ adjungierten Operator:

$$T_{3}(\lambda)^{*} = (I + J A_{X} J)^{-1} (H_{0} - \overline{\lambda})^{-1} A_{\lambda}^{*} (P_{-}^{0} A_{\lambda}^{*} P_{+}^{0} + P_{+}^{0} A_{\lambda}^{*} P_{-}^{0})$$

$$= (I + J A_{X} J)^{-1} \frac{|H_{0}|^{\frac{1}{2}}}{|H_{0} - \overline{\lambda}|} J G J |H_{0}|^{\frac{1}{2}} (P_{-}^{0} X(\lambda)^{*} P_{+}^{0} + P_{+}^{0} X(\lambda)^{*} P_{-}^{0}) , \quad (3.14)$$

wobei (2.50) - (2.52) verwendet wurden. Aus (2.53), (2.54), Lemma 3.4 und der Beschränktheit des Operators (3.10) folgt, daß der Operator $T_3(\lambda)$ aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ist. Seine H.S. Norm läßt sich abschätzen durch eine integrierbare Funktion:

$$\begin{split} \left\| \left\| T_{3}(\lambda) \right\|_{2} &= \left\| \left\| T_{3}(\lambda)^{*} \right\|_{2} \leq \\ &\leq \left\| \left(I + J A_{X} J \right)^{-1} \right\| \left\| \frac{\left| H_{0} \right|^{1-\delta}}{H_{0} - \lambda} \right\| \left\| \left| H_{0} \right|^{-\frac{1}{2} + \delta} J G J \left| H_{0} \right|^{\frac{1}{2}} \right\| \cdot \\ &\cdot \left(\left\| P_{-}^{0} X(\lambda) P_{+}^{0} \right\|_{2} + \left\| P_{+}^{0} X(\lambda) P_{-}^{0} \right\|_{2} \right) \\ &\leq \frac{c(\delta)}{(1 + \left| Im \lambda \right|)^{1+\delta}} \end{split}.$$

Nach Lemma 3.2 ist somit der Beitrag von T_3 in (3.12) aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$, mit Voraussetzung (3.2) und mit (3.13) somit der ganze Beitrag von T_4 .

Nach Voraussetzung existiert ein $\delta>0$, so daß der Operator (3.10) kompakt ist. Wir können diesen Operator bzw. seinen Abschluß für jedes $\delta'>0$ zerlegen in die Summe eines H.S. Operators S und eines beschränkten Operators Z mit $\|Z\| \le \delta'$. Hiermit hat $T_2(\lambda)$ die Form

$$T_2(\lambda) = \frac{1}{2} J \frac{|H_0|^{1-\delta}}{|H_0 - \lambda|} (S + Z) (J - K) (H - \lambda)^{-1}$$
.

Wegen (2.55) und (2.54) ist die H.S.-Norm des Anteils von T_2 , welcher S enthält, integrierbar und so dieser Anteil von T_2 an (3.12) aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$. Insgesamt können wir nun (3.12) schreiben als

$$J - K = B + s - \lim_{\kappa \to \infty} \frac{1}{2 \prod i} J \int_{a-i\kappa}^{a+i\kappa} \frac{|H_0|^{1-\delta}}{|H_0 - \lambda|} Z(J - K) (H - \lambda)^{-1} d\lambda ,$$

mit einem B ϵ $\mathscr{B}_2(\mathscr{H})$, abhängig von δ , δ '. Iteration ergibt nun

$$J - K = B + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J}{2\pi i} \right]^{k} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \dots \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{|H_{0}|^{1-\delta}}{|H_{0}-\lambda_{1}|} Z \cdot \dots \cdot \frac{|H_{0}|^{1-\delta}}{|H_{0}-\lambda_{k}|} Z \cdot \dots \cdot B (H - \lambda_{k})^{-1} \cdot \dots \cdot (H - \lambda_{1})^{-1} d\lambda_{k} \dots d\lambda_{1} , \qquad (3.15)$$

wobei, wie wir gleich sehen werden, die Integrale absolut konvergieren. Die H.S. - Norm des Integranden des k-fachen Intergrals läßt sich nach oben abschätzen durch

$$\left\| \frac{\mid H_0 \mid^{1-\delta}}{\mid H_0 - \lambda_1 \mid} \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \frac{\mid H_0 \mid^{1-\delta}}{\mid H_0 - \lambda_k \mid} \right\| \, \left\| \, Z \, \right\|^k \, \left\| \, B \, \right\|_2 \, \left\| (H - \lambda_k)^{-1} \right\| \cdot \dots \cdot \left\| (H - \lambda_1)^{-1} \right\| \, .$$

Wegen (2.55) und (2.54) ist dieser Integrand entlang des vorgegebenen Weges k-fach integrierbar, nach Lemma 3.2 jeder der Summanden in (3.15) aus $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$. Somit gilt

$$\left\| \left\| J - K \right\|_{2} \leq \left\| B \right\|_{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi)^{-k} \left\| B \right\|_{2} \left\| \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left\| \frac{\left\| H_{0} \right\|^{1-\delta}}{\left\| H_{0} - \lambda \right\|^{2}} \right\| \left\| \left\| Z \right\| \left\| \left(H - \lambda \right)^{-1} \right\| d\lambda \right\|^{k}.$$

Da wir nach Voraussetzung Z so wählen können, daß | Z | beliebig klein wird, folgt die Summierbarkeit der Reihe und damit der erste Teil der Behauptung.

Seien nun die äußeren Felder regulär und der Operator (3.10) beschränkt für ein $\delta > 0$. In (3.12) folgt mit (2.55), (2.57) und Lemma 3.2, daß das Integral über T_2 ein H.S.-Operator ist. Wenn wir dies auch für das Integral über T_3 (3.13) zeigen können, folgt die Behauptung aus (3.12).

Es ist für $\lambda \in \rho(H)$

$$\| P_{+}^{0} (H - \lambda)^{-1} P_{-}^{0} \|_{2} = \| P_{+}^{0} P_{-} (H - \lambda)^{-1} P_{-}^{0} + P_{+}^{0} (H - \lambda)^{-1} P_{+} P_{-}^{0} \|_{2}$$

$$\leq (\| P_{+}^{0} P_{-} \|_{2} + \| P_{-}^{0} P_{+} \|_{2}) \| (H - \lambda)^{-1} \|$$
(3.16)

Sei ab nun $\lambda \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$. Mit Hilfe von (2.13) folgt

$$\begin{split} P_{+}^{0} (H - \lambda)^{-1} P_{-}^{0} &= - P_{+}^{0} X(\lambda) P_{-}^{0} + P_{+}^{0} \frac{\mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}}}{\mid H_{0} - \lambda} G \frac{\mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}}}{\mid H_{0} - \lambda} G \mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}} (H - \lambda)^{-1} P_{-}^{0} \\ &= - P_{+}^{0} X(\lambda) P_{-}^{0} - P_{+}^{0} \frac{\mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}}}{\mid H_{0} - \lambda} G \mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}} P_{+}^{0} (H - \lambda)^{-1} P_{-}^{0} + \\ &+ P_{+}^{0} \frac{\mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}}}{\mid H_{0} - \lambda} G \frac{\mid H_{0} \mid}{\mid H_{0} - \lambda} P_{-}^{0} G \mid H_{0} \mid^{\frac{1}{2}} (H - \lambda)^{-1} P_{-}^{0} \end{split}$$

oder

$$(I + P_{+}^{0} \frac{|H_{0}|^{\frac{1}{2}}}{|H_{0} - \lambda|} G |H_{0}|^{\frac{1}{2}}) P_{+}^{0} (H - \lambda)^{-1} P_{-}^{0} =$$

$$= - P_{+}^{0} X(\lambda) P_{-}^{0} - P_{+}^{0} \frac{|H_{0}|^{\frac{1}{2}}}{|H_{0} - \lambda|} G |H_{0}|^{\frac{1}{2}} P_{+}^{0} (H - \lambda)^{-1} P_{-}^{0} . \qquad (3.17)$$

Aus der Voraussetzung erhält man mit (2.54):

$$\|\frac{|H_0|^{\frac{1}{2}}}{|H_0 - \lambda|} G |H_0|^{\frac{1}{2}}\| \le \frac{c(\delta)}{(1 + |Im \lambda|)^{\delta}}.$$
(3.18)

Die linke Seite der Gleichung (3.17) ist somit ein H.S.-Operator. Um Bereichsprobleme zu vermeiden, betrachten wir den zur rechten Seite von (3.17) adjungierten Operator und erhalten für diesen mit (2.51),(2.52):

$$(-P_{-}^{0}(I + J A_{X} J)^{-1} \frac{|H_{0}|^{\frac{1}{2}}}{H_{0} - \lambda} G^{*}|H_{0}|^{\frac{1}{2}} - I) P_{-}^{0} X(\lambda)^{*} P_{+}^{0} =: (A - I) P_{-}^{0} X(\lambda)^{*} P_{+}^{0}$$
(3.19)

Die Existenz der hier auftretenden Inversen als Operatoren aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ folgt für alle λ mit hinreichend großem Imaginärteil aus (3.18) (und der J-Symmetrie von G). Ebenso folgt hieraus, daß für diese λ der Operator I-A invertierbar ist mit (gleichmäßig in λ) beschränktem Inversen. So ergibt sich aus (3.16), (3.17), (3.19):

$$\|P_{+}^{0} X(\lambda) P_{-}^{0}\|_{2} = \|P_{-}^{0} X(\lambda)^{*} P_{+}^{0}\|_{2} \le c \|(H - \lambda)^{-1}\|$$
(3.20)

für alle λ ϵ $\rho(H)$ mit hinreichend großem Imaginärteil . Die gleiche Abschätzung erhält

man für $\parallel P_{-}^{0} X(\lambda) P_{+}^{0} \parallel_{2}$ mit Hilfe von (3.9) . Mit (3.14), (3.18) und (3.20) folgt nun :

$$\| \operatorname{T}_{3}(\lambda) \|_{2} \leq \frac{\operatorname{c}(\delta)}{(1 + |\operatorname{Im} \lambda|)^{1+\delta}}$$

Die notwendige Bedingung für die Regularität im obigen Satz wurde zwar nur für die nicht sehr allgemeine Eingangsvoraussetzung der Beschränktheit von (3.10) gezeigt, jedoch ist diese immerhin schwächer und im allgemeinen Fall leichter zu kontrollieren als die Beschränktheit von $H-H_0=|H_0|^{\frac{1}{2}}G|H_0|^{\frac{1}{2}}$ (der Voraussetzung von Satz 3.1). Es ist leicht zu sehen, daß wir, falls nur (3.10) mit $\delta=0$ vorausgesetzt wird, als notwendige Regularitätsbedingung (die gegenüber (3.2) schwächere) Forderung (3.8) erhalten. Bei der hinreichenden Regularitätsbedingung werden wir in der Anwendung in Kapitel 4 sehen, daß (3.10) die durch (3.2) gestellte Bedingung praktisch nicht weiter verschärft.

4. REGULARITÄT FÜR STÖRUNGEN DES FREIEN HAMILTONIANS

4.1 Regularitätsbedingungen

In diesem Abschnitt wollen wir notwendige und hinreichende Bedingungen für reguläre Potentiale für den Fall untersuchen, in welchem der "freie" Hamiltonian H₀ keine weiteren Felder enthält.

Sei also ε_0^2 der Abschluß des Operators $-\Delta+m^2$ (m>0) auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ in $L_2(\mathbb{R}^\nu)$ und damit $\varepsilon_0:=(\varepsilon_0^2)^{\frac{1}{2}}$ sebstadjungiert und positiv definit. Seien weiter V, A_j , $j=1,...,\nu$, A_j Multiplikationsoperatoren in $L_2(\mathbb{R}^\nu)$ mit reellwertigen Funktionen $V(\,\cdot\,)$, $A_j(\,\cdot\,)$, $A_j(\,\cdot\,)$, \hat{D} bezeichne die Fouriertransformation in $L_2(\mathbb{R}^\nu)$.

Die Operatoren H_0 , H etc., seien wie in Kapitel 2 definiert, wobei immer $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$. Insbesondere gilt nun

$$\sigma(H_0) = \sigma_e(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = (-\infty, -m] \cup [m,\infty)$$
.

In Kapitel 2 wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Regularität externer Felder für allgemeines ε entwickelt. Sind die Potentiale relativ ε-beschränkt, so ist G (2.4) wohldefiniert und die Bedingung (3.2) von zentraler Bedeutung. Mit (3.6) hatten wir schon eine äquivalente Bedingung gefunden, sie hat hier die Gestalt

$$\int \int \frac{E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}}}{(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})^2} | P_{+}^0 G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) P_{-}^0 |^2 d\mathbf{p} d\mathbf{q} < \infty , \qquad (4.1)$$

wobei $E_p := (m^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ (p := |p|, $p \in \mathbb{R}^p$) und G(p,q) den Integralkern der Fouriertransformierten des Operators G bezeichnet.

Benenne \mathcal{P} die Menge der Potentiale, deren Fouriertransformierte der Bedingung (4.1) genügen. Sei für α , $\beta > 0$ $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ die Klasse von Multiplikationsoperatoren B in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ mit reellwertigen Funktionen, deren Fouriertransformierten $\hat{B}(\cdot)$ der Bedingung

$$\int \frac{p^{\alpha}}{1+p^{\beta}} | \hat{B}(p) |^2 dp < \infty$$
 (4.2)

genügen.

Lemma 4.1

Die Potentiale in \mathcal{P} sind nichttrivial nur in $\nu \le 3$ Dimensionen. Für $\nu > 1$ gibt es keine Vektorpotentiale in \mathcal{P} . In $\nu \le 3$ Dimensionen gilt für rein elektrostatische Potentiale

$$\mathcal{P}(2,4-\nu-\delta)$$
 C \mathcal{P} C $\mathcal{P}(2,4-\nu)$

und für rein skalare Potentiale

$$\mathcal{P}(0.4-\nu-\delta) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(0.4-\nu)$$

für jedes $\delta > 0$.

Beweis: Es ist

$$G(p,q) = \begin{bmatrix} \hat{V}(p-q)E_q^{-1} & 0 \\ E_p^{-1}[(p+q)\cdot \hat{A}(p-q) + \hat{A}^2(p-q) - A_p(p-q)]E_q^{-1} & E_p^{-1}\hat{V}(p-q) \end{bmatrix},$$

$$P_{+}^{0} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
, $P_{-}^{0} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

und so ergibt sich für (4.1) die Bedingung

$$\mathcal{I} := \int \int (E_p + E_q)^{-2} (E_p E_q)^{-1} | W(p,q) |^2 dp dq < \infty$$
 (4.3)

mit
$$W(p,q) := (E_p - E_q) \hat{V}(p-q) + (p+q) \cdot \hat{A}(p-q) + \hat{A}^2(p-q) - A_4(p-q)$$
.

Wir nehmen nun die Konvergenz der Integration über die Beiträge, die magnetische Felder enthalten, an und zeigen, daß dies zum Widerspruch führt. Hierzu betrachten wir zu-

erst den Beitrag zu ${\mathcal I}$ von dem in $W(\cdot,\cdot)$ linearen Anteil von ${\bf \hat A}(\cdot)$:

$$\mathcal{I}_{A} := \int \int \left(E_{p} + E_{q} \right)^{-2} \left(E_{p} E_{q} \right)^{-1} \, \left| p + q \right|^{2} \, \left| \widehat{A}(p - q) \right|^{2} \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}q \quad .$$

Würde nun \mathcal{I}_{A} konvergieren, so könnten wir mit der Substitution

$$s := p + q , t := p - q$$

und den Bezeichnungen

 $a:=s^2+t^2+4\ m^2\ ,\ b:=2\ s\ t\ ,\ \theta:=\ \textbf{x}\,(\textbf{s},\textbf{t})\ ,\ u:=\cos\ \theta\ ,$ sowie dem Satz von Fubini schreiben :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}} = 8 \iint \mathbf{s}^2 f(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}) | \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) |^2 d\mathbf{t} d\mathbf{s}$$

mit
$$f(s,t,u) := \left[(a + b u)^{\frac{1}{2}} + (a - b u)^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} (a^2 - b^2 u^2)^{-\frac{1}{2}}$$
 (4.5)

Wegen a>b und damit a-bu, a+bu, $a^2-b^2u^2>0$ ist f(s,t,u) für alle Parameter wohldefiniert. Weiter würde mit dem Satz von Fubini folgen, daß es $t_0\geq 0$, $u_0\in [1,-1]$ gibt, so daß

$$\int s^2 f(s,t_0,u_0) ds$$

konvergiert. Für $\nu > 1$ divergiert aber dieses Integral, was zum Widerspruch in diesem Fall führt und die Divergenz von $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}$ impliziert. Diese Divergenz kann nicht durch den in $\hat{\mathbf{A}}(\cdot)$ quadratischen Beitrag zu $\mathbf{W}(\cdot,\cdot)$ kompensiert werden und es folgt, daß es in $\nu > 1$ Dimensionen kein Vektorpotential in \mathcal{P} gibt.

Mit
$$(E_p - E_q) = (E_p + E_q)^{-1} (p + q) (p - q)$$

erhält man für einen konvergierenden Beitrag vom elektrostatischen Potential zu ${\mathcal I}$

$$\mathcal{I}_{e} := 16 \left[\int s^{2} g(s,t,u) t^{2} |\widehat{V}(t)|^{2} dt ds \right]$$

$$(4.6)$$

mit
$$g(s,t,u) := ((a + b u)^{\frac{1}{2}} + (a - b u)^{\frac{1}{2}})^{-4} (a^2 - b^2 u^2)^{-\frac{1}{2}}$$
 (4.7)

und für den betreffenden Beitrag vom skalaren Potential

$$\mathcal{I}_{\mathbf{j}} := 8 \iiint \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}) |\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j}}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} d\mathbf{s} . \tag{4.8}$$

Mit einer Argumentation wie oben ergibt sich, daß es keine elektrostatischen und skalaren Potentiale aus \mathcal{P} in $\nu > 3$ Dimensionen gibt.

Betrachten wir nun für $u \le 3$ zuerst das elektrische Feld. Mit der Substitution (4.4) sowie dem Satz von Fubini können wir $\mathcal{I}_{\mathbf{e}}$ schreiben als

$$\begin{split} \mathcal{I}_e &:= 16 \int \int t^2 \, \mathcal{I}_l(t) \, |\widehat{V}(t)|^2 \, \mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{mit} \quad \mathcal{I}_l(t) &:= \mathcal{I}_{R_{-m}}(t) \; , \end{split}$$

$$\mathcal{I}_{R}(t) := \begin{cases} \int_{0}^{R} h(s,t,1) ds & \nu = 1 \\ \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} h(s,t,\cos\theta) d\theta ds & \nu = 2 \\ 2\pi \int_{0}^{R} \int_{0}^{1} h(s,t,u) du ds & \nu = 3 \end{cases}$$

$$h(s,t,u) := \frac{s}{((a+bu)^{\frac{1}{2}} + (a-bu)^{\frac{1}{2}})^4 (a^2 - b^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}$$
 (4.9)

h(s,t,u) ist eine wohldefinierte C^{∞} -Funktion in s,t,u, das Integral über u (bzw. - über θ) eine C^{∞} -Funktion in s,t und schließlich $\mathcal{I}_{R}(t)$, R>0, eine C^{∞} -Funktion in t. Es gilt:

$$a^2 - b^2 u^2 \ge a^2 - b^2 > s^2 (s^2 - 2 t^2)$$
,

also
$$a^2 - b^2 u^2 > \frac{1}{2} s^4$$
 für $s \ge 2 t$.

Wegen
$$(a + b u)^{\frac{1}{2}} + (a - b u)^{\frac{1}{2}} \ge \sqrt{2} a^{\frac{1}{2}} \ge \sqrt{2} s$$

folgt für $s \ge 2 t > 0$:

$$\int_{-1}^{1} h(s,t,u) du \le \frac{1}{3\sqrt{2}} s^{\nu-5}$$

und so für R > 2 t

$$\left| \ \mathcal{I}_{I}(t) \ - \ \mathcal{I}_{R}(t) \ \right| \ \leq \ c(\nu) \quad \int\limits_{R}^{\infty} \ s^{\nu-5} \ \mathrm{d}s = \frac{c\left(\nu\right)}{4-\nu} \ \mathrm{R}^{\nu-4} \ .$$

Mit einem $\varepsilon/3$ -Argument folgt aus der Stetigkeit von $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\cdot)$ die von $\mathcal{I}_{\mathbb{I}}(\cdot)$ auf \mathbb{R}_{\bullet} .

Weiterhin ist $\mathcal{I}_{\mathbf{l}}(\cdot)$ positiv und

$$\lim_{t \to 0} \mathcal{I}_{l}(t) = c(\nu) \int_{0}^{\infty} s^{\nu+1} (s^{2} + 4 m^{2})^{-3} ds$$
 (4.10)

endlich. Wir benötigen noch das Verhalten von $\mathcal{I}_I(t)$ für $t \to \infty$. Dazu führen wir die Skalentransformation

$$\tilde{s} := s/t$$
, $\tilde{a} := a/t^2 = \tilde{s}^2 + 1 + 4 m^2/t^2$, $\tilde{b} := b/t^2 = 2 \tilde{s}$ (4.11)

durch. Nun gilt

$$(4 \text{ m}^2)^2 \le (a - b u)(a + b u) = a^2 - b^2 u^2 \le a^2$$
 (4.12)

und so

$$c_{1}(\nu) t^{\nu-4} \int_{0}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{\tilde{s}^{\nu+1} u^{2}}{((\tilde{a}+\tilde{b}u)^{\frac{1}{2}}+(\tilde{a}-\tilde{b}u)^{\frac{1}{2}})^{4}(\tilde{a}^{2}-\tilde{b}^{2}u^{2})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta} \tilde{a}^{\frac{1}{2}\delta}} du d\tilde{s} \leq$$

$$\leq \mathcal{I}_{1}(t) \leq c_{2}(\nu) t^{\nu-4+\delta} \int_{0-1}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{a}+\tilde{b}u)^{\frac{1}{2}}+(\tilde{a}-\tilde{b}u)^{\frac{1}{2}})^{4}} \frac{2}{(\tilde{a}^{2}-\tilde{b}^{2}u^{2})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta}} du d\tilde{s}. \tag{4.13}$$

Hier wird der Sinn, die Abschätzung (4.12) einzubauen, klar: Die Integranden weisen wegen $(\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2) \rightarrow (\tilde{s} - 1)^2 (\tilde{s} + 1)^2$ für $t \rightarrow \infty$ bei $\tilde{s} = 1$, $u = \pm 1$ im zu bildenden Limes $t \rightarrow \infty$ eine lokale Singularität auf, welche aber für $\delta > 0$ integrierbar ist. Es folgt:

$$\lim_{t \to \infty} t^{4-\nu-\delta} \mathcal{I}_{l}(t) \leq \text{const.} \leq \lim_{t \to \infty} t^{4-\nu} \mathcal{I}_{l}(t) . \tag{4.14}$$

Mit (4.10) und der Stetigkeit von $\mathcal{I}_{\mathbf{l}}(\,\cdot\,)$ ergibt sich schließlich

$$\int \frac{t^2}{1+t^{4-\nu-\delta}} |\widehat{V}(t)|^2 dt \le c \mathcal{I}_e \le \int \frac{t^2}{1+t^{4-\nu}} |\widehat{V}(t)|^2 dt$$

für alle $\delta > 0$.

Beim skalaren Potential können wir völlig analog vorgehen. Hier tritt

$$\mathcal{I}_{\mathbf{j}} := 8 \int \mathcal{I}_{2}(\mathbf{t}) |\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j}}(\mathbf{t})|^{2} d\mathbf{t}$$

an die Stelle von \mathcal{I}_e , wobei $\mathcal{I}_2(t)$ die gleiche Form wie $\mathcal{I}_1(t)$ hat, wo h(s,t,u) durch

$$\frac{s}{((a+bu)^{\frac{1}{2}}+(a-bu)^{\frac{1}{2}})^2(a^2-b^2u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ersetzt wird. Für $t \to \infty$ hat $\mathcal{I}_2(t)$ dasselbe Verhalten wie $\mathcal{I}_1(t)$. Die Behauptung folgt unmittelbar. \square

Die Vorgehensweise im obigen Beweis ist eine relativ elegante Methode, die Bedingung (4.1) zu analysieren. Man kann ebensogut diesen Ausdruck exakt berechnen und gelangt zu elliptischen Integralen. Dies ist allerdings langwieriger und führt zu keinem besseren Ergebnis.

Satz 3.5 liefert nun zusammen mit dem obigen Lemma eine notwendige Regularitätsbedingung für alle die Potentiale, für welche $|H_0|^{-\frac{1}{2}+\delta}G|H_0|^{\frac{1}{2}}$ beschränkt ist für ein $\delta>0$. Diese letzte Bedingung erfüllen Felder, für die

$$(1+\left|\cdot\right|)^{\frac{1}{2}}\,\widehat{V}(\,\cdot\,)\;,\,(1+\left|\cdot\right|)^{\frac{1}{2}}\,\widehat{A}(\,\cdot\,)\;,\,\widehat{A}_{\boldsymbol{s}}(\,\cdot\,)\quad\epsilon\;L_{\boldsymbol{l}}(\mathbb{R}^{\nu})$$

gilt. Dies folgt einfach mit $\frac{E_p^{\frac{1}{2}}}{E_q^{\frac{1}{2}}} < c \left(1 + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|\right)^{\frac{1}{2}}$ und da eine Faltung mit einer L₁-Funktion ein beschränkter Operator in L₂ ist. Eine genauere Rechnung mit Hilfe der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung zeigt, daß es genügt

$$(1+\left|\cdot\right|)^{\frac{1}{2}}\,\widehat{V}(\,\cdot\,)\;,\,(1+\left|\cdot\right|)^{\frac{1}{2}}\,\widehat{A}(\,\cdot\,)\quad\epsilon\;L_{s}(\mathbb{R}^{\nu}),\quad\widehat{A}_{4}(\,\cdot\,)\quad\epsilon\;L_{t}(\mathbb{R}^{\nu})$$

für $1 \le s \le 4/3$, $1 \le t \le 4$ zu verlangen. Indem man als Potentiale z.B. Schwartzsche Funktionen wählt, ergibt Lemma 4.1, daß es in $\nu > 3$ Dimensionen keine regulären Potentiale und für $\nu > 1$ keine regulären Vektorpotentiale gibt. Für elektrische bzw. skalare Felder, welche den zuletzt entwickelten Bedingungen genügen, ist die Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}(2,4-\nu)$ bzw. zu $\mathcal{P}(0,4-\nu)$ notwendig für ihre Regularität.

Nun zu einer hinreichenden Bedingung für die Regularität.

Lemma 4.2

Gilt $T \in \mathcal{P}(\alpha, \beta)$ mit $\alpha \geq \beta \geq 0$, so folgt, daß T relativ ϵ_0 a-kompakt ist für alle $a > \max(\frac{1}{2}(\nu - \alpha + \beta), 0)$.

Beweis: Die relative ε₀ a - Kompaktheit von T folgt nach [RSIII Th.XI 20], falls

$$T(\cdot) \in L_t(\mathbb{R}^{\nu}) \text{ mit } t \in \begin{cases} (\nu/a, \infty) & \text{für } \nu/a > 2 \\ [2, \infty) & \text{sonst} \end{cases}$$
 (4.15)

(Es ist $(1 + |\cdot|)^{-a} \in L_t(\mathbb{R}^{\nu})$.).

Sei nun T aus $\mathcal{P}(\alpha, \alpha - \gamma)$ mit $\alpha, \gamma \geq 0$. Wir zerlegen T, so daß für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\nu}$

$$\widehat{T}(\mathbf{p}) = \widehat{T}_1(\mathbf{p}) + \widehat{T}_2(\mathbf{p}) \quad \text{mit} \quad \widehat{T}_1(\mathbf{p}) := \widehat{T}(\mathbf{p}) \ \chi(\mathbf{p}) \ , \quad \widehat{T}_2(\mathbf{p}) := \widehat{T}(\mathbf{p}) \ (1 - \chi(\mathbf{p}))$$

gilt, wobei $\chi(\cdot)$ die charakteristische Funktion des Intervalls [0,1] bezeichne. Mit der Hölderschen Ungleichung folgt für $\hat{T}_1(\cdot)$:

$$\int \|\widehat{T}_l(p)\|^s \; \mathrm{d} p \leq \left[\int p^\alpha \; |\widehat{T}_l(p)|^2 \; \mathrm{d} p \; \right]^{\frac{5}{2}} \; \left[\int p^{-\frac{\alpha s}{2-s}} \; \mathrm{d} p \; \right]^{\frac{2-s}{2}} \; .$$

Es muß $\alpha < \nu$ gelten, hiermit folgt dann $\widehat{T}_l(\cdot) \in L_s(\mathbb{R}^{\nu})$ mit $s \in [1, \frac{2\nu}{\alpha + \nu})$. Mit der Hausdorff-Young Ungleichung ergibt sich $T_l(\cdot) \in L_t(\mathbb{R}^{\nu})$ mit $t \in (\frac{2\nu}{\nu - \alpha}, \infty]$. Wegen $\mathcal{P}(\alpha^i, \alpha^i - \gamma) \in \mathcal{P}(\alpha, \alpha - \gamma)$ für $\alpha^i \geq \alpha$ gilt aber immer

$$T_{\mathbf{I}}(\cdot) \in L_{\mathbf{t}}(\mathbb{R}^{\nu}) \text{ für } \mathbf{t} \in [2, \infty) ,$$
 (4.16)

unabhängig von $\alpha > 0$.

Für \hat{T}_2 erhält man :

$$\int |\widehat{T}_{2}(\mathbf{p})|^{s} d\mathbf{p} \leq \left[\int (1+p)^{\gamma} |\widehat{T}_{2}(\mathbf{p})|^{2} d\mathbf{p} \right]^{\frac{s}{2}} \left[\int (1+p)^{-\frac{\gamma s}{2-s}} d\mathbf{p} \right]^{\frac{2-s}{2}}.$$

Hier folgt $\widehat{T}_2(\cdot) \in L_s(\mathbb{R}^{\nu})$ mit s $\epsilon \begin{cases} (\frac{2\nu}{\gamma+\nu}, 2) & \text{für } \gamma < \nu \\ [1, 2) & \text{sonst} \end{cases}$ und damit

$$T_2(\cdot) \in L_t(\mathbb{R}^{\nu}) \quad \text{mit} \quad t \in \begin{cases} (2, \frac{2\nu}{\nu - \gamma}) & \text{für } \gamma < \nu \\ (2, \infty] & \text{sonst} \end{cases}$$
 (4.17)

Wie man leicht sieht, ist in der Zerlegung auch $T_2(\cdot)$ ϵ $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ zugelassen.

Nach (4.16), (4.17) gilt somit (4.15), falls $T \in \mathcal{P}(\alpha, \alpha - \gamma)$ ist mit $\gamma \ge \nu$ oder sonst $\frac{2\nu}{\nu - \gamma} > \frac{\nu}{a}$, i.e. $\gamma > \nu - 2a$.

Lemma 4.3

Es ist $|H_0|^{-\frac{1}{2}+\delta}G|H_0|^{\frac{1}{2}}$ kompakt für ein $\delta>0$ und die Potentiale sind relativ ϵ_0 -beschränkt, falls die elektrostatischen Potentiale aus $\mathcal{P}(\alpha,\beta)$ mit $\alpha=2$ und $\beta=2-\delta$ für $\nu=1$, $\beta=1-\delta$ für $\nu=2,3$ sind und die skalaren Potentiale aus $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ sind.

Beweis: Auf dem dichten Teilraum $D(|H_0|^{\frac{3}{2}})$ ist der Operator $|H_0|^{-\frac{1}{2}+\delta}G|H_0|^{\frac{1}{2}}$ (für $A_j \equiv 0$) gegeben durch

$$\begin{bmatrix}
\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} \delta V \varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\
-\varepsilon_0^{-\frac{3}{2}} \delta A_j \varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} & \varepsilon_0^{-\frac{3}{2}} \delta V \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}
\end{bmatrix} .$$
(4.18)

Wir schreiben die Fouriertransformierten der Komponenten als

$$E_{p}^{-\frac{1}{2} + \delta} \hat{V}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) E_{q}^{-\frac{1}{2}} = E_{p}^{-1 + \delta} \hat{V}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + A_{\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) ,$$

$$E_{p}^{-\frac{3}{2} + \delta} \hat{V}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) E_{q}^{\frac{1}{2}} = E_{p}^{-1 + \delta} \hat{V}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + B_{\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$
(4.19)

Nach (4.19) ist die Kompaktheit von (4.18) gezeigt, wenn die Operatoren A_{δ} , B_{δ} , definiert als Integraloperatoren mit Integralkernen $A_{\delta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $B_{\delta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, kompakt sind und V relativ $\epsilon_0^{1-\delta}$ -kompakt ist bzw. $\epsilon_0^{-\frac{3}{2}+\delta}A_{\delta}$, $\epsilon_0^{-\frac{1}{2}}$ kompakt ist, jeweils für ein $\delta>0$.

Zuerst zum elektrostatischen Potential. Es ist

$${\rm A}_{\delta}({\bf p},{\bf q}) \; = \; \frac{({\bf p}+{\bf q})}{{\rm E}_{\bf p}^{\; 1-\delta} \; {\rm E}_{\bf q}^{\frac{1}{2}} \; (\, {\rm E}_{\, \bf p}^{\frac{1}{2}} + {\rm E}_{\bf q}^{\frac{1}{2}}) \; ({\rm E}_{\bf p} + {\rm E}_{\bf q})} \; \cdot \; (\, {\bf p} - {\bf q}) \; \, \widehat{\rm V}(\, {\bf p} - {\bf q}) \; \; , \label{eq:AdS}$$

$$B_{\delta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \; = \; \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{q})}{E_{\mathbf{p}^{\frac{3}{2}-\delta}} \left(\, E_{\mathbf{p}^{\frac{1}{2}}} + E_{\mathbf{q}^{\frac{1}{2}}} \right) \, (E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})} \; \cdot \, (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \; \, \widehat{V}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \; \; , \label{eq:beta_delta_elements}$$

so daß wir wegen $p < E_p$ die H.S.-Normen abschätzen können durch

$$\begin{split} \| A_{\delta} \|_{2}^{2} , \| B_{\delta} \|_{2}^{2} &< \int \int E_{p}^{-3+2\delta} E_{q}^{-1} (p-q)^{2} | \widehat{V}(p-q) |^{2} dp dq \\ &= \int p^{2} | \widehat{V}(p) |^{2} \int E_{q}^{-3+2\delta} E_{||p-q||}^{-1} dq dp . \end{split}$$

Das Integral

$$\mathcal{I}_{\delta}(p) := \int E_{q}^{-3+2\delta} E_{1p-q}^{-1} dq$$

$$\leq c(\nu, \delta) \int_{0}^{\infty} \frac{q^{\nu-1}}{(m^{2}+q^{2})^{\frac{3}{2}-\delta} (m^{2}+(p-q)^{2})^{\frac{1}{2}}} dq$$
(4.20)

können wir nun mit denselben Mitteln wie das Integral $\mathcal{I}_{l}(\cdot)$ im Beweis von Lemma 4.1 untersuchen. Für $\delta < (4-\nu)/2$ ist $\mathcal{I}_{\delta}(\cdot)$ stetig auf \mathbb{R}_{+} , die Skalentransformation $\tilde{\mathbf{q}} := \mathbf{q/p}$ sowie die Ungleichung

$$(m^2 + (p - q)^2)^{\frac{1}{2}} \ge m^{2\delta'} (m^2 + (p - q)^2)^{\frac{1}{2} - \delta'}$$
 für alle $\delta' \ge 0$

liefern

$$\lim_{p\to\infty} \ \mathcal{I}_{\delta}(p) \ p^{\frac{4-\nu-2\delta-2\delta^4}{2}} \le c(\nu,\delta) \int\limits_0^{\infty} \frac{\tilde{q}^{\nu-1}}{\tilde{q}^{\frac{3}{2}-\delta} \left|1-\tilde{q}\right|^{1-2\delta^4}} \ d\tilde{q} \ .$$

Dieses Integral konvergiert für $\delta'>0$, $\delta>(3-\nu)/2$, $\delta+\delta'<(4-\nu)/2$. Es folgt die Existenz von

$$\lim_{\mathbf{p}\to\infty} \mathcal{I}_{\delta}(\mathbf{p}) \ \mathbf{p}^{1-\delta^{i}} = \text{const.} \ \forall \ \delta, \ \delta^{i} \ \text{mit} \ 0 < \delta (4-\nu)/2 \ , \ \delta > \delta^{i}, \ \nu = 1,2,3 \ .$$

gilt.

Für $\nu = 1$ gelangt man mit der Substitution (4.4) zu einer schwächeren Bedingung. Es ist hier:

$$\|B_{\delta}\|_{2}^{2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2} |\widehat{V}(t)| \mathcal{I}_{\delta}'(t) dt ,$$

Für $\delta < 3/2$ ist $\mathcal{I}_{\delta}'(t)$ eine auf \mathbb{R}_{\bullet} stetige positive Funktion. Mit der Transformation (4.11) folgt, daß im Limes $t \to \infty$ die Singularität bei $\tilde{s} = -1$ für $\delta > 0$ integrierbar ist und

$$\lim_{t \to \infty} \mathcal{I}_{\delta}'(t) \quad t^{2-\delta} = \text{const.} \quad \forall \quad \delta, \quad 0 < \delta < 3/2, \tag{4.21}$$

gilt. Wenn wir $\|A_{\delta}\|_{2}$ analog behandeln, gelangen wir zu einem Integral mit demselben Verhalten.

Zusammenfassend können wir sagen, daß für ein $\delta > 0$ A_{δ} , B_{δ} H.S.-Operatoren sind, falls

$$V \in \mathcal{P}(2,1-\delta) \text{ für } \nu=2, 3 \text{ bzw. } V \in \mathcal{P}(2,2-\delta) \text{ für } \nu=1$$
 (4.22)

Mit Lemma 4.2 folgt die $\varepsilon_0^{1-\delta}$ -Kompaktheit von V für ein $\delta > 0$, falls V $\varepsilon \mathcal{P}(2,2-\gamma)$ mit $\gamma > \nu - 2 + 2\delta(>0)$ für $\nu = 2,3$ bzw. $\gamma > 0$ für $\nu = 1$. Nun gilt $\mathcal{P}(\alpha,\alpha-\gamma) \in \mathcal{P}(\alpha,\alpha-\gamma^i)$ für $\gamma^i \leq \gamma$. Hiermit impliziert (4.22) die relative $\varepsilon_0^{1-\delta}$ -Kompaktheit und damit auch die relative ε_0 -Beschränktheit von V.

Beim skalaren Potential schränkt die Forderung nach der relativen ε_0 -Beschränktheit die Klasse der Potentiale ein, wenn wir wie oben die relativen ε_0 -Kompaktheit aus $A_{\mathfrak{g}}(\cdot)$ ϵ $L_{\mathfrak{t}}(\mathbb{R}^{\nu})$ mit t wie in (4.15) folgern. \square

Satz 4.4

Gilt V ϵ $\mathcal{P}(2,1-\delta)$ für $\nu=2,3$, V ϵ $\mathcal{P}(2,2-\delta)$ für $\nu=1$ mit einem $\delta>0$ bzw. A_s ϵ L₂(\mathbb{R}^{ν}) , $\nu=1,2,3$, so ist J-K ϵ $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$.

Beweis: Nach Satz 3.5 liegen mit dem Schnitt der Bedingungen an die Potentiale aus den Lemmata 4.1 und 4.3 hinreichende Bedingungen für die H.S. Eigenschaft von J-K vor.

u

Die oben unter anderem gewonnene hinreichende Bedingung für die Regularität eines elektrostatischen Potentials in drei Dimensionen ist gleich dieser Bedingung im Fall des Dirac - Operators [NSch]. Wie schon in [KSch1] vermerkt, ist ein einfaches Beispiel für ein reguläres elektrostatisches Potential das Kastenpotential. Man kann sich leicht überzeugen, daß dieses Potential in einer Dimension regulär ist, während dies in drei Dimensionen erst auf ein Kastenpotential mit "abgerundeten Ecken" (etwa $V(x) = V_0 \left[\pi/2 - \arctan \alpha(x-r_0) \right]$, mit V_0 , ro konstant, im Limes $\alpha \to 0$) zutrifft.

4.2 Die Irregularität des Coulombpotentials

Wie die in Lemma 4.1 entwickelte Bedingung zeigt, kann mit Hilfe der notwendigen und hinreichenden Regularitätsbedingungen aus Kapitel 3 nichts über die Regularität des Coulombpotentials in drei Dimensionen $V(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{x}$ (also $\hat{V}(\mathbf{p}) \sim \frac{1}{p^2}$) ausgesagt werden. In diesem Abschnitt soll in Anlehnung an den Beweis dieses Resultates für den Dirac – Fall in [KI] die Nicht – Regularität des Coulombpotentials gezeigt werden. Übernommen wurde die Beweisidee, mit Hilfe einer Verschiebung in \mathcal{H} zu zeigen, daß der Operator J-K nicht kompakt ist. Die Durchführung dieses Beweises im K.G. – Fall unterscheidet sich jedoch weitgehend von der zitierten Arbeit.

Satz 4.5

Erfülle das elektrostatische Potential V (≠ 0) die Voraussetzungen von Satz 2.1, sei also insbesondere

$$\| V \epsilon_0^{-1} \| \le b < 1$$
 (4.23)

Gilt nun

$$V(a\mathbf{x}) = \frac{1}{a}V(\mathbf{x}) , \forall a > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\nu} \setminus \{0\} , \qquad (4.24)$$

dann ist das Potential nicht regulär, der Operator J-K, mit K wie in (2.12), ist nicht kompakt.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma, das wir in einer allgemeineren Form als hier benötigt beweisen wollen.

Lemma 4.6

Sei J' ein beidseitig stetiger selbstadjungierter Operator im Hilbertraum \mathcal{H} . Seien $J^{l}T_{n}$, $n \in \mathbb{N}$, selbstadjungiert und positiv definit. Weiter möge es $\lambda_{1}, \lambda_{2} \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im } \lambda_{1} > 0$, $\text{Im } \lambda_{2} < 0$ geben, so daß

$$\begin{array}{lll} s-\lim_{n\to\infty} & (T_n-\lambda_1)^{-1}=:A_{\lambda_1} & , & s-\lim_{n\to\infty} & (T_n-\lambda_2)^{-1}=:A_{\lambda_2} \end{array}$$

existieren als Elemente aus $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ und $\mathrm{R}(\mathrm{A}_{\lambda_1})$ oder $\mathrm{R}(\mathrm{A}_{\lambda_2})$ dicht ist.

Dann existiert ein abgeschlossener J^I -selbstadjungierter Operator T mit $\sigma(T) \in \mathbb{R}$, so daß $T_n \to T$ im Sinne der starken Konvergenz der Resolventen gilt.

Ist weiterhin $N(T) = \{0\}$ und existieren (für $n \in \mathbb{N}$)

$$K_n := \underset{\kappa \to \infty}{w - 1} \lim_{\pi \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\kappa}^{\kappa} (T_n - i\eta)^{-1} d\eta \quad , \quad K^{\scriptscriptstyle \text{I}} := \underset{\kappa \to \infty}{w - 1} \lim_{\pi \to \infty} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\kappa}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\kappa} \right] (T - i\eta)^{-1} d\eta$$

als Operatoren aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$,

dann gilt:
$$s-\lim_{n\to\infty} K_n = K'$$
.

Beweis: Der Beweis folgt weitgehend den Beweisen für entsprechende Sätze für selbstadjungierte Operatoren [RSI Th.VIII 22; K Th.VIII 1.15]. Nach Lemma 2.2 sind die T_n abgeschlossen und haben ein rein reelles Spektrum, es ist $0 \in \rho(T_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es gilt nun $\| (T_n - \lambda_j)^{-1} \| \le \| \operatorname{Im} \lambda_j \|^{-1}$, $\| A_{\lambda_j} \| \le \| \operatorname{Im} \lambda_j \|^{-1}$, j = 1,2. Wir können wie im Beweis in [RSI Th.VIII 22] vorgehen und eine in $\mathbb{C} \mathbb{R}$ operatorwertige analytische Funktion A_{λ} definieren, so daß

$$A_{\lambda} = s - \lim_{n \to \infty} (T_n - \lambda)^{-1}$$

für alle nichtreellen λ gilt. Hiermit folgt

$$A_{\lambda}^* = J^{\mathsf{I}} A_{\lambda} J^{\mathsf{I-I}}.$$

Die A_{λ} genügen einer Resolventengleichung, so daß $R(A_{\lambda})=:D$ unabhängig von λ ist. Nach Voraussetzung ist D dicht und somit

$$N(A_{\lambda}) = R(A_{\lambda}^*)^{\perp} = R(J^{\dagger}A_{\lambda}^{\dagger}J^{\dagger-1})^{\perp} = \{0\}.$$

Wir können nun (unabhängig vom nichtreellen λ) den Operator T definieren :

$$D(T) := D$$
 , $T := A_{\lambda}^{-1} + \lambda$.

Hiermit ist A_{λ} die Resolvente von T, T somit dicht definiert und abgeschlossen; es ist $\sigma(T) \in \mathbb{R}$. Weiter folgt die Symmetrie von J'T und

$$R(J^{\mathsf{I}}T \pm J \mathsf{i}) = D(A_{\mp \mathsf{i}} J^{\mathsf{I}-\mathsf{I}}) = D(A_{\mp \mathsf{i}}) = \mathcal{H}.$$

Dies genügt, um die Selbstadjungiertheit von JT zu zeigen: Sei $f \in D((J^{\dagger}T)^*)$, so existiert nach dem oben Gezeigten ein $g \in D(J^{\dagger}T)$, so daß $((J^{\dagger}T)^* - J^{\dagger}i) f = (J^{\dagger}T - J^{\dagger}i) g$. Damit gilt $((J^{\dagger}T)^* - J^{\dagger}i)(f - g) = 0$ und wegen $N((J^{\dagger}T)^* - J^{\dagger}i) = R(J^{\dagger}T + J^{\dagger}i)^{\perp} = \{0\}$ folgt, $D(J^{\dagger}T) = D((J^{\dagger}T)^*)$ und somit $J^{\dagger}T = (J^{\dagger}T)^*$.

Nun zum zweiten Teil der Behauptung. Es ist

$$K_n T_n (T_n^2 + I)^{-1} = 2/\pi \int_0^\infty \frac{T_n}{T_n^2 + \eta^2} \frac{T_n}{T_n^2 + I} d\eta$$
 (4.25)

Hier konvergiert das Integral wegen

$$\left\| \frac{T_{n}}{T_{n}^{2} + \eta^{2}} \frac{T_{n}}{T_{n}^{2} + I} \right\| \le \min \{1, \eta^{-2}\}$$
(4.26)

absolut. Dasselbe gilt für den Ausdruck (4.25), in welchem T_n durch T ersetzt ist. Wegen

$$(T_n - i\eta)^{-1} \stackrel{\underline{s}}{-} (T - i\eta)^{-1} \ , \ \forall \ \eta \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \ , \ \text{für} \ n \to \infty$$

konvergiert der Integrand in (4.25) gegen $\frac{T}{T^2+\eta^2}\frac{T}{T^2+I}$. Wegen (4.26) folgt nach dem Prinzip der dominanten Konvergenz

$$K_n T_n (T_n^2 + I)^{-1} \xrightarrow{-s} K'T (T^2 + I)^{-1}$$
 (4.27)

Andererseits gilt wegen $T_n (T_n^2 + I)^{-1} \xrightarrow{-s} T (T^2 + I)^{-1}$ auch

$$\mathrm{K_n}\left(\mathrm{T_n}\left(\mathrm{T_n^2}+\mathrm{I}\right)^{-1}-\mathrm{T}\left(\mathrm{T^2}+\mathrm{I}\right)^{-1}\right) \stackrel{-5}{\longrightarrow} 0$$

und so zusammen mit (4.27)

$$(K_n - K^{\dagger}) T (T^2 + I)^{-1} \xrightarrow{-5} 0$$
.

Nun ist
$$R(T(T^2 + I)^{-1})^{\perp} = N(T^*(T^{2^*} + I)^{-1})$$

= $N(J^{\dagger}T(T^2 + I)^{-1}J^{\dagger -1})$
= $\{0\}$.

Die K_n konvergieren also stark auf einer dichten Menge gegen K', da sie auch gleichmäßig beschränkt sind, folgt $K_n \xrightarrow{s} K'$.

Beweis von Satz 4.3: Wir betrachten die in # unitäre Verschiebung

$$f \mapsto U_a f \quad \text{mit} \quad (U_a f)(\mathbf{x}) = a^{\frac{\nu}{2}} f(a\mathbf{x})$$
 (4.28)

für a > 0. Auf \mathcal{H} gilt dann

$$U_a \xrightarrow{-w} 0$$
 für $a \xrightarrow{} 0$.

Wäre nun J-K kompakt, so würde

$$U_a (J - K) U_a^* \xrightarrow{s} 0 \quad \text{für} \quad a \longrightarrow 0$$
 (4.29)

folgen. Wir zeigen, daß dies zum Widerspruch führt.

Unter Ua transformieren εο und V gemäß

$$U_a \, \varepsilon_0 \, U_a^* = \frac{1}{a} \, \varepsilon_a$$

$$U_a V U_a^* = \frac{1}{a} V$$

auf $D(\varepsilon_0)$. Hier bezeichne ε_a den Abschluß des Operators $(-\Delta + a^2 m^2)^{-\frac{1}{2}}$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu})$. Mit $D(H_{0,a}) := D(H_0)$

$$H_{0, a} := \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_a \\ \epsilon_a & 0 \end{bmatrix} , G_a := \begin{bmatrix} V & \epsilon_a^{-1} & 0 \\ 0 & (V & \epsilon_a^{-1})^* \end{bmatrix} ,$$

gilt dann auf D(H)

$$U_a H U_a^* = \frac{1}{a} |H_{0,a}|^{\frac{1}{2}} (J + G_a) |H_{0,a}|^{\frac{1}{2}}$$

=: $\frac{1}{a} H_a$.

Nach Voraussetzung ist

$$\| V \varepsilon_{a^{-1}} \| = \| U_a V \varepsilon^{-1} U_a^* \| = \| V \varepsilon^{-1} \| \le b < 1 \quad \forall a > 0,$$
 (4.30)

so daß alle Aussagen des Satzes 2.1 auf die Operatoren H_a , a>0 zutreffen. Bezeichne $p:=(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, so ist wegen $D(\epsilon_a)=D(p)$ auch $D(H_a)=D(H)$ unabhängig von a>0. Nun gilt

$$\begin{split} \| \left(V \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{-1} \; - \; V \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{1-1} \right) \; f \; \| \; &= \; \| \; V \; \left(\boldsymbol{\epsilon_{a}}^{12} \; - \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{2} \right) \left(\boldsymbol{\epsilon_{a}} \; + \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{1} \right)^{-1} \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{-1} \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{1-1} \; f \; \| \\ &= \; \left| a^{12} \; m^{2} \; - \; a^{2} \; m^{2} \right| \; \| \; V \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{-1} \; \left(\boldsymbol{\epsilon_{a}} \; + \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{1} \right)^{-1} \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{1-1} \; f \; \| \\ &\leq \; m^{2} \; \left| a^{12} \; - \; a^{2} \right| \; \| \; V \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{-1} \; \| \; \| \; \left(\boldsymbol{\epsilon_{a}} \; + \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{1} \right)^{-1} \; \| \; \| \; \boldsymbol{\epsilon_{a}}^{1-1} \; f \; \| \\ &< \; m \; \left| a^{1} \; - \; a \right| \; c \end{split}$$

für alle $f \in \mathcal{H}$, a,a'>0, da $\|\epsilon_a^{i-1}f\| \le c$ mit c=c(f)>0 unabhängig von a'>0. Somit ist $V \epsilon_a^{-1}f$ für alle $f \in \mathcal{H}$ eine Cauchyfolge für $a \to 0$. Zusammen mit (4.30) folgt die Existenz von

$$s - \lim_{a \to 0} V \varepsilon_{a^{-1}} =: S$$

als Element aus $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Analog folgt die Existenz von s-lim $\varepsilon_a^{-1} V$ auf der dichten Teilmenge $D(\varepsilon_0)$ und so auch die Existenz des starken Limes des Abschlusses $\overline{\varepsilon_a^{-1} V} = (V \ \varepsilon_a^{-1})^* . \ Da \qquad V \ \varepsilon_a^{-1} - \stackrel{w}{\longrightarrow} S \quad \text{gilt, was genau dann der Fall ist, wenn}$ $(V \ \varepsilon_a^{-1})^* - \stackrel{w}{\longrightarrow} S^* \quad \text{für } a \longrightarrow 0$, ergibt sich hiermit

$$s - \lim_{a \to 0} (V \epsilon_{a}^{-1})^{*} = S^{*}$$
.

Es existiert also

$$s - \lim_{a \to 0} G_a = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S^* \end{bmatrix} =: G_0 \tag{4.31}$$

mit $||G_0|| \le b < 1$.

Analog zu (2.13) gilt hier für a > 0:

$$\begin{split} (H_{a} - i\eta)^{-1} &= |H_{0, a}|^{-\frac{1}{2}} \left[I + \frac{|H_{0, a}|}{H_{0, a} - i\eta} G_{a} \right]^{-1} \frac{|H_{0, a}|^{\frac{1}{2}}}{H_{0, a} - i\eta} \\ &= (H_{0, a} - i\eta)^{-1} - \frac{|H_{0, a}|^{\frac{1}{2}}}{H_{0, a} - i\eta} G_{a} \left[I + \frac{|H_{0, a}|}{H_{0, a} - i\eta} G_{a} \right]^{-1} \frac{|H_{0, a}|^{\frac{1}{2}}}{H_{0, a} - i\eta} . \end{split}$$

Bezeichnet nun A_{λ} den starken Limes von $(H_a - i\eta)^{-1}$ für $a \to 0$, so wissen wir nun, daß $A_{i\eta}$ für $\eta \neq 0$ existiert und gleich

$$A_{i\eta} = (J|p| - i\eta)^{-1} - \frac{|p|^{\frac{1}{2}}}{J|p| - i\eta} G_0 \left[I + \frac{|p|}{J|p| - i\eta} G_0\right]^{-1} \frac{|p|^{\frac{1}{2}}}{J|p| - i\eta}$$
(4.32)

ist (wobei $|p| \text{ kurz } I|p| = \begin{bmatrix} |p| & 0 \\ 0 & |p| \end{bmatrix}$ bezeichne). Wegen

$$\left\| \frac{\left\| \mathbf{p} \right\|^{\frac{1}{2}}}{J\left\| \mathbf{p} \right\| - i\eta} \right\| = \sup_{\mu \in \mathbb{R}} \frac{\left\| \mu \right\|}{\left\| \mu - i\eta \right\|} = 1 \quad \text{für } \eta \neq 0$$

ist $A_{i\eta}$ für $\eta \neq 0$ wohldefiniert, wir bezeichnen $N(A_{i\eta}) =: N$, $R(A_{i\eta}) =: D$ (unabhängig von $\eta \neq 0$). Aus (4.46) ergibt sich $D \in D(I \mid p \mid^{\frac{1}{2}})$, auf \mathcal{H} gilt

$$|p|^{\frac{1}{2}} A_{i\eta} = \left[I + \frac{|p|}{J|p| - i\eta} G_0 \right]^{-1} \frac{|p|^{\frac{1}{2}}}{J|p| - i\eta} \quad \forall \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} . \tag{4.33}$$

Wegen $N(I |p|^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$ folgt $N = \{0\}$, also ist D dicht in \mathcal{H} . Nach Lemma 4.6 ist dann durch

$$\tilde{H} = A_{\lambda}^{-1} + \lambda$$
, $D(\tilde{H}) = D$, $\lambda \in \mathbb{C}$, Im $\lambda \neq 0$

ein J-selbstadjungierter abgeschlossener Operator gegeben, für den wir noch $N(\tilde{H}) = \{0\}$ zu zeigen haben. Sei hierzu $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f $\in N(\tilde{H})$, dann ist

$$\begin{split} 0 &= (A_{i\eta}^{-1} + i\eta) \ f \quad \text{oder} : \\ &|p|^{\frac{1}{2}} f = -i\eta \ |p|^{\frac{1}{2}} A_{i\eta} f \\ &= -i\eta \left[I + \frac{|p|}{J|p| - i\eta} G_0 \right]^{-1} \frac{|p|^{\frac{1}{2}}}{J|p| - i\eta} f \end{split}$$

oder mit $g = |p|^{\frac{1}{2}} f$:

$$\left[\left[I + \frac{\left| \mathbf{p} \right|}{J \left| \mathbf{p} \right| - \mathrm{i} \eta} G_0 \right] \mathbf{g} = -\mathrm{i} \eta \left(J \left| \mathbf{p} \right| - \mathrm{i} \eta \right)^{-1} \mathbf{g} \ .$$

Dann gilt für alle h $\epsilon \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu})$

$$0 = ((J|p| + i\eta) h, [I + i\eta (J|p| - i\eta)^{-1} + \frac{|p|}{J|p| - i\eta} G_0] g)$$

$$= ((J|p| + i\eta) h, g) + i\eta (h, g) + (|p| h, G_0 g)$$

$$= (|p| h, (J + G_0) g).$$

Da $|p| \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu})$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ ist, folgt hiermit $(J + G_0) g = 0$, also $0 = g = |p|^{\frac{1}{2}} f$ und somit f = 0, also $N(\tilde{H}) = \{0\}$.

Schließlich folgt mit $(\tilde{H} - i\eta)^{-1} = A_{i\eta}$, (4.32), einer Abschätzung wie in (2.14) und der Selbstadjungiertheit von J[p] die Existenz von

$$\tilde{\mathrm{K}} := \underset{\overset{\delta}{\kappa} \overset{\circ}{\to} \overset{\circ}{\infty}}{\mathrm{lim}} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\kappa}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\kappa} \right] \left(\tilde{\mathrm{H}} - \mathrm{i} \eta \right)^{-1} \mathrm{d} \eta$$

als Element aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Zurück zur Gleichung (4.29). Es gilt

$$U_a J U_a^* = J$$

und

$$U_a K U_a^* = \underset{\kappa \to \infty}{\text{w-lim}} \frac{1}{\pi} \int_{-\kappa}^{\kappa} a (H_a - ia\eta)^{-1} d\eta$$
$$= \underset{\kappa \to \infty}{\text{w-lim}} \frac{1}{\pi} \int_{-\kappa}^{\kappa} (H_a - i\eta)^{-1} d\eta .$$

Wie wir nun mit den obigen Vorbereitungen und Lemma 4.6 wissen, gilt mit der Definition $K_a := U_a K U_a^*$:

$$s - \lim_{a \to \infty} K_a = \tilde{K} . \tag{4.34}$$

Man beachte außerdem, daß wegen $K_a{}^2 = I \quad \forall \ a > 0$, auch $\tilde{K}^2 = I$ ist.

Gilt nun (4.29), so ist $J = \tilde{K}$, oder, mit $\tilde{P}_{\epsilon} := 1/2 (I + \epsilon \tilde{K})$, $\tilde{P}_{\epsilon} = P_{\epsilon}^{0}$ und so auf \mathcal{H} :

$$0 = (\tilde{H} - \lambda)^{-1} \tilde{P}_{\varepsilon} \tilde{P}_{-\varepsilon} = \tilde{P}_{\varepsilon} (\tilde{H} - \lambda)^{-1} \tilde{P}_{-\varepsilon} = P_{\varepsilon}^{0} (\tilde{H} - \lambda)^{-1} P_{-\varepsilon}^{0} = P_{\varepsilon}^{0} A_{\lambda} P_{-\varepsilon}^{0} , \qquad (4.35)$$

 $\varepsilon = +, -$, Im $\lambda \neq 0$. Aus der Gleichung (4.33) folgt auf $\mathscr H$

$$\left[I + \frac{|p|}{J|p| - i\eta} G_0 \right] |p|^{\frac{1}{2}} A_{i\eta} = \frac{|p|^{\frac{1}{2}}}{J|p| - i\eta},$$

womit sich dann hier aus (4.35)

$$\frac{|\mathbf{p}|}{J|\mathbf{p}|-i\eta} P_{+}^{0} G_{0} P_{-}^{0} |\mathbf{p}|^{\frac{1}{2}} A_{i\eta} = 0$$

auf \mathcal{H} für $\eta \neq 0$ ergibt. Es ist wegen (4.33)

$$R(|p|^{\frac{1}{2}}A_{i\eta})^{\perp} = N((|p|^{\frac{1}{2}}A_{i\eta})^{*}) = N(\frac{|p|^{\frac{1}{2}}}{J|p|+i\eta}(I+JG_{0}J\frac{|p|}{J|p|+i\eta})^{-1})$$

$$= \{0\},$$

und somit $P^0_+ G_0 P^0_- = 0$ und ebenso $P^0_- G_0 P^0_+ = 0$ auf einer dichten Teilmenge von \mathcal{H} und so überall. Zusammen mit (4.31) impliziert dies $S = S^*$ oder

$$s - \lim_{a \to \infty} \left(V \ \epsilon_a^{-1} - \left(V \ \epsilon_a^{-1} \right)^* \right) = 0 \ .$$

Betrachten wir die Fouriertransformierte des Operators $T_a = V \epsilon_a^{-1} - (V \epsilon_a^{-1})^*$:

$$(\widehat{T}_{a} f)(p) = (2\pi)^{-\nu} \int ((p^{2} + a^{2} m^{2})^{-\frac{1}{2}} - (q^{2} + a^{2} m^{2})^{-\frac{1}{2}}) \widehat{V}(p-q) f(q) dq$$

$$= (2\pi)^{-\nu} \int \frac{p+q}{(p^{2} + a^{2} m^{2})^{\frac{1}{2}} (q^{2} + a^{2} m^{2})^{\frac{1}{2}} ((p^{2} + a^{2} m^{2})^{\frac{1}{2}} + (q^{2} + a^{2} m^{2})^{\frac{1}{2}})} \cdot (p-q) \widehat{V}(p-q) f(q) dq$$

$$\cdot (p-q) \widehat{V}(p-q) f(q) dq$$

für f $\in L_2(\mathbb{R}^{\nu})$. Aus der Form des ersten Faktors im Integranden folgt mit

s – lim $T_a=0$: $\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})=0$ für alle $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^{\nu}$ oder $\mathbf{V}\equiv0$ a.e. Damit ist schließlich gezeigt, daß (4.29) für $\mathbf{V}\not\equiv0$ nicht gilt und somit J-K nicht kompakt ist. \square

Wir können nun die Irregularität des Coulombpotentials sofort aus Satz 4.4 ablesen. Da wir für die Definition des Hamiltonians die relative ε_0 -Beschränktheit der Potentiale voraussetzten, müssen wir den ein - und zweidimensionalen Fall ausschließen, da hier diese Bedingung vom Coulombpotential nicht erfüllt wird.

Korollar 4.7

Das elektrostatische Potential in $\nu \ge 3$ Dimensionen

$$V(x) = \frac{e}{x}$$

mit Kopplungskonstante e ϵ R , $|\mathbf{e}| < \frac{\nu-2}{2}$, ist nicht regulär.

Beweis: Für alle $f \in C_o^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ gilt:

$$\int x^{-2} |f(x)|^2 dx \le \frac{4}{(\nu - 2)^2} \int \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_j f(x)|^2 dx$$

5. DER FALL DES "UNTERLEGTEN" MAGNETFELDES

5.1 Der Klein-Gordon-Operator mit Magnetfeldern

Wir betrachten nun den Fall, in welchem Störungen relativ zu einem stets eingeschalteten Magnetfeld erfolgen. Der "ungestörte" Hamiltonian H_0 enhält also bereits Vektorpotentiale. Wir beginnen mit den Operatoren in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$

$$-i\nabla_{j} - \tilde{A}_{j}$$
, $j = 1,..., \nu$, auf $C_{o}^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$, (5.1)

wo \tilde{A}_j Multiplikationsoperatoren mit reellwertigen Funktionen aus $L_{2loc}(\mathbb{R}^{\nu})$ (als größtmöglicher Funktionenklasse, unter deren Multiplikation $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$ in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ abgebildet wird) seien. (\tilde{A} soll hier und im folgenden die "internen" Vektorpotentiale in Unterscheidung zu den "externen" A kennzeichnen.) Die Operatoren (5.1) sind symmetrisch, also abschließbar, bezeichne π_j deren Abschlüsse. Nach einem Satz von von Neumann [K Th.V 3.24] ist dann der Operator

$$\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2} := \sum_{i=1}^{\nu} \pi_{i}^{*} \pi_{i} + m^{2}, m > 0$$
 (5.2)

selbstadjungiert. Außerdem ist $\varepsilon_{\tilde{A}}^{-2}$ positiv definit, $\varepsilon_{\tilde{A}}^{-} := (\varepsilon_{\tilde{A}}^{-2})^{\frac{1}{2}}$ erfüllt die Anforderungen an den Operator ε aus Abschnitt 2.1, hierbei kann man die Bedingung $\|i\partial_{j} \varepsilon_{\tilde{A}}^{-1}\| \le 1$ unten aus (5.5) ablesen. Die gemäß (2.1), (2.7) gebildeten Operatoren H_{0} , H, wo $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\tilde{A}}^{-}$, wollen wir zur besseren Unterscheidung von den Operatoren aus Kapitel 4 mit $H_{0}(\tilde{A})$, $H(\tilde{A})$ bezeichnen; ε_{0} , H_{0} , H benennen weiter die dort definierten Größen.

Wir können nun einige Ergebnisse aus der Analyse des Falles, in dem der ungestörte Hamiltonian keine Magnetfelder enthielt, übertragen. Wir benötigen dazu den folgenden Satz, welcher in dieser Form in [AHS] zitiert wird.

Satz 5.1

Seien \tilde{A}_j , $j=1,...,\nu$, $\varepsilon_{\tilde{A}}$ wie oben, ε_0 wie in Kapitel 4 definiert.

Bezeichne für B, D ϵ $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^p))$ B \subseteq D die punktweise Ungleichung : $|B f| \subseteq D |f|$ $\forall f \in L_2(\mathbb{R}^p)$. Dann gilt für alle $f \in \mathbb{R}$:

$$\exp\left(\varepsilon_{\bullet}^{-2} t\right) \leq \exp\left(\varepsilon_{0}^{2} t\right) . \tag{5.3}$$

Mit diesem Satz folgt nun:

Satz 5.2

Seien V, A_j , $j=1,...,\nu$, A_J relativ ϵ_0 -beschränkte Multiplikationsoperatoren in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ mit reellwertigen meßbaren Funktionen. Gilt nun

$$\| V \varepsilon_{0}^{-1} \|^{2} + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \| A_{j} \varepsilon_{0}^{-1} \| + \| \varepsilon_{0}^{-1} \| \| A_{j} \varepsilon_{0}^{-1} \| \le b < 1 , \qquad (5.4)$$

so ist JH($\tilde{\mathbf{A}}$) selbstadjungiert und positiv definit. H($\tilde{\mathbf{A}}$) ist vom skalaren Typ mit reellem Spektrum; es ist $0 \in \rho(\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{A}}))$.

Beweis: Nach Satz 2.1 genügt es zu zeigen, daß die Potentiale relativ $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{\mathbf{z}}$ -beschränkt sind und daß (2.6) (bzw. hierfür hinreichend (2.24)) mit $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\mathbf{A}}^{\mathbf{z}}$ gilt.

 $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2}$ ist selbstadjungiert und positiv definit, so daß mit dem Funktionalkalkül folgt :

$$\epsilon_{{\bm A}}^{-1} = (\epsilon_{{\bm A}}^{-2})^{-\frac{1}{2}} = \pi^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp(-\epsilon_{{\bm A}}^{-2} t) dt .$$

Mit Satz 5.1 erhält man demnach :

$$\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-1} \, \zeta \, \varepsilon_{\mathbf{0}}^{-1} \quad . \tag{5.5}$$

Mit einem Multiplikationsoperator T mit einer Funktion $T(\cdot)$ ergibt sich dann für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^{\nu})$:

$$\parallel T \; \epsilon_{\textbf{A}}^{\text{--}1} \; f \; \parallel \; \underline{\boldsymbol{\varsigma}} \; \parallel \; T \; \epsilon_{\textbf{0}}^{\text{--}1} \; \lVert \boldsymbol{f} \rVert \; \parallel \; \underline{\boldsymbol{\varsigma}} \; \parallel \; T \; \epsilon_{\textbf{0}}^{\text{--}1} \; \lVert \; \lVert \boldsymbol{f} \rVert$$

und so

$$\| T \varepsilon_{A}^{-1} \| \le \| T \varepsilon_{0}^{-1} \| .$$
 (5.6)

Ist T relativ ε_0 -beschränkt, so folgt $D(T) \supset D(\varepsilon_A^*)$. Somit sind die Potentiale nach Voraussetzung auch relativ ε_A^* -beschränkt, G(2.4) mit $\varepsilon \equiv \varepsilon_A^*$ ist wohldefiniert und (2.6) (mit $\varepsilon \equiv \varepsilon_A^*$) erfüllt. \square

Für ein weiteres Ergebnis in der Spektraltheorie von $H(\tilde{A})$ gebrauchen wir folgenden Satz, welcher in der untenstehenden Form ebenfalls in AHS zitiert wird.

Satz 5.3

Sei B ϵ $\mathscr{B}(L_2(\mathbb{R}^{\nu}))$, D ϵ $\mathscr{B}_k(L_2(\mathbb{R}^{\nu}))$ mit $k=2n,\infty$, n ϵ \mathbb{N} und gelte B ξ D. Dann ist auch B ϵ $\mathscr{B}_k(L_2(\mathbb{R}^{\nu}))$.

Satz 5.4

Seien V, A_j , $j=1,...,\nu$, A_j relativ ϵ_0 -kompakte Multiplikationsoperatoren in $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ mit reellwertigen meßbaren Funktionen.

Dann treffen auf H(A) alle Aussagen zu, die die Sätze 2.13, 2.14 für H liefern.

Beweis: Nach Satz 2.13 und Satz 5.2 genügt es, die relative $\varepsilon_{\tilde{A}}^{\sim}$ -Kompaktheit der Potentiale zu zeigen. Zum einen sind diese relativ ε_{0} -beschränkt, so daß nach (5.6) $D(\varepsilon_{\tilde{A}}^{\sim})$ in deren Definitionsgebieten liegt. Weiter gilt mit (5.5) für einen Multiplikationsoperator T:

Nach Satz 5.3 impliziert diese Ungleichung zusammen mit der Voraussetzung, daß die Potentiale relativ ϵ_{A}^{*} -kompakt ist. \square

5.2 Das homogene Magnetfeld; Spektraltheorie

Nun zum Fall des "unterlegten" homogenen Magnetfeldes in drei Dimensionen. Es ist üblich, die Eichung

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{B} \times \mathbf{x} \right) \tag{5.7}$$

zu wählen, wobei $B={}^t(0,0,B)$ mit konstantem B>0, $\mathbf{x}={}^t(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$. Auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ hat $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2}$ (5.2) die Form

$$-\Delta + m^2 + \frac{B^2}{4}(x^2 + y^2) - B L_z , \qquad (5.8)$$

wobei L_z die z-Komponente des Drehimpulsoperators ($L = x \times (-i\nabla)$) sei. Die Form von (5.8) weist darauf hin, daß es sich hier um den "Schrödinger-Hamiltonian" eines "verschobenen" harmonischen Oszillators handelt. Die genaue Analyse liefert eine Boguliubov-Transformation der kanonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in zwei Dimensionen. Diese sind auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch:

$$\alpha_{\mathsf{x}} := \, \mathsf{B}^{\,-\frac{1}{2}} \, \big(\, \partial_{\mathsf{x}} \, + \, \frac{\mathsf{B}}{2} \, \mathsf{x} \big) \ , \ \alpha_{\mathsf{y}} := \, \mathsf{B}^{\,-\frac{1}{2}} \, \big(\, \partial_{\mathsf{y}} \, + \, \frac{\mathsf{B}}{2} \, \mathsf{y} \big) \ ;$$

seien α_x^+ , α_y^+ die formal Adjungierten. Wir definieren weiterhin auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$:

$$\alpha := 2^{-\frac{1}{2}} (\alpha_{\mathbf{x}} + i\alpha_{\mathbf{y}}) , \beta := 2^{-\frac{1}{2}} (\alpha_{\mathbf{x}} - i\alpha_{\mathbf{y}}) ,$$
 (5.9)

 α^* , β^* bezeichnen wieder die formal Adjungierten. Auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ gelten die Kommutatorrelationen

$$[\alpha, \beta^{(+)}] = 0, [\alpha, \alpha^{+}] = [\beta, \beta^{+}] = I, \qquad (5.10)$$

es handelt sich also um ein System aus zwei ungekoppelten Oszillatoren. Wir können (5.8) auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ auch schreiben als

$$-\partial_{z}^{2} + m^{2} + B (2 \alpha^{+} \alpha + I)$$
 (5.11)

Weiter ist

$$L_z = -\alpha^* \alpha + \beta^* \beta . \tag{5.12}$$

(Da es sich um die direkte Summe eines Operators mit vollständigem System von Eigenfunktionen und eines (eindimensionalen) Laplaceoperators handelt, ist hier natürlich auch unmittelbar klar, daß der Operator (5.11) wesentlich selbstadjungiert ist.)

Wir fassen die spektralen Eigenschaften des "ungestörten" K.G. Hamiltonians $H_0(\tilde{\mathbf{A}})$ kurz zusammen :

Satz 5.5

Im Fall des homogenen Magnetfeldes (5.7) gilt :

$$\sigma(H_0(\tilde{A})) = \sigma_e(H_0(\tilde{A})) = (-\infty, -(B + m^2)^{\frac{1}{2}}] \cup [(B + m^2)^{\frac{1}{2}}, \infty) .$$

Das Spektrum von $H_0(\tilde{\mathbf{A}})$ ist abzählbar unendlich entartet.

Beweis: Aus (5.11) folgt unmittelbar $\sigma(\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2}) = \sigma_{\mathbf{e}}(\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2}) = [\mathbf{B} + \mathbf{m}^2, \infty)$. Wegen der Kommutatorrelationen (5.10) ergibt sich, daß $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2} \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ mit β, β^* vertauscht. Dies zeigt die sogenannte "Landau-Entartung" für $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2}$. Da $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2}$ selbstadjungiert ist, erhält man sofort auch die Entartung für das Spektrum von $H_0(\tilde{\mathbf{A}})$.

Beim Operator $H(\tilde{A})$ in drei Dimensionen treten nun ähnliche Phänomene auf wie beim eindimensionalen K.G. – Operator ohne interne Magnetfelder (Satz 2.12). Unabhängig von B>0 und von der Stärke der Kopplung einer Menge nichttrivialer elektrostatischer Felder treten Eigenwerte von $H(\tilde{A})$ auf. Bekannt ist dieser Effekt vom Schrödinger – Operator [AHS], im Beweis des folgenden Satzes konnten Konzepte aus diesem Fall übernommen werden.

Satz 5.6

Sei V Multiplikationsoperator in $L_2(\mathbb{R}^3)$ mit einer reellwertigen, nichtnegativen (bzw. - nichtpositiven) Funktion $V(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^3)$ für ein p, $3 , (<math>V(\cdot) \not\equiv 0$). Ferner sei $V(\cdot)$ azimutal symmetrisch und es gelte (mit $V(\mathbf{x}) = V(r,\mathbf{z})$)

$$\sup_{r_2 \mid 0} \int_{-\infty}^{\infty} |V(r,z)| dz < \infty .$$

Dann können wir $H(\tilde{A})$ wie in Satz 2.1 mit elektrostatischem Feld V (mit $A_j \equiv A_j \equiv 0$) für hinreichend kleine Kopplungsstärken definieren.

Für jedes interne Magnetfeld B>0 und jede beliebig kleine Kopplungsstärke von V besitzt $H(\tilde{\mathbf{A}})$ ein unendlich entartetes diskretes Spektrum.

Beweis: Aus $V(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^3)$ für p, $3 , folgt mit [RSIII Th.XI 20] (vgl. auch (4.15)), daß V relativ <math>\varepsilon_0$ -kompakt und so nach dem Beweis von Satz 5.4 auch relativ $\varepsilon_{\tilde{A}}^*$ -kompakt ist. Zum einen ist damit V auch relativ $\varepsilon_{\tilde{A}}^*$ -beschränkt, für kleine Kopplungsstärken gilt (2.24) und so (2.6). Wir können H(\tilde{A}) wie in Satz 2.1 definieren und das Spektrum von H(\tilde{A}) ist gleich dem "Spektrum" σ (s. Def.2.7) der Operatorenfamilie aus Satz 2.6 (wo $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\tilde{A}}^*$). Zum anderen impliziert die relative $\varepsilon_{\tilde{A}}^*$ -Kompaktheit von V wieder, daß das Spektrum von H(\tilde{A}) in der spektralen Lücke von H₀(\tilde{A}), $(-(B+m^2)^{\frac{1}{2}},(B+m^2)^{\frac{1}{2}})$, falls es existiert, diskret ist.

Um die Existenz von Elementen aus $\sigma_{+}(H(\tilde{A}))$ (bzw. $\sigma_{-}(H(\tilde{A}))$) im Intervall $(-(B+m^2)^{\frac{1}{2}},(B+m^2)^{\frac{1}{2}})$ zu zeigen, genügt es nach Korollar 2.11, ein f ϵ D(ϵ_{A})\{0} zu finden, so daß

$$\| \varepsilon_{\mathbf{A}}^{-} \mathbf{f} \|^{2} < M^{2} \| \mathbf{f} \|^{2} + \| \mathbf{V} \mathbf{f} \|^{2} - 2M (\mathbf{f}, \mathbf{V} \mathbf{f})$$
 (5.13)

(bzw. dieselbe Ungleichung mit -V an der Stelle von V) gilt, mit $M:=(B+m^2)^{\frac{1}{2}}$. Wir nutzen nun die achsiale Symmetrie des Problems bezüglich der z-Achse und führen Zylinderkoordinaten r, φ, z ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, z = z) ein. Mit diesen Koordinaten lautet L_z (5.12) $L_z = -i\partial_{\varphi}$, und wir erhalten nach dem oben Gesagten eine or-

thogonale Zerlegung des Hilbertraumes $L_2(\mathbb{R}^3)$:

$$L_2(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{1 = -\infty}^{\infty} \mathscr{H}_1 .$$

Hier ist jedes \mathcal{H}_1 isomorph zum Hilbertraum $L_2(E,r)$, bestehend aus Funktionen auf der Menge $E=\{\,r,z\mid r>0\,,\,z\in\mathbb{R}\,\}$ mit der Norm $||g||=\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}|g(r,z)|^2\,r\,dr\,dz\,\Big]^{\frac{1}{2}}$ (s. auch $[\![J]\!]$). Jedes $f\in L_2(\mathbb{R}^3)$ kann nun gemäß

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{1=-\infty}^{\infty} \exp(il\varphi) \ g_{l}(\mathbf{r},\mathbf{z}) \quad \text{mit } g_{l}(\cdot,\cdot) \in \mathcal{X}_{l} \quad \forall l$$

dargestellt werden. Aus (5.12), (5.11) erhalten wir weiter, daß die \mathcal{H}_1 $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2}$ reduzieren und für $1 \ge 0$:

$$\inf \, \sigma(\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2} | \, \mathcal{H}_{\mathbf{l}}) = m^2 + B$$

Sei nun für ein festes $1 \ge 0$ R_I(r) der auf eins normierte Grundzustand des Operators B $(2 \alpha^* \alpha + I)$! \mathcal{H}_1 . Dann ist

$$g_l(r,z) := R_l(r) h(z)$$

mit stückweise stetig differenzierbarer Funktion h (\cdot) \in L $_2(\mathbb{R})$ aus \mathscr{H}_1 , und es gilt :

$$(g_1, \, \varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2} \, g_1) = M^2 \, ||\mathbf{h}||^2 + ||\partial_{\mathbf{z}} \, \mathbf{h}||^2 (g_1, \, V \, g_1) = (\mathbf{h}, \, V_1 \, \mathbf{h}) ,$$
 (5.14)

$$\mathrm{mit} \quad V_l(z) := \int\limits_0^{\varpi} \, |\operatorname{R}_l(r,z)|^2 \; V(r,z) \; r \; \mathrm{d} r \;\;.$$

Nun folgt aus der Voraussetzung, daß $V_l(\cdot) \in L_l(\mathbb{R})$ ist und $\int_{-\infty}^{\infty} V_l(z) \, dz > 0$ (bzw. - $\int_{-\infty}^{\infty} V_l(z) \, dz < 0$) gilt. Wir können

$$h(z) = h_a(z) = \exp(-a|z|), a > 0$$

wählen und erhalten, wie im Beweis von Satz 2.12 gezeigt, für geeignetes a > 0:

$$\|\partial_z h_a\|^2 < -2M (h_a, V_1 h_a) (= -2M (g_1, V g_1))$$
 (5.15)

(bzw. dieselbe Ungleichung mit $-V_1$ an der Stelle von V_1). (5.14) und (5.15) implizieren nun (5.13) (mit $f \equiv g_1$). Für jedes $1 \ge 0$ ergibt sich so mindestens ein Punkt aus $\sigma(H(\tilde{A}))$ im Intervall (-M,M). Es folgt nach dem eingangs des Beweises Gezeigten, daß $H(\tilde{A})$ ein unendliches diskretes Spektrum in diesem Intervall besitzt. Häufungspunkte sind $\pm M$.

5.3 Das homogene Magnetfeld; reguläre äußere Felder

Die Sätze 5.1 und 5.3 beziehungsweise die daraus gewonnenen Schlüsse in Satz 5.4 lassen nun die Vermutung zu, daß ähnlich der Bedingung für die relative Kompaktheit an die Potentiale auch die Regularitätsbedingungen hier schwächer sein könnten als im Fall ohne unterlegtes Magnetfeld im 4. Kapitel und daß so eventuell externe Magnetfelder oder das elektrostatische Coulombpotential in dem hier betrachteten Fall regulär sind. Das diese Vermutung nicht zutrifft wollen wir u.a. im folgenden zeigen.

Um die Irregularität externer Magnetfelder zu beweisen und Regularitätsbedingungen für externe elektrostatische und skalare Felder zu finden, benötigen wir eine spektrale Zerlegung von $\epsilon_{\tilde{A}}$.

Nach dem oben Gesagten bilden $\alpha^{(+)}$, $\beta^{(+)}$ ein System von Leiteroperatoren für zwei ungekoppelte Oszillatoren. Also wird durch die Gleichungen

$$\alpha^{\dagger} \alpha u = n u , \beta^{\dagger} \beta u = l u$$
 (5.16)

für $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, $n,l \in \mathbb{N}_0$ eine (bis auf einen Phasenfaktor) eindeutige Orthonormalbasis des $L_2(\mathbb{R}^2)$ dargestellt. Durch $\widehat{} : L_2(\mathbb{R}^3) \to \bigoplus_{n,\ l=0}^\infty L_2(\mathbb{R}) =: \mathscr{K}$,

$$\widehat{f}_{\ln}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int \overline{u_{\ln}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{z}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$
(5.17)

ist eine unitäre Abbildung gegeben, wobei $\overline{}$ die natürliche Konjugation im $L_2(\mathbb{R}^2)$ bezeichnet. In \mathscr{H} wirkt nun die Transformierte von $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-2}$ als Multiplikationsoperator :

$$(\varepsilon_{\mathbf{A}}^{2} f)_{ln}(\mathbf{k}) = (B (2n + 1) + \mathbf{k}^{2} + m^{2}) \widehat{\mathbf{f}}_{ln}(\mathbf{k}) . \tag{5.18}$$

Ein Multiplikationsoperator T in $L_2(\mathbb{R}^3)$ mit einer Funktion $T(\cdot)$ wird in \mathscr{K} zu einem Matrixoperator aus Integraloperatoren mit Integralkernen

$$T_{lnrs}(k-k') := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_{ln}}(x,y) \stackrel{\frown}{T}(x,y,k-k') u_{rs}(x,y) dx dy , \qquad (5.19)$$

wobei die partielle Fouriertransformation

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{k}) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}} \, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{z}$$
 (5.20)

in $L_2(\mathbb{R}^3)$ bezeichne. Für einen Operator A in $L_2(\mathbb{R}^3)$ bezeichnen \widehat{A} , \widehat{A} die entsprechend transformierten Größen.

Im folgenden benötigen wir einige Eigenschaften der durch (5.16) gegebenen Funktionen u .

Lemma 5.7

Für die durch (5.16) (bis auf einen Phasenfaktor) eindeutig bestimmten Funktionen $\{u_{ln} \mid l, n \in \mathbb{N}_0\}$ gilt :

$$u_{\ln}(x,y) = e^{-iBxy/2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e_n(B^{-\frac{1}{2}}k - B^{\frac{1}{2}}x) e_l(-B^{-\frac{1}{2}}k) dk$$

$$= e^{iBxy/2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e_n(B^{-\frac{1}{2}}k + B^{\frac{1}{2}}x) e_l(-B^{-\frac{1}{2}}k) dk \qquad (5.21)$$

$$= \overline{u_{nl}}(x,y) ,$$

wobei $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ die auf eins normierten Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators sind.

Beweis: Nach (5.16) gilt:

$$\alpha^{+}\alpha\;\mathrm{u_{ln}}=\;\mathrm{n}\;\mathrm{u_{ln}}\;\;,\;\;\beta^{+}\beta\;\mathrm{u_{ln}}=\;\mathrm{l}\;\mathrm{u_{ln}}$$

und wegen der Form der $\alpha^{(+)}$, $\beta^{(+)}$ (5.9) folgt :

$$\alpha^{\dagger} \alpha u_{\ln} = n u_{\ln}$$

$$= \beta^{\dagger} \beta u_{\ln} ,$$

jeweils für alle 1,n e No. Da diese Funktionen bis auf einen Phasenfaktor eindeutig

durch (5.16) bestimmt sind, ergibt sich:

$$u_{\ln}(x,y) = e^{i\gamma} \overline{u_{n}(x,y)} \quad \text{mit} \quad 0 \le \gamma < 2\pi . \tag{5.22}$$

Es genügt also sich im folgenden auf den auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ gegebenen Operator h

$$h := B (2 \alpha^{+} \alpha + I)$$

zu beschränken (Die Wirkung des Operators $\beta^*\beta$ ist hierdurch gegeben.). Um diesen in einen Operator von der Gestalt eines Schrödingeroperators für den harmonischen Oszillator zu transformieren, benötigen wir die Eichtransformation

$$U := \exp(-iBxy/2)$$
.

Auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ gilt nun:

$$U^{-1} h U = -\partial_x^2 + (-i\partial_y - Bx)^2$$

=: h_1 .

(Dieser Ausdruck wäre an die Stelle von h im Operator (5.11) getreten, wenn wir im Unterschied zur Eichung (5.7) das Magnetfeld durch das Potential $\tilde{\mathbf{A}} = {}^{t}(0,B\mathbf{x},0)$ gebildet hätten.) Mit der partiellen Fouriertransformation (5.20) ergibt sich:

$$\hat{h}_1 = -\partial_x^2 + (k - Bx)^2$$
,

also mit (5.16) und den Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

$$\hat{h}_1 e_n(B^{-\frac{1}{2}}k - B^{\frac{1}{2}}x) = B(2n + 1) e_n(B^{-\frac{1}{2}}k - B^{\frac{1}{2}}x) .$$

Die Entartung des Spektrums von h drückt sich hier dadurch aus, daß \hat{h}_1 mit der Multiplikation mit Funktionen von k vertauscht. Nach Konstruktion sind h und \hat{h}_1 unitär ähnlich, also sind die Eigenfunktionen von h gleich dem Bild der Eigenfunktionen von \hat{h}_1 unter dieser unitären Transformation mit denselben Eigenwerten. So ist

$$u_{\ln}(x,y) = e^{-iBxy/2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e_n(B^{-\frac{1}{2}}k - B^{\frac{1}{2}}x) f_l(k) dk$$

für $f_1(\cdot)$ ϵ $L_2(\mathbb{R})$, für alle n, l ϵ N_0 . Mit (5.22) folgt dann nach kurzer Rechnung $f_1(k) = e_1(-B^{-\frac{1}{2}}k)$.

Den zweiten Ausdruck in (5.21) erhält man, indem man anstelle der obigen unitären Transformation die Eichtransformation exp (iBxy/2) mit anschließender partieller Fouriertransformation bezüglich der x - Variablen betrachtet.

Lemma 5.8

Sei g ϵ L₂(\mathbb{R}^2). Dann gilt mit den durch (5.16) gegebenen Funktionen { $u_{ln} \mid l, n \in \mathbb{N}_0$ }:

$$\int_{1, r=0}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_{1n}}(x, y) g(x, y) u_{rs}(x, y) dx dy \right|^{2} =$$

$$= B \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^{2} |\breve{e}_{n}(B^{\frac{1}{2}}y)|^{2} |\breve{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}x)|^{2} dx dy \qquad (5.23)$$

und

$$\sum_{1=0}^{\infty} |u_{ln}(x,y)|^2 = \frac{B}{2\pi}$$
 (5.24)

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $x,y \in \mathbb{R}$, wobei e_n wie in Lemma 5.7 und $\stackrel{\smile}{}$ die inverse Transformation zu (5.20) bezeichne.

Beweis: Mit (5.21) ergibt sich:

$$\begin{split} \sum_{l,\ r=0}^{\infty} |\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \, e^{-iBxy} \, (2\pi)^{-1} & \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \, e^{-ik^{l}x} \, e_{n}(-B^{-\frac{1}{2}}k) \, e_{l}(B^{-\frac{1}{2}}k - B^{\frac{1}{2}}x) \right] \cdot \\ & \cdot e_{s}(-B^{-\frac{1}{2}}k^{l}) \, e_{r}(B^{-\frac{1}{2}}k^{l} + B^{\frac{1}{2}}y) \, dk \, dk^{l} \, dx \, dy \, |^{2} = \\ & = B^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)|^{2} \cdot \\ & \cdot |(2\pi)^{-1} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \, e^{-ik^{l}x} \, e_{n}(-B^{-\frac{1}{2}}k) \, e_{s}(-B^{-\frac{1}{2}}k^{l}) \, dk \, dk^{l} \, |^{2} \, dx \, dy \right] \\ & = B^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)|^{2} \, B^{2} \, |\check{e}_{n}(-B^{\frac{1}{2}}y)| \, |\check{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}x)|^{2} \, dx \, dy \\ & = B \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)|^{2} \, |\check{e}_{n}(B^{\frac{1}{2}}y)|^{2} \, |\check{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}x)|^{2} \, dx \, dy \, . \end{split}$$

Hierbei wurde der Satz von Fubini sowie die Vollständigkeit der Basis $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ des $L_2(\mathbb{R})$ für die Anwendung der Parsevalschen Gleichung benutzt. (5.24) erhält man ebenfalls mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_{k}(x,y)|^{2} = \sum_{k=0}^{\infty} |e^{-iBxy/2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e_{n}(B^{-\frac{1}{2}}k - B^{\frac{1}{2}}x) e_{k}(-B^{-\frac{1}{2}}k) dk |^{2}$$

$$= \frac{B^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e_{n}(B^{-\frac{1}{2}}k - B^{\frac{1}{2}}x)|^{2} dk$$

$$= \frac{B}{2\pi} . \quad \square$$

Wir wollen nun wieder die Bedingung (3.2) (i.e. (3.6)) betrachten. Wie man mit (5.18), (5.19) sieht, hat sie hier die Gestalt:

$$\mathcal{I} := \sum_{\substack{1, n, r, s=0}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (E_n(k) + E_s(k^i))^{-2} (E_n(k)E_s(k^i))^{-1} |W|^2 dk dk^i < \infty$$
 (5.25)

mit
$$E_n(k) := (B(2n+1) + k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$W := W(l,n,r,s,k,k') := (E_{n}(k) - E_{s}(k')) V_{lnrs}(k-k') +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_{ln}}(x,y) \sum_{j=1}^{2} (-i\partial_{j} \hat{A}_{j}(x,y,k-k') - \hat{A}_{j}(x,y,k-k') i\partial_{j}) u_{rs}(x,y) dx dy +$$

$$+ (k + k') A_{3lnrs}(k-k') + A_{2lnrs}(k-k') + A_{4lnrs}(k-k')$$
(5.26)

(wobei $A = {}^t(A_1, A_2, A_3)$, $\partial_x = \partial_1$ etc. und die Notation (5.19) verwendet wurde).

Lemma 5.9

Gilt (5.25), so muß
$$A_j \equiv 0$$
, $j = 1,2,3$, (a.e.) gelten.

Beweis: Wir gehen analog zum Beweis von Lemma 4.1 vor. Dazu betrachten wir zuerst den Beitrag \mathcal{I}_{A_3} zu \mathcal{I} , bestehend aus dem in (5.26) linearen Anteil von A₃. Wir nehmen die Konvergenz dieses Ausdrucks an und zeigen, daß dies zum Widerspruch

führt. Mit dem Satz von Fubini hat \mathcal{I}_{A3} die Gestalt :

$$\mathcal{I}_{A_{3}} = 2 \sum_{l, n, r, s=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (E_{n}(\frac{k+k'}{2}) + E_{s}(\frac{k-k'}{2}))^{-2} (E_{n}(\frac{k+k'}{2}) E_{s}(\frac{k-k'}{2}))^{-1} k^{2} dk \right] \cdot \left[\hat{A}_{3lnrs}(k') \right]^{2} dk' \quad .$$
(5.27)

Mit $t = max \{s,n\}$ erhält man die Abschätzung

$$(E_{n}(\frac{k+k'}{2}) + E_{s}(\frac{k-k'}{2}))^{-2} (E_{n}(\frac{k+k'}{2})E_{s}(\frac{k-k'}{2}))^{-1} \ge \frac{1}{4} (B(2t+1) + m^{2} + k^{2}/4 + k'^{2}/4)^{-2}.$$
 (5.28)

Die Ausführung der k-Integration und der Summation über l und r mit Hilfe von (5.23) führt uns zu:

$$\mathcal{I}_{A_{3}} \geq 2B\pi \sum_{s, n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (B(2t+1)+m^{2}+k^{12}/4)^{-\frac{1}{2}} |\widehat{A}_{3}(x,y,k^{1})|^{2} \cdot |\widehat{e}_{n}(B^{\frac{1}{2}}y|^{2}|\widehat{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}x|^{2} dx dy dk^{1})$$

$$\geq 2B\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(B(2n+1)+m^{2}+k^{12}/4)^{-\frac{1}{2}} \cdot |\widehat{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}y|^{2}|\widehat{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}x|^{2} dx dy) dk^{1} \right]$$

$$\cdot \min_{s \in \mathbb{N}_{0}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{A}_{3}(x,y,k^{1})|^{2} |\widehat{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}y|^{2}|\widehat{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}x|^{2} dx dy) dk^{1} . \qquad (5.29)$$

(Wie man leicht sieht, gilt für eine fallende Folge positiver Zahlen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ und eine Folge positiver Zahlen $\{b_{1n} \mid l, n \in \mathbb{N}_0\}$: $\sum_{l,n=0}^{\infty} a_{\max}(l,n) b_{1n} \geq \sum_{l=0}^{\infty} a_{l} \min_{n \in \mathbb{N}_0} b_{nn}$.) Würde die rechte Seite der Gleichung konvergieren, so gäbe es wiederum nach dem Satz von Fubini ein $k_0' \in \mathbb{R}$, so daß die Summation über n für $k' = k_0'$ konvergieren müßte. Dies ist offensichtlich nicht der Fall, \mathcal{I}_{A_3} divergiert somit. Die quadratischen Beiträge von A_3 zu W können diesen divergenten Beitrag zu \mathcal{I} nicht kompensieren, es folgt $A_3 \equiv 0$ (a.e.).

Nun zu den Beiträgen von A₁, A₂ zu I. Wir erhalten mit partieller Integration, z.B.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_{\ln}}(x,y) \left(-i \partial_{x} \widehat{A}_{l}(x,y,k) - \widehat{A}_{l}(x,y,k) i \partial_{x} \right) u_{rs}(x,y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{A}_{l}(x,y,k) \left[u_{rs}(x,y) i \partial_{x} \overline{u_{\ln}}(x,y) - \overline{u_{\ln}}(x,y) i \partial_{x} u_{rs}(x,y) \right] dx dy . \quad (5.30)$$

Nach (5.16) und (5.21) gilt :

$$\alpha u_{\ln}(x,y) = n^{\frac{1}{2}} u_{\ln-1}(x,y) , \quad \alpha \overline{u_{\ln}}(x,y) = l^{\frac{1}{2}} \overline{u_{\ln-1}}(x,y) ,$$

etc., also

$$u_{rs} \partial_{x} \overline{u_{ln}} - \overline{u_{ln}} \partial_{x} u_{rs} = u_{rs} \left(\partial_{x} + iB/2 y\right) \overline{u_{ln}} - \overline{u_{ln}} \left(\partial_{x} + iB/2 y\right) u_{rs}$$

$$= \left(\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[u_{rs} \left(\alpha - \alpha^{+}\right) \overline{u_{ln}} - \overline{u_{ln}} \left(\alpha - \alpha^{+}\right) u_{rs} \right]$$

$$= \left(\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[l^{\frac{1}{2}} \overline{u_{l-1n}} u_{rs} - (l+1)^{\frac{1}{2}} \overline{u_{l+1n}} u_{rs} - \frac{l}{2} \overline{u_{l-1n}} u_{rs-1} + (s+1)^{\frac{1}{2}} \overline{u_{ln}} u_{rs+1} \right]$$

$$(5.31)$$

für alle $l,n,r,s \in \mathbb{N}_0$, wobei wir die Funktionen für negative Indices null setzen. Mit (5.30), (5.31), eingesetzt in (5.25), erhalten wir Beiträge zu \mathcal{I} , welche proportional s sind. Mit der obigen Methode können wir einen solchen Beitrag, dessen Konvergenz vorausgesetzt, analog zum oben Gesagten abschätzen:

$$\begin{split} \frac{B}{2} & \sum_{l, n, r, s=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{n}(k) + E_{s}(k^{\prime}))^{-2} (E_{n}(k) E_{s}(k^{\prime}))^{-1} \cdot \\ & \cdot s \mid \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_{ln}}(x, y) u_{rs-l}(x, y) \widehat{A}_{l}(x, y, k-k^{\prime}) dx dy \mid^{2} dk dk^{\prime} \\ & \ge B^{2} \sum_{s=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[s (B(2s+1) + m^{2} + k^{\prime 2}/4)^{-\frac{3}{2}} \cdot \right. \\ & \cdot \min_{s \in \mathbb{N}_{0}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{A}_{l}(x, y, k^{\prime})|^{2} |\widecheck{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}y)|^{2} |\widecheck{e}_{s}(B^{\frac{1}{2}}x)|^{2} dx dy \right] \right] dk^{\prime} . \quad (5.32) \end{split}$$

Für festes k' divergiert wiederum die Summe über s, wie oben für den Beitrag von A_3 ist auch hier $A_1 \equiv 0$ (a.e.) notwendig für die Konvergenz von (5.25).

Analog folgt $A_2 \equiv 0$ (a.e.). \square

Satz 5.10

Vektorpotentiale sind irregulär.

Beweis: Wir wenden Satz 3.5 an. Die Bedingung der Beschränktheit von (3.10) ist, wie man leicht sieht, für Magnetfelder aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ erfüllt. Mit Satz 3.5 und Lemma 5.9 folgt die Behauptung.

Satz 5.11

Erfülle das elektrostatische Potential die Bedingung:

$$\int \frac{\mathbf{k}^2}{1 + |\mathbf{k}_3|^{1-\delta}} |\widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} < \infty$$
 (5.33)

für ein $\delta > 0$ und sei das skalare Potential $A_{\mathfrak{z}}(\cdot)$ aus $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$.

Dann sind diese Felder regulär.

Beweis: Nach Satz 3.5 genügt es zu zeigen, daß die Potentiale relativ $\varepsilon_{\tilde{A}}^*$ -beschränkt sind, der Operator (3.10) kompakt ist und die Bedingung (3.2) erfüllt ist. Zuerst zur letztgenannten Forderung, also hier (5.25).

Nun gilt:

$$\begin{split} (\mathrm{E}_{n}(k) - \mathrm{E}_{s}(k')) &= \frac{\mathrm{E}_{n}(k)^{2} - \mathrm{E}_{s}(k')^{2}}{\mathrm{E}_{n}(k) + \mathrm{E}_{s}(k')} \\ &= (\mathrm{E}_{n}(k) + \mathrm{E}_{s}(k'))^{-1} \left(2\mathrm{B}(n-s) + (k+k')(k-k') \right) . \end{split} \tag{5.34}$$

Um zu einer Abschätzung für den Ausdruck (n-s) $V_{lnrs}(k-k')$ zu gelangen, benötigen wir die schon in (5.31) benutzten Eigenschaften der Leiteroperatoren $\alpha^{(+)}$, $\beta^{(+)}$. Es gilt:

$$(\partial_{x} - i\partial_{y}) \left[\overline{u_{ln}}(x,y) u_{rs}(x,y)\right] = u_{rs}(x,y) \left[\partial_{x} - i\partial_{y} + B/2 (x - iy)\right] \overline{u_{ln}}(x,y) - \overline{u_{ln}}(x,y) \left[-\partial_{x} + i\partial_{y} + B/2 (x - iy)\right] u_{rs}(x,y)$$

$$= (2B)^{\frac{1}{2}} \left[u_{rs}(x,y) \beta \overline{u_{ln}}(x,y) - \overline{u_{ln}}(x,y) \alpha^{+} u_{rs}(x,y)\right]$$

$$= (2B)^{\frac{1}{2}} \left[n^{\frac{1}{2}} \overline{u_{ln-1}}(x,y) u_{rs}(x,y) - (s+1)^{\frac{1}{2}} \overline{u_{ln}}(x,y) u_{rs+1}(x,y)\right]. \qquad (5.35)$$

Analog erhält man:

$$(-\partial_{x} - i\partial_{y}) [\overline{u_{ln}}(x,y) u_{rs}(x,y)] =$$

$$= (2B)^{\frac{1}{2}} [(n+1)^{\frac{1}{2}} \overline{u_{ln+i}}(x,y) u_{rs}(x,y) - s^{\frac{1}{2}} \overline{u_{ln}}(x,y) u_{rs-i}(x,y)] . \qquad (5.36)$$

Aus (5.35), (5.36) folgt:

$$(n-s) \overline{u_{\ln}}(x,y) u_{rs}(x,y) = (2B)^{-\frac{1}{2}} \left[(n+1)^{\frac{1}{2}} (\partial_x - i\partial_y) (\overline{u_{\ln+1}}(x,y) u_{rs}(x,y)) + (s+1)^{\frac{1}{2}} (-\partial_x - i\partial_y) (\overline{u_{\ln}}(x,y) u_{rs+1}(x,y)) \right]$$

und dann mit partieller Integration

$$(2B)^{\frac{1}{2}} (n-s) V_{lnrs}(k-k') = (2B)^{\frac{1}{2}} (n-s) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_{ln}}(x,y) \hat{V}(x,y,k-k') u_{rs}(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(n+1)^{\frac{1}{2}} \overline{u_{ln+1}}(x,y) u_{rs}(x,y) (-\partial_x + i\partial_y) \hat{V}(x,y,k-k') + (s+1)^{\frac{1}{2}} \overline{u_{ln}}(x,y) u_{rs+1}(x,y) (\partial_x + i\partial_y) \hat{V}(x,y,k-k') \right] dx dy$$

$$= -(n+1)^{\frac{1}{2}} D_{ln+1rs}(k-k') + (s+1)^{\frac{1}{2}} F_{lnrs+1}(k-k') ,$$

mit den Abkürzungen $D(\mathbf{x}) := [(\partial_{\mathbf{x}} - \mathrm{i}\partial_{\mathbf{y}}) \ V](\mathbf{x})$, $F(\mathbf{x}) := [(\partial_{\mathbf{x}} + \mathrm{i}\partial_{\mathbf{y}}) \ V](\mathbf{x})$. Bezeichne weiter $G(\mathbf{x}) := [\partial_{\mathbf{z}} \ V](\mathbf{x})$, so folgt mit der Cauchy-Schwartz-Ungleichung:

$$\begin{split} & \left| \left[2B(n-s) + (k+k^{\scriptscriptstyle \text{I}}) (k-k^{\scriptscriptstyle \text{I}}) \right] \right. V_{\ln rs}(k-k^{\scriptscriptstyle \text{I}}) \left|^{2} \right. \leq \\ & \leq \left. \left[2B(n+1+s+1) + (k+k^{\scriptscriptstyle \text{I}})^{2} \right] \left(\left. \left| D_{\ln + 1 rs}(k-k^{\scriptscriptstyle \text{I}}) \right|^{2} + \left. \left| F_{\ln rs + 1}(k-k^{\scriptscriptstyle \text{I}}) \right|^{2} + \left. \left| G_{\ln rs}(k-k^{\scriptscriptstyle \text{I}}) \right|^{2} \right) \right. \end{split}$$

und mit

$$\begin{split} 2B(n+s+2) + (k+k')^2 & \leq 2B(2n+1) + 2B(2s+1) + 2k^2 + 2k'^2 \\ & \leq 2(E_n(k)^2 + E_s(k')^2) \\ & \leq 2(E_n(k) + E_s(k'))^2 \quad , \end{split}$$

eingesetzt in (5.25), für den Anteil vom elektrostatischen Potential an \mathcal{I} :

$$\mathcal{I}_{e} \leq 2 \sum_{l, n, r, s=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{n}(k) + E_{s}(k^{!}))^{-2} (E_{n}(k) E_{s}(k^{!}))^{-1} \cdot \\ \cdot (|D_{ln+irs}(k-k^{!})|^{2} + |F_{lnrs+i}(k-k^{!})|^{2} + |G_{lnrs}(k-k^{!})|^{2}) dk dk^{!}$$

$$\leq 4 \sum_{l, n, r, s=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{n}(k)^{-3} E_{0}(k^{!})^{-1} |(\nabla V)_{lnrs}(k-k^{!})|^{2} dk dk^{!} .$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Summe in k,k' können wir die Summation über r,s ausführen und erhalten mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung:

$$\mathcal{I}_{e} \leq 4 \sum_{l, n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{E}_{n}(k)^{-3} \operatorname{E}_{0}(k^{l})^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(\nabla V)(x, y, k - k^{l})|^{2} |u_{1n}(x, y)|^{2} dx dy \right] dk dk^{l}$$

und mit (5.24) und Variablensubstitution

$$\mathcal{I}_e \leq 2B \pi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_n(k-k^i)^{-3} E_0(k^i)^{-1} dk^i \right] |(\nabla V)(x,y,k)|^2 dx dy dk .$$

Weiter gilt:

$$\begin{split} \sum_{n=0}^{\infty} E_n(k)^{-3} &\leq E_0(k)^{-3} + \int_1^{\infty} (B(2x-1) + m^2 + k^2)^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= E_0(k)^{-3} + (4B)^{-1} (B + m^2 + k^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{5}{4B} E_0(k)^{-1} . \end{split}$$

Wie man aus der Analyse des Integrals $\mathcal{I}_{\delta}(\,\cdot\,)$ (4.20) im Beweis von Lemma 4.3 leicht abliest, ist

$$\int_{0}^{\infty} E_{0}(k-k^{T})^{-1} E_{0}(k^{T})^{-1} dk^{T} \leq c (1 + |k|)^{-1+\delta}$$

für jedes $\delta > 0$. Aus den letzten drei Ungleichungen folgt, daß elektrostatische Potentiale, welche der Voraussetzung (5.33) genügen, die Bedingung (3.2) erfüllen.

Weiterhin ist V relativ $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-1-\delta}$ -kompakt für ein $\delta > 0$, da die Voraussetzung im Fall $\nu = 3$ von Satz 4.4 schwächer ist als (5.33), die erstgenannte aber die relative ε_0 ^{1- δ}-Kompaktheit von V impliziert, welche nach dem Beweis von Satz 5.4 hinreichend ist für die $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-1-\delta}$ -Kompaktheit. Insbesondere impliziert (5.33) die relative $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{-}$ -Beschränktheit von V.

Es bleibt die Kompaktheit des Operators (3.10) zu prüfen. Hierzu können wir analog zum Beweis von Lemma 4.3 vorgehen. Es ist nicht schwer mit den oben entwickelten Abschätzungen die H.S.-Eigenschaft der den Operatoren (4.19) hier entsprechenden Ausdrücke aus der Bedingung der Voraussetzung abzuleiten. Nach dem Beweis von Lemma 4.3 benötigt man dann lediglich die relative $\epsilon_{\mathbf{A}}^{-1-\delta}$ -Kompaktheit von V für ein $\delta > 0$, die nach dem vorhin Gesagten gegeben ist.

Im Fall der skalaren Potentiale können wir wie oben vorgehen (der Bedingung (5.25) genügen alle Felder, für die $\int (1+|\mathbf{k}_3|)^{-1+\delta} ||\hat{\mathbf{A}}_j(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} < \infty$ für ein $\delta > 0$ gilt), jedoch schränkt die Forderung nach ihrer relativen $\varepsilon_{\mathbf{A}}^{\sim}$ -Beschränktheit uns auf die (ja relativ ε_0 -kompakten) Potentiale aus $L_2(\mathbb{R}^3)$ ein. \square

Mit der Beweisidee von Satz 4.5 läßt sich auch hier die Irregularität des Coulombpotentials zeigen.

Satz 5.12

Das elektrostatische Coulombpotential $V(\mathbf{x}) = \frac{e}{\mathbf{x}}$ (mit $e \in \mathbb{R}$, $|e| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$) ist nicht regulär.

Beweis: Aus dem Beweis von Korollar 4.7 und (5.6) folgt $\| V \varepsilon_{\mathbf{A}}^{-1} \| \le b < 1$. Wir können nun wie beim Beweis von Satz 4.5 vorgehen und erhalten aus (5.8) die folgende

Transformation von $\epsilon_{\mathbf{A}}^{-2}$ unter der Verschiebung (4.28) :

$$U_{a}\left(-\Delta + m^{2} + \frac{B^{2}}{4}(x^{2}+y^{2}) - B L_{z}\right) U_{a}^{*} = a^{-2}(-\Delta + a^{2} m^{2} + a^{4} \frac{B^{2}}{4}(x^{2}+y^{2}) - a^{2} B L_{z})$$

auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ für jedes a>0 . Es folgt :

$$U_{\mathbf{a}} \, \, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}^{-} \, \, U_{\mathbf{a}}^{ *} = \frac{1}{a} \, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}^{-},_{\mathbf{a}} \quad , \quad$$

wobei $\varepsilon_{\tilde{A}}^{-}$,a gleich dem Abschluß des Operators $-\Delta + a^2m^2 + a^4\frac{B^2}{4}(x^2+y^2) - a^2BL_z$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ ist. Wir können nun im Beweis von Satz 4.5 ε_a durch $\varepsilon_{\tilde{A}}^{-}$,a ersetzen und kommen auch hier zum Schluß, daß Potentiale, welche (4.24) genügen, also insbesondere das Coulombpotential, irregulär sind. \square

ANHANG

Wir beweisen eine Behauptung aus Bemerkung 1.8.

Satz A.1

Es mögen die Voraussetzungen von Satz 2.1 gelten, sei H wie in (2.7), $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$ wie in Kapitel 4 definiert.

Vertauscht der Projektor auf den absolut stetigen Teilraum für H, $P_{ac}(H)$, mit J (2.2), so ist das Punktspektrum von H leer.

Beweis: Wir gehen o.E.d.A. davon aus, daß es (etwa durch die Wahl einer kleinen Kopplungsstärke) nur einen einzigen Eigenvektor f von H gibt. Wir können dann $f \in \mathcal{H}^0_+$ annehmen und erhalten mit dem zugehörigen Eigenwert λ :

$$\lambda f = H f = |H_0|^{\frac{1}{2}} J (I + JG) |H_0|^{\frac{1}{2}} f$$

und für die Komponenten

$$\lambda f = \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} (I + P_+^0 G P_-^0) \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} f ,$$

$$0 = \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} P_-^0 G P_+^0 \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} f .$$

Mit $g := \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}$ f folgt aus der letzten Gleichung mit der Notation (2.5):

$$(B - B^* - Y)g = 0$$
.

Elektrostatische und skalare Potentiale sind unabhängig voneinander, es folgt

$$V \varepsilon_0^{-1} g = \overline{\varepsilon_0^{-1} V} g$$

und

$$\varepsilon_0^{-1} A_{\mathbf{j}} \varepsilon_0^{-1} g = 0 .$$

Man erhält $A_4 \equiv 0$ und mit Hilfe der Fouriertransformierten

$$0 = \int (E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}}) \, \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \, \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \, d\mathbf{q}$$
$$= \int \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{V}})(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \, \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \, d\mathbf{q}$$

für alle p $\epsilon \mathbb{R}^{\nu}$ in der Notation aus Abschnitt 4.1. Hieraus folgt die Konstanz von $\mathbf{x} \longmapsto V(\mathbf{x})$ (a.e) und damit $V \equiv 0$. Sollen A_j und V nichttrivial sein, so ergibt sich somit, daß das Punktspektrum von H leer sein muß. \square

Als nächster Punkt folgen die Beweise der Sätze 1.9 und 1.11 sowie des Lemma 1.10. Die Behauptungen sind im wesentlichen einfache Verallgemeinerungen von in der Literatur bekannten Sätzen. Wir haben hier Beweisideen aus [R1] benutzt. Satz 1.9 ist eine formale Verallgemeinerung von [R1 Th.6.1], den Beweis von Satz 1.11 haben wir mit der Hilfe von Ergebnissen aus der Theorie unendlicher Determinanten abgekürzt, zusätzlich wird hier die notwendige Bedingung spr A < 1 betont.

Beweis von Satz 1.9: Wir bedienen uns der Beweisidee aus [R1 Th.6.1]. Dazu definieren wir den Operator $P^{n, r}$ auf D_f durch

$$(\mathsf{P}^{\mathsf{n},\;\mathsf{r}}\;\phi\;)^{(\mathsf{n}^{\mathsf{l}},\;\mathsf{r}^{\mathsf{l}})}=\,\delta_{\mathsf{n}\mathsf{n}^{\mathsf{l}}}\;\delta_{\mathsf{r}\mathsf{r}^{\mathsf{l}}}\;\phi^{(\mathsf{n},\;\mathsf{r})}$$

für $n, n', r, r' \geq 0$ und $\phi \in D_f$ einen Projektor, $\phi^{(n, r)}$ bezeichnet hier analog zur Benennung aus 1.1 die Komponente des Vektors ϕ aus $\mathcal{H}^0_+({}^n_s) \otimes \mathcal{H}^0_-({}^r_s)$. Mit der Definition der Leiteroperatoren folgt sofort auf D_f :

$$P^{n, r} a(f) = a(f) P^{n+1, r}$$
, $P^{n, r} b(g) = b(g) P^{n, r+1}$, $P^{n+1, r} a^*(f) = a^*(f) P^{n, r}$, $P^{n, r+1} b^*(g) = b^*(g) P^{n, r}$

für alle f ϵ \mathcal{H}^0_+ , g ϵ \mathcal{H}^0_- ; n,r ≥ 0 .

Nach Voraussetzung gilt nun

$$P^{n, r}(a(A_1 v) - b^*(C A_3 v)) \Omega^{r} = 0$$

und so

$$a(A_1 v) P^{n+1, r+1} \Omega^{1} = b^{*}(C A_3 v) P^{n, r} \Omega^{1}$$
(A.1)

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{M}$ und $\mathbf{n}, \mathbf{r} \geq 0$. Ist nun für ein n und ein $\mathbf{r} = \mathbf{P}^{\mathbf{n}, \mathbf{r}} \Omega^{\mathbf{r}} = 0$, so folgt nach (A.1) und da nach Voraussetzung $\mathbf{R}(\mathbf{A}_1) = \mathcal{H}^0_+$ ist, daß auch $\mathbf{P}^{\mathbf{n}+\mathbf{l}, \mathbf{r}+\mathbf{l}} \Omega^{\mathbf{l}} = 0$ gilt. Wegen $\mathbf{P}^{\mathbf{n}, 0} \mathbf{b}^*(\mathbf{g}) \psi = 0$ für jedes $\mathbf{g} \in \mathcal{H}^0_+$, $\mathbf{n} \geq 0$, $\psi \in \mathbf{D}_\mathbf{f}$ erhalten wir weiter aus (A.1):

$$a(A_1 v) P^{n+1, 0} \Omega^{\prime} = P^{n, 0} b^*(C A_3 v) \Omega^{\prime} = 0$$

für alle v ϵ M , n \geq 0 und somit für n \geq 0 $P^{n+1,\ 0}$ $\Omega^1=0$, also mit dem eben Gesagten $P^{n+k,\ k}$ $\Omega^1=0$

für alle $n \ge 1$ und $k \ge 0$. Mit der zweiten Gleichung aus (1.52) und $R(A_4) = \mathcal{H}^0$ folgt analog

$$P^{l,r+l} \Omega' = 0$$

für alle $r \ge 1$ und $l \ge 0$. Nach Voraussetzung ist Ω' nichttrivial, also muß

$$P^{0,0} \Omega^{1} = \alpha \neq 0$$

mit α ε C gelten. Wir definieren nun

$$\psi := \psi_1 \otimes \psi_2 := \frac{1}{\alpha} (\Omega^i)^{\{1, 1\}} = \frac{1}{\alpha} (P^{1, 1} \Omega^i)^{\{1, 1\}} ,$$

also $\psi_1 \in \mathcal{H}^0_+$, $\psi_2 \in \mathcal{H}^0_-$, und weiter den Operator B: $\mathcal{H}^0_+ \longrightarrow \mathcal{H}^0_-$ durch B $\cdot := (\cdot, \psi_1) \psi_2$.

Damit ist B ein H.S.-Operator. Mit der Definition der Leiteroperatoren und mit (A.1) erhält man:

B A₁ v = (A₁ v,
$$\psi_1$$
) ψ_2
= $\frac{1}{\alpha}$ (a(A₁ v) P^{1,1} Ω^1)(0, 1)
= $\frac{1}{\alpha}$ (b*(C A₃ v) P^{0,0} Ω^1)(0, 1)
= $\frac{1}{\alpha}$ C A₃ v P^{0,0} Ω^1
= C A₃ v

und analog

$$B^* A_4 w = C A_2 w$$

für alle $v \in M$, $w \in M'$. Folglich sind A_2 und A_3 H.S. - Operatoren. \Box

Beweis von Lemma 1.10: Wegen

((A
$$a^*b^*$$
)ⁿ Ω , (A a^*b^*)^m Ω) = δ_{nm} || (A a^*b^*)ⁿ Ω ||²

ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n := \|\frac{1}{n!} (A a^* b^*)^n \Omega\|^2$$

äquivalent dazu, daß Ω aus D(exp A a*b*) ist. Mit den singulären Werten von A, λ_j , definieren wir die Operatoren $A_N: \mathcal{H}^0_+ \longrightarrow \mathcal{H}^0_+$:

$$A_{N} \cdot := \sum_{j=1}^{N} \lambda_{j} (f^{\circ}_{j}, \cdot) g^{0}_{j} .$$

Mit der (1.53) entsprechenden Definition von $A_N a^*b^*$ und

$$a_n,_{_{_{\boldsymbol{N}}}} := \, \| \, \frac{1}{n!} \, (\, \boldsymbol{A}_{_{_{\boldsymbol{N}}}} \, \, \boldsymbol{a^*b^*})^n \, \, \boldsymbol{\Omega} \, \, \|^2$$

erhält man

$$\lim_{N\to\infty} a_{n,y} = a_n .$$

Weiterhin errechnet man direkt

$$\mathbf{a_{n},_{N}} = \sum_{\substack{k_{1}, \cdots, k_{N}=0 \\ k_{1}+\cdots+k_{N}=n}}^{n} \prod_{i=1}^{N} \lambda_{i}^{2k_{i}} .$$

Nun ist unmittelbar klar, daß

$$\mathbf{a}_{n},_{_{N}}<\mathbf{a}_{n},_{_{N}}, \quad \text{für } N< N'$$

gilt. Weiterhin konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^{2n}$$

genau dann, wenn $\lambda_1 < 1$ gilt. Hier sind wie üblich die singulären Werte von A so geordnet, daß für i > j $\lambda_i \le \lambda_j$ gilt. Als notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ erhalten wir, daß spr A < 1 sein muß. Sei also im folgenden $\lambda_1 < 1$.

Man entwickelt nun die in $\mathscr{K} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \lambda_1^{-2} \}$ holomorphe Funktion

$$F_{N}(z) := \prod_{i=1}^{N} (1 - z \lambda_{i}^{2})^{-1}$$

um z = 0 und erhält

$$F_{N}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}, z^{n} .$$

Andererseits ergibt sich für die unendlichen Determinanten nach [Si]:

i)
$$\prod_{i=1}^{N} (1 - z \lambda_i^2) = \det (I - z A_N^* A_N^*) ,$$

ii)
$$\|A_N - A\|_2 \rightarrow 0$$
 impliziert det $(I - z A_N^* A_N) \rightarrow \det (I - z A^* A)$ für $N \rightarrow 0$,

iii) det $(I - z A_N^* A_N) \neq 0$ gilt genau dann, wenn $I - z A_N^* A_N$ invertierbar mit beschränktem Inversen ist .

Insgesamt erhalten wir hiermit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_{N\to\infty} F_N(z) = \det (I - z A^*A)^{-1}$$

für alle z ϵ \mathcal{K} und, da 1 ϵ \mathcal{K} ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \det (I - A^*A)^{-1} < \infty .$$

Somit ist Ω in D(exp A a*b*) und es gilt (1.55).

Für k & N haben die Funktionen

$$G_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n)^k a_n z^n$$

denselben Konvergenzradius wie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ und sind somit holomorph in \mathcal{K} . Also ist $\exp(A\ a^*b^*)\ \Omega$ aus D_m . Nun gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (A a^*b^*)^n \prod_{i=1}^{k} a^*(f_i) \prod_{j=1}^{r} b^*(g_j) \Omega = \prod_{i=1}^{k} a^*(f_i) \prod_{j=1}^{r} b^*(g_j) P_{2^N} \exp(A a^*b^*) \Omega$$

mit $f_i \in \mathcal{H}^0_+$, $g_j \in \mathcal{H}^0_-$, $k,r \in \mathbb{N}$. Nach dem vorher Gesagten existiert der Limes für $N \to \infty$ der rechten Seite der Gleichung, so daß schließlich folgt, daß D in D(exp A a*b*) liegt. \square

Beweis von Satz 1.11: Nach Lemma 1.10 gilt $\|\Omega'\| = 1$, $\Omega' \in D_{\infty} \subset D_{\Omega}$. Es ist (1.52) zu zeigen. Auf D gilt mit $f \in \mathcal{H}^0_+$:

[a(f), A a*b*] =
$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$$
 (f, f_j⁰) b*(C g_j⁰)
= b*(C A*f)

(wegen (1.11) dürfen wir die Summe in das "Argument" des Leiteroperators ziehen) und so erhält man für n≥1:

$$[a(f), (A a*b*)^n] = n b*(C A*f) (A a*b*)^{n-1}$$

Mit der Definition von a(f) folgt:

$$a(f) \exp (A a^*b^*) \Omega = \lim_{N^1 \to \infty} a(f) P_{N^1} \exp (A a^*b^*) \Omega$$

$$= \lim_{N^1 \to \infty} P_{N^1-1} \left[a(f), \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (A a^*b^*)^n \right] \Omega$$

$$= \lim_{N^1 \to \infty} P_{N^1-1} b^* (C A^*f) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} (A a^*b^*)^{n-1} \Omega$$

$$= b^* (C A^*f) \exp (A a^*b^*) \Omega \qquad (A.2)$$

für $f \in \mathcal{H}^0_+$ (wo N' = N(N+1)). Analog folgt:

$$b(C g) \exp (A a^*b^*) \Omega = a^*(A g) \exp (A a^*b^*) \Omega \qquad \forall g \in \mathcal{H}^0. \tag{A.3}$$

Weiter gilt mit (1.56)

$$A^* A_1 f = (A_2 A_4^{-1})^* A_1 f$$

= $A_3 f \quad \forall f \in M$,
 $A A_4 g = A_2 g \quad \forall g \in M^1$.

Hiermit folgt aus (A.2),(A.3) dann (1.52) und damit die Behauptung.

Wir zeigen als nächstes eine Behauptung aus Abschnitt 2.3.

Satz A.2

Sei H der Generator einer stark stetigen einparametrigen quasi-beschränkten Gruppe J-unitärer Operatoren auf \mathcal{H} { $U_t = \exp{(i \ H \ t)} \mid t \in \mathbb{R}$ } und gelte (1.38). Dann ist $\sigma_e(H) \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir kürzen ab: $U_1 := P_+^0 U_t P_+^0$, $U_2 := P_+^0 U_t P_-^0$, $U_3 := P_-^0 U_t P_+^0$, $U_4 := P_-^0 U_t P_-^0$. Aus der J-Unitarität von U_t folgt sofort:

$$U_1^*U_1 - U_3^*U_3 = I$$
 , $U_1^*U_2 - U_3^*U_4 = 0$
 $U_2^*U_1 - U_4^*U_3 = 0$, $U_2^*U_2 - U_4^*U_4 = -I$

auf \mathcal{H}^0_+ bzw. \mathcal{H}^0_- und damit die polare Zerlegung

$$U_1 = A (U_1^*U_1)^{\frac{1}{2}} = A (I + U_3^*U_3)^{\frac{1}{2}}$$
 $U_4 = B (I + U_2^*U_2)^{\frac{1}{2}}$

mit den in &, bzw. & unitären Operatoren A und B. Weiter gilt

$$(I + U_2^*U_2)^{\frac{1}{2}} = I + U_2^*U_2(I + (I + U_2^*U_2)^{\frac{1}{2}})^{-1}$$

sowie die gleiche Gleichung mit U_3 an der Stelle von U_2 . Wir können also schreiben

$$\begin{split} U_{t} &:= \begin{bmatrix} U_{1} & U_{2} \\ U_{3} & U_{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & U_{3}^{*}U_{3} & (I + (I + U_{3}^{*}U_{3})^{\frac{1}{2}})^{-1} & U_{2} \\ & & & B & U_{2}^{*}U_{2} & (I + (I + U_{2}^{*}U_{2})^{\frac{1}{2}})^{-1} \end{bmatrix} \end{split}$$

Der erste Summand ist unitär. Nach Voraussetzung sind U_2 und U_3 H.S.-Operatoren, somit trifft dies auch auf den zweiten Summanden zu. Mit dem Satz von Weyl über die Invarianz des wesentlichen Spektrums folgt, daß das wesentliche Spektrum von H reell ist. \square

LITERATUR:

- [AHS] J. Avron, I. Herbst, B. Simon: Schrödinger operators with magnetic fields.

 I. General interactions. Duke Math. J. 45 (1978) 847
- [B] P.J.M. Bongaarts: The electron-positron field, coupled to external electromagnetic potentials as an elementary C*-algebra theory.

 Ann. Phys. 56 (1970) 108
- [BR] ders., S.N.M. Ruijsennars: The Klein paradox as a many particle problem. Ann. Phys. 101 (1976) 289
- [C] T. Cowan et al.: Anomalous positron peaks from supercritical collision systems. Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 1761
- [F] K.O. Friedrichs: Mathematical aspects of the quantum theory of fields.
 Interscience Publ. New York 1953
- [FSch] H. Fierz, G. Scharf: Particle interpretation for external field problems. Helv. Phys. Acta 52 (1979) 437
- [H] W.J.M.A. Hochstenbach: Field theory with an external potential. Commun. Math. Phys. 51 (1976) 211
- [J] K. Jörgens: Zur Spektraltheorie der Schrödinger-Operatoren. Math. Zeitschr. 96 (1967) 355
- T. Kato: Pertubation theory for linear operators.
 2nd ed.; Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1976
- [Kl] M. Klaus: Non-regularity of the Coulomb potential in quantum electrodynamics. Helv. Phys. Acta 53 (1980) 36
- [KMP] P. Kristensen, L. Mejlbo, E. Thue Poulsen: Tempered distributions in infinitely many dimensions. III. Linear transformations of field operators.
 Commun. Math. Phys. 6 (1967) 29
- [KSch1] M. Klaus, G. Scharf: The regular external field problem in quantum electrodynamics. Helv. Phys. Acta 50 (1977) 779
- [KSch2] dies.: Vacuum polarisation in Fock space. Helv. Phys. Acta 50 (1977) 803

- [L] G. Labonte': On the particle interpretation for the quantized fields in external field problems. Canad. J. Phys. 53 (1975) 1533
- [Lul] L.-E. Lundberg: Spectral and scattering theory for the Klein-Gordon equation. Commun. Math. Phys. 31 (1973) 243
- [Lu2] ders.: Relativistic quantum theory for charged spinless particles in external vector fields. Commun. Math. Phys. 31 (1973) 295
- [MV] J. Manuceau, A. Verbeure: The theorem on unitary equivalence of Fock representations. Ann. Inst. Henri Poincare' 16 (1971) 87
- [N1] G. Nenciu: On the adiabatic limit for Dirac particles in external fields. Commun. Math. Phys. 76 (1980) 117
- [N2] ders.: Adiabatic theorem and spectral concentration. Commun. Math. Phys. 82 (1981) 121
- [N3] ders.: Existence of the spontaneous pair creation in the external field approximation of QED. Commun. Math. Phys. 109 (1987) 303
- [NSch] G. Nenciu, G. Scharf: On external fields in quantum electrodynamics. Helv. Phys. Acta 51 (1978) 412
- [P1] J. Palmer: Symplectic groups and the Klein-Gordon field.
 J. Functional Anal. 27 (1978) 308
- [P2] ders.: Complex structures and external fields. Arch. for Ratio. Mech. and Anal. 75 (1980) 31
- [R1] S.N.M. Ruijsenaars: On Bogoliubov transformations for systems of relativistic charged particles. J. Math. Phys. 18 (1977) 517
- [R2] ders.: Charged particles in external fields. I Classical theory. J. Math. Phys. 18 (1977) 720
- [R3] ders.: Charged particles in external fields. II The quantized Dirac and Klein-Gordon theories. Commun. Math. Phys. 52 (1977) 267
- [R4] ders.: On Bogoliubov transformations. II The general case.
 Ann. of Phys. 116 (1978) 105

- [RFK] J. Rafelski, L.P. Fulcher, A. Klein: Fermions and bosons interacting with arbitrarily strong external fields. Phys. Rep. 38 (1978) 227
- [RSI] M. Reed, B. Simon: Methods of modern mathematical physics Vol.1.

 Academic Press New York, London 1972
- [RSII] dies.: Methods of modern mathematical physics Vol.2.

 Academic Press New York, London 1975
- [RSIII] dies.: Methods of modern mathematical physics Vol.3.

 Academic Press New York, London 1979
- [S] H.P. Seipp: On the S-operator for the external field problem of QED Helv. Phys. Acta 55 (1982) 1
- [Š] P. Šeba: On the absorption of eigenvalues by continuos spectrum in the one and three dimensional Dirac equation. Czech. J. Phys. B 38 (1988) 1078
- [Se] R. Seiler: Quantum theory of particles with spin zero and one half in external fields. Commun. Math. Phys. 25 (1972) 127
- [SchS] G. Scharf, H.P. Seipp: Charged vacuum, spontaneous positron production and all that. Phys. Lett. 108B (1982) 196
- [SchSw] B. Schroer, J.A. Swieca: Indefinit metric and stationary external interactions of quantized fields. Phys. Rev. D 2 (1970) 2938
- [SchSW] L.I. Schiff, H. Snyder, J. Weinberg: On the existence of stationary states of the mesotron field. Phys. Rev. 57 (1940) 315
- [Sh] D. Shale: Linear symmetries of the free boson fields. Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962) 149
- [Schw] J. Schweppe: Observation of a peak structure in positron spectra from U+Cm collissions. Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 2261
- [V1] K. Veselić: A spectral theorem for a class of J-normal operators. Glasnik Mat. 5 (25) (1970) 97
- [V2] ders.: On spectral properties of a class of J-selfadjoint operators I. Glasnik Mat. 7 (27) (1972) 229

- [V3] ders.: On the nonrelativistic limit of bound states of the Klein-Gordon equation. J. Math. Anal. Appl. 96 (1983) 63
- [W] J. Weidmann: Linear operators in Hilbert spaces.

 Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1980
- [Wal] H.A. Warchall: Implementation of automorphism groups in certain representations of the canonical commutation relations.
 J. Math. Phys. 23 (1982) 2221
- [Wa2] ders.: C*-algebraic scattering theory and explicitly solvable quantum field theories. J. Math. Phys. 26 (1985) 1264

LEBENSLAUF

13.12.1958	Geboren in Obernbeck Eltern: Gerhard Asmuß und Edeltraud Asmuß, geb. Dreyer
1965 - 1969	Volksschule Obernbeck
1969 - 1978	Städtisches Gymnasium Löhne
26.5.1978	Abitur
10.1978 - 9.1984	Studium der Physik mit Nebenfach Mathematik an der Universität Dortmund
17.9.1984	Diplom in Physik (Diplomarbeit zu Kaluza-Klein Modellen und vereinheitlichten Eichtheorien)

 $\mathbf{seit}\ 15.2.1985$

Wissenschaftlicher Angestellter an der FU - GHS - Hagen