De forma catenarum in campo gravitatis pendentium*

K. Veselić†

Die 3 m. Martii a. 1995

Jam usque a principiis analyseos notum est catenam homogeneam e multis perparvis anulis constantem libereque in campo gravitatis pendentem eam formam "curvae catenariae" assumere, quae functione cosinus hyperbolici describitur. [1]

Catena autem dicta discreta i.e. e numero quodam finito n baculorum rigidorum inter se artubus junctorum constans (v. Fig. 1) imprimis in operibus de Mechanica tractabatur.[2] De ea ipsa catena discreta hic more mathematico disserere volumus.

Problema autem nostrum aequilibrii hoce modo ponemus: Eam formam catenae determinare, quae minimum energiae potentialis (i.e. aequilibrium, quod dicitur stabile) exhibet.

Simplicitatis gratia in hac commentatione casus specialis tractabitur catenae, quae fine suo sinistro in puncto fixo O pendet, fine autem dextro linea recta verticali $x = l$ moveri potest (v. Fig. 1). Longitudines $d_1, d_2, \ldots d_n$ singulorum baculorum inaequalitates has valde consentaneas

$$D = d_1 + d_2 + \ldots + d_n > l \tag{1}$$

$$d_i < l, i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

explere quemque baculum homogeneum et massae m_i esse supponemus. Forma catenae hoc modo describitur: E coordinatis X_i, Y_i, Z_i puncti $P_i, i = 1, \ldots, n$, coordinatae baculorum introducuntur

$$x_i = X_i - X_{i-1},\ y_i = Y_i - Y_{i-1},\ z_i = Z_i - Z_{i-1},$$

*Textus hic - nunc diligenter revisus ac emendatus - prius in editione *Klasična Gimnazija u Zagrebu (1607 - 1987), Obrazovni centar za jezike - Latina et Graeca Zagreb 1987* apparuit.

†Fernuniversität Hagen, Postf. 940 D-58084 Hagen

[1] e.g. apud Ch. Huygens 1690.

[2] v. Nielsen, Vorlesungen über elementare Mechanik, Springer Berlin 1983.

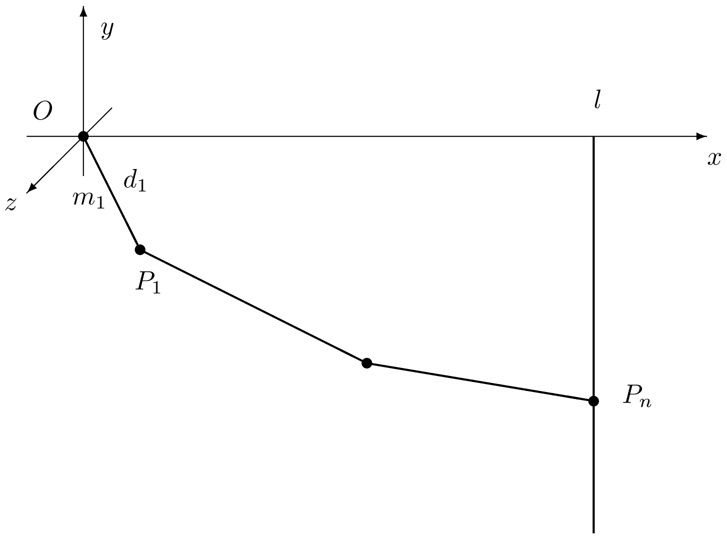

Fig. 1

quae condicionibus

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - d_i^2 = 0,\ i = 1, \ldots n, \tag{3}$$

$$x_1 + \ldots + x_n - l = 0,\ z_1 + \ldots + z_n = 0, \tag{4}$$

satisfaciunt. Energia potentialis catenae sic exprimitur

$$E = g[(m_1 + m_2)y_1 + \ldots + (m_{n-1} + m_n)y_{n-1} + m_n y_n]/2 = \\ g(\sigma_1 y_1 + \ldots + \sigma_n y_n), \tag{5}$$

$$\sigma_i = (m_i + 2m_{i+1} + \ldots + 2m_n)/2,\ i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

ubi g constantem gravitatis denotat. Multitudinem M omnium vectorum $v = (x_1, \ldots, z_n)$ e spatio R^{3n} condiciones (3) et (4) explentium compactam esse ideoque functionem continuam in M minimum suum semper assumere facillime perspicitur. Elucet unam quamque functionem in sinistra aequationum (3), (4) apparentem differentialia continua cuiuscumque ordinis possidere; differentiando secundum x_i, y_i, z_i obtinetur

$$2x_i dx_i + 2y_i dy_i + 2z_i dz_i = 0, i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

$$dx_i + \ldots + dx_n = 0,\ dz_1 + \ldots + dz_n = 0. \tag{8}$$

Facile intellegitur has aequationes lineares $3n$ variabilium $dx_1, \ldots, dz_n$ in quoquo puncto $v = (x_1, \ldots, z_n) \in M$ semper independentes esse exceptis punctis v forma

$$y_i = z_i = 0,\ |x_i| = d_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

scilicet

$$v = (a_1 d_1, \ldots a_n d_n, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0),\ a_i \in \{1, -1\},\ i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Quae exceptio rarissime occurrit, cum ad valendam relationem (9) necesse sit ut valeat aequatio

$$a_1 d_1 + \ldots + a_n d_n = l. \tag{10}$$

Multitudinem hanc exceptionalem vectorum v per M' denotando atque $M^0 = M \setminus M'$ ponendo patet M^0 esse multiplicitatem infinite differentiabilem $2n - 2$ dimensionum, cuius spatium tangentiale in puncto $v = (x_1, \ldots, z_n)$ e vectoribus $d = (dx_1, \ldots, dz_n)$ aequationes (7), (8) satisfacientibus constat.

Cum functio E in M' semper valorem 0 assumat minimumque eius certo negativum sit, minimum istud multiplicitate ipsa M^0 locum habere concluditur. Jam methodum ab ill. Lagrange doctam legitime adhibere potes.[3] Itaque formatur functio dicta Lagrangiana

$$L = E + \sum_i \mu_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + \mu(x_1 + \ldots + x_n) + \sigma(z_1 + \ldots + z_n), \tag{11}$$

cuius gradiens in quoquo loco minimi, etiamsi localis, evanescere debet, quod est

$$2\mu_i x_i + \mu = 0,\ 2\mu_i y_i + \sigma_i g = 0,\ 2\mu z_i + \sigma = 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Quae aequationes una cum aequationibus (3), (4) systema $4n + 2$ aequationum totidemque incognitis $x_1, \ldots, z_n, \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu, \sigma$ formant.

Lemma 1 *Quacumque solutione $x_1, \ldots, \sigma$ aequationum (3), (4), (12) valores $z_1, \ldots, z_n, \sigma$ semper evanescunt, valorum autem $x_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu$ nullus umquam evanescere potest.*

Demonstratio huius lemmatis notatis tantum relationibus utilibus

$$-\mu(1/\mu_1 + \ldots + 1/\mu_n)/2 = l, \tag{13}$$

$$-\sigma(1/\mu_1 + \ldots + 1/\mu_n)/2 = 0 \tag{14}$$

[3] Hestenes, Optimization Theory, Wiley New York 1975.

simplex facilisque omittitur.

E hoc lemmate catenam in statu quocumque aequilibrii semper planam i.e. in plano verticali x, y sitam esse manat.

Lemma 2 *Si in quocumque puncto $v \in M^0$ functio E multiplicitate M^0 minimum saltem locale possidet, valores $\mu_1, \ldots, \mu_n, x_1, \ldots, x_n$ positivi, valores autem $y_1, \ldots, y_n, \mu$ negativi minimumque ipsum strictum esse debet.*

Demonstratio. In omni puncto $v \in M^0$ minimi cuiuscumque localis non solum systema aequationum (3), (4), (12) sed etiam haec inaequalitas

$$2\mu_1(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2) + \ldots + 2\mu_n(dx_n^2 + dy_n^2 + dz_n^2) \geq 0 \tag{15}$$

satisfacta esse debet pro quoquo vectore d e spatio tangentiali i.e. pro quoquo $d = (dx_1, \ldots, dz_n)$ aequationes (7),(8) explente. Eliminatis variabilibus $dy_1, \ldots, dy_n$ positisque $dx_1, \ldots, dx_n = 0$ restat

$$2\mu_1 dz_1^2 + \ldots + 2\mu_n dz_n^2 \geq 0 \tag{16}$$

pro omnibus $dz_1, \ldots, dz_n$ condicionem $dz_1 + \ldots + dz_n = 0$ explentibus. Seligendo $dz_i = 1, dz_j = -1, i \neq j$, $dz_k = 0$ pro omni k ab i, j differenti obtinetur

$$\mu_i + \mu_j > 0,\ i \neq j, \tag{17}$$

unde patet e valoribus $\mu_1, \ldots, \mu_n$ non plus quam unum negativum esse. Computando in fine determinantem formae quadraticae

$$2\mu_1(dz_2 + \ldots + dz_n)^2 + 2\mu_2 dz_2^2 + \ldots + 2\mu_n dz_n^2 \geq 0$$

obtinetur

$$\mu_2 \cdots \mu_n + \mu_1\mu_3 \cdots \mu_n + \mu_1 \cdots \mu_{n-1} = \mu_1 \cdots \mu_n(1/\mu_1 + \ldots + 1/\mu_n) \geq 0. \tag{18}$$

Hic duo casus distinguuntur:

(i) Omnes valores $\mu_1, \ldots, \mu_n$ positivi et, secundum (13), μ negativus. Quo lemma nostrum manifeste demonstratum sit.

(ii) Unus e valoribus $\mu_1, \ldots, \mu_n$, dico, μ_i negativus, inde μ positivus. E (12) manat

$$x_i > 0,\ x_j < 0, j \neq i,$$

unde obtinetur

$$x_i = l - x_1 - \ldots - x_{i-1} - x_{i+1} - \ldots - x_n$$

i.e. $x_i > l$. Tunc esset $d_i > l$, quod condicione (2) a nobis jam exclusum est. Itaque casus (ii) impossibilis lemmaque hoc demonstratum est.

Theorema 1 *Functio E multitudine M semper unico loco minima est. Locum minimi ex his aequationibus determinatur*

$$\frac{d_1}{\sqrt{1+\sigma_1^2 g^2/\mu^2}} + \ldots + \frac{d_n}{\sqrt{1+\sigma_n^2 g^2/\mu^2}} = l, \tag{19}$$

$$x_i = \frac{d_i}{\sqrt{1+\sigma_i^2 g^2/\mu^2}},\ i = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

$$y_i = \sigma_i g/\mu,\ \mu_i = -\sigma_i g/2\mu,\ i = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Insuper functio E in multiplicitate M^0 nulla alia minima localia habere potest.

Demonstratio. Cum propter Lemma 2. in omni puncto $v \in M^0$, in quo minimum saltem locale assumatur, valores $x_1, \ldots, x_n$ sint positivi, aequationes (20), (21) e (12), aequatio autem (19) e (4) manat. Denotando per $f(\mu^2)$ functionem in sinistra aequationis (19) apparentem elucet eam continuam esse atque in intervallo $[0, \infty)$ stricte crescere. Propter relationes

$$f(0) = 0,\ f(\infty) = d_1 + \ldots + d_n = D > l \tag{22}$$

aequatio (19) semper solvabilis eiusque radix semper unica esse debet. Cum minimum absolutum functionis E in multitudine M, ut supra dictum, semper in M^0 locum habere debeat, theorema hoc totum demonstratum est.

Annotationes 1 Cum locus minimi in plano x, y situs sit, manifeste est etiam catenam 'planam', quae semper in plano x, y manere constringatur, eodem loco idemque minimum assumere. Tunc vero accidere potest, quod etiam alia minima localia habeantur. Idem valeat, si una condicionum (2) omittatur. Una tamen quaestio a nobis insoluta manet. Non enim indagavimus, an in multitudine M' 'exceptionali' (si inveniatur) minimum locale assumi possit. Responsum hic negativum esse videtur.

Datis valoribus $l, m_1, \ldots m_n, d_1, \ldots, d_n$ et aequationis (19) radice μ in (20) et (21) substituta inde valores x_i, y_i immediate habentur. Posito

$$\mu_0^2 = \sigma_1^2 g^2/(D^2/l^2 - 1),$$

facillime tibi persuadebis inaequalitatem $f(\mu_0^2) > l$ valere. Itaque solutio numerica aequationis (19) per methodum illam eximiam bisectionis fieri potest, qua radix m passibus effectis in quodam intervallo longitudine

$$\mu_0^2/2^{-m}$$

includitur. (N.B. Cum valores x_i, y_i a constante g gravitatis certo non dependeant, semper $g = 1$ poni licet.)

Exempli gratia ponamus

$$n = 3,\ l = 2\,,$$

$$m_1 = m_2 = 1,\ m_3 = 0.5\,,$$

$$d_1 = d_2 = 1,\ d_3 = 0.5\,.$$

Jam ad solvendam aequationem (19) per methodum bisectionis opus est computatione automatica uti. Effectis 36 passibus includitur μ_0^2 intervallo

$$[2.84985562767, \quad 2.84985562787]$$

valores autem x_i, y_i, X_i, Y_i hi sunt

$$\begin{array}{lcll} x_1 & = & 0.64501635, & y_1 & = & -0.76416877 \\ x_2 & = & 0.86037782, & y_2 & = & -0.50965675 \\ x_3 & = & 0.49460583, & y_3 & = & -0.07324666 \\ \\ X_1 & = & 0.64501635, & Y_1 & = & -0.76416877 \\ X_2 & = & 1.50539417, & Y_2 & = & -1.27382552 \\ X_3 & = & 2.00000000, & Y_3 & = & -1.34707218 \end{array}$$

quo forma catenae plane determinata est.

Gratiarum actio. Sunt vero complures, quibus grati nos praebemus pro latinitate huius commentarioli emendata vel correcta, praecipue autem D-nae Margaritae Rennkamp, Gymnasii Mallinckrodtiensis Tremoniae, quae jam primordio textum totum visit ac multas utilesque emendationes suggessit.