

Über die ebene wirbelfreie Strömung durch eine poröse Oberfläche

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines Dr. rer. nat.

des Fachbereichs Mathematik

der Fernuniversität – Gesamthochschule – in Hagen

vorgelegt von

IVAN KEGLEVIC

aus Zagreb (Kroatien)

Hagen 1994

Eingereicht im Juli 1994

Tag der mündlichen Prüfung: 1. Dezember 1994

Prüfungsvorsitzender: Prof. Dr. D Pumplün

Erstgutachter und Mentor: Prof. Dr. K. Veselić, Fernuniversität Hagen

Zweitgutachter: Prof. Dr. L. v. Wolfersdorf, Bergakademie Freiberg

Prof. Dr. I. Aganović, Universität Zagreb

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Über die Linearität des Filtergesetzes	11
2.1 Einführung	11
2.2 Beispiele	20
2.3 Kurven mit der linearen Eigenschaft im \mathbf{R}^2	24
2.4 Nichtzusammenhängende und schneidende Kurven	29
3 Der stationäre Fall für die Gerade	31
3.1 Einführung	31
3.2 Fall I (Die ganze Gerade)	34
3.3 Fall II (Ein Teil der Geraden)	38
3.4 Der Fall $v_{\infty x} = 0$	47
3.4.1 Ein Teil der Geraden	47
3.4.2 Die ganze Gerade	50
4 Der stationäre Fall für den Kreis	53
4.1 Einführung	53
4.2 Die Eigenschaften des Operators H	57
4.3 Die Hilbert-Gleichung	62
4.4 Fall I (Der volle Kreis)	67
4.5 Fall II (Ein Teil des Kreises)	76
4.6 Beispiele	85
5 Der instationäre Fall für den Kreis	93
5.1 Einführung	93
5.2 Die Räume \mathcal{H}_r^σ , $\sigma \geq 0$	97
5.3 Die Lösung in $B(0, \infty; \mathcal{H}_r^\infty)$	101

5.4 Die Lösung in $B(0, \infty; \mathcal{H}^\sigma)$ für $\sigma \geq 1.5$	104
6 Der instationäre Fall für die Gerade	111
6.1 Einführung	111
6.2 Die Lösung in $B(0, \infty; H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}))$	114
7 Anhang	119
7.1 Stückweise glatte Flächen und stückweise Hölder-stetige Funktionen	119
7.2 Verschiedene Sobolevräume; der Spurensatz	121
7.2.1 Die Räume $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}$	121
7.2.2 Die Interpolation	122
7.2.3 Die Räume $H^s(\mathbf{R}^n)$, $s \in \mathbf{R}$	122
7.2.4 Die Räume $H^s(\Gamma)$	123
7.2.5 Die Räume $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$. Der Spurensatz	124
7.2.6 Die Räume $H_0^s(\Omega)$, $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$, $s < 0$	125
7.2.7 Die Räume $\Xi^s(\Omega)$ und $D_\Delta^s(\Omega)$	125
7.2.8 Der Raum $B(a, b; E)$	127
7.3 Das Dirichletsche Problem für die Laplacesche Gleichung	127
7.3.1 Ein beschränktes Gebiet Ω im \mathbf{R}^n	128
7.3.2 Die Halbebene im \mathbf{R}^2	129
7.4 Das Cauchysche Integral	131
7.5 Plemeljsche Formeln	133
7.6 Dominante Gleichung	138
7.7 Halbgruppen von Operatoren	141
Literaturverzeichnis	149
Abbildungsverzeichnis	153
Lebenslauf	154

Kapitel 1

Einleitung

Es ist ein inkompressibles Fluid gegeben, dessen Geschwindigkeitsfeld der Eulerschen Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

sowie den Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

und der Bedingung

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_\infty \quad (1.4)$$

genügt. Die Geschwindigkeit im Unendlichen \mathbf{v}_∞ sei von t unabhängig. Die Geschwindigkeit und der Druck hängen nicht von der z -Komponente ab, d.h. es gelte $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, y, t)$, $p = p(x, y, t)$, wobei $x, y \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$ gilt. Sei $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^2$ eine (geschlossene oder nicht geschlossene, beschränkte oder unbeschränkte) doppelpunktfreie stückweise glatte Kurve. Die Gültigkeit der Formeln (1.1), (1.2) und (1.3) sei auf $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ beschränkt. Es gelte

$$(\mathbf{v} \cdot \nu)_+ = (\mathbf{v} \cdot \nu)_- \quad (1.5)$$

und

$$(\mathbf{v} \cdot \nu)_\pm = \gamma(\mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+) \quad (1.6)$$

auf Γ , wobei ν die Normale der Kurve Γ , “+” und “−” zwei verschiedene Seiten von Γ und $\gamma : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$ eine Funktion sind.

Die Gleichungen (1.1) bis (1.4) beschreiben die Strömung eines idealen Fluids. Die Strömungsbedingung (1.5) ist eine Folgerung der Kontinuitätsbedingung. Die Funktion $\mathbf{v} \cdot \nu$ kann auch nur als ein schwacher Grenzwert (im Sinne der Spurensätze in LIONS-MAGENES [10]) und als verallgemeinerte Funktion aus $L^2(\Gamma)$ existieren. Genauer gesagt, die Gleichung (1.5) gilt in der Form

$$\int_M (\mathbf{v} \cdot \nu)_+ d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{M}} (\mathbf{v} \cdot \nu)_- d\mathbf{S} \quad (1.7)$$

für jede meßbare Menge $M \subseteq \Gamma$. Dies ist eigentlich die breiteste noch physikalisch vertretbare Interpretation der Kontinuitätsbedingung.

Die Gleichung (1.6) ist das Filtergesetz für Γ . Der Fall $\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ entspricht der vollkommenen Undurchlässigkeit von Γ in \mathbf{x} , d.h. das Fluid fließt in diesem Punkt nicht durch. Der Fall $\gamma(\mathbf{x}) = \infty$ dagegen entspricht der vollkommenen Durchlässigkeit in \mathbf{x} , d.h. in \mathbf{x} besteht kein Hindernis für die Strömung. Es wird vorausgesetzt, daß ein solches \mathbf{x} entweder ein isolierter Punkt ist (im Sinne, daß in einer Umgebung von \mathbf{x} $\gamma(\mathbf{y}) > \mathbf{0}$ für $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ gilt) oder daß zusätzlich

$$\mathbf{v}_+(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_-(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} : \gamma(\mathbf{x}) = \infty, \quad (1.8)$$

gilt, d.h. die Geschwindigkeit sei in solchen Punkten stetig. Um den mathematisch unpräzisen Fall $\gamma(\mathbf{x}) = \infty$ zu vermeiden, kann das Filtergesetz, falls $\gamma(\mathbf{x}) \geq \mathbf{c} > \mathbf{0}$, als

$$\delta(\mathbf{v} \cdot \nu) = \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+, \quad (1.9)$$

wobei $\delta = \gamma^{-1}$, oder ganz allgemein als

$$\gamma_1(\mathbf{v} \cdot \nu) = \gamma_2(\mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+), \quad (1.10)$$

gegeben werden, wobei $\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ und $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ ist. Die Wahl von γ_1, γ_2 ist natürlich nicht eindeutig, aber es gilt $\gamma_1(\mathbf{x}) + \gamma_2(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma$. Die Funktionen γ_1, γ_2 seien stückweise Hölder-stetig (siehe Anhang) und beschränkt. Es wird sowohl der stationäre als auch der instationäre Fall betrachtet. Im stationären Fall wird vorausgesetzt, daß das Druck- und Geschwindigkeitsfeld von t unabhängig sind. Im instationären Fall wird vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit im Zeitpunkt $t = 0$ gegeben ist und (1.2), (1.3) (1.4) und (1.5) genügt. Eine solche Strömung ist mit einer Funktion $h_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{v} \cdot \nu)_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ eindeutig bestimmt.

Dies alles können wir in ein formelles Problem zusammenfassen:

Problem 1.0.1 *Gegeben sind:*

Kurve $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$,

*$\gamma_1, \gamma_2 : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$: zwei beschränkte stückweise Hölder-stetige Funktionen,
 $h_0 \in L^2(\Gamma)$,*

$\rho > 0, \mathbf{v}_\infty \in \mathbf{R}^2$.

Gesucht wird das Paar (\mathbf{v}, \mathbf{p}) , $\mathbf{v} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^2$, $p : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (1.13)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_\infty, \quad t \geq 0, \quad (1.14)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nu)_+(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{v} \cdot \nu)_-(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (1.15)$$

$$\gamma_1(\mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \nu)_\pm(\mathbf{x}, t) = \gamma_2(\mathbf{x})(\mathbf{p}_-(\mathbf{x}, t) - \mathbf{p}_+(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{v}_+(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_-(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \operatorname{supp}(\gamma_1), \quad t \geq 0 \quad (1.17)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nu)_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{h}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (1.18)$$

Dieses Problem wird als Ausgangspunkt für weitere konkrete Probleme und Spezialfälle dienen.

Sehr oft werden Probleme mit sog. scharfen Punkten nicht oder gesondert betrachtet. Dies sind die Punkte auf Γ , wo Γ links von diesem Punkt vollkommen undurchlässig ist und rechts von ihm vollkommen durchlässig ist, oder umgekehrt. Hier ist die präzise Definition dieses Begriffs:

Definition 1.0.2 Es sei $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ eine doppelpunktfreie stückweise glatte Kurve und $\gamma_1, \gamma_2 : \Gamma \rightarrow [0, \infty)$ zwei stückweise Hölder-stetige Funktionen. Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ heißt ein scharfer Punkt, wenn jeweils mindestens einer von den zwei einseitigen Grenzwerten von γ_1 und γ_2 in \mathbf{x}_0 gleich Null ist.

Aus (1.13) folgt

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi \quad (1.19)$$

(mindestens lokal), welches zusammen mit (1.11) und (1.14) die Bernoullische Gleichung ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \frac{1}{\rho} \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{C}(\mathbf{t}). \quad (1.20)$$

Aus (1.12) und (1.19) folgt

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \quad (1.21)$$

und deswegen haben wir $\Phi(., t), \mathbf{v}(., t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma)$ für jedes $t > 0$.

Die Kurve Γ kann auf ein breiteres Γ_0 erweitert werden, indem man

$$\gamma_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0 \setminus \Gamma \quad (1.22)$$

setzt und die Bedingung (1.8) auf $\Gamma_0 \setminus \Gamma$ verlangt. Dadurch wird das ursprüngliche Problem nicht geändert (wegen des Satzes über analytische Fortsetzung, Satz 7.5.3). Damit können z.B. beim Betrachten des Problems, wenn Γ ein Kreis ist, auch die Teile dieses Kreises eingeschlossen werden.

Unter Berücksichtigung von (1.20) lautet das Filtergesetz (1.10)

$$\gamma_1(\mathbf{v} \cdot \nu) = \rho \gamma_2 \left(\mathbf{C}_- - \mathbf{C}_+ + \frac{1}{2} \mathbf{v}_+^2 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_-^2 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} (\Phi_+ - \Phi_-) \right). \quad (1.23)$$

Dies ist eine nichtlineare Gleichung. Ist aber Γ z.B. der Kreis $\partial K(0, 1)$, so können wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \mathbf{v}_\infty + \text{grad } \Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{t}), & |\mathbf{x}| < 1, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \mathbf{v}_\infty + \mathbf{Z} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) + \text{grad } \Phi_-(\mathbf{x}, \mathbf{t}), & |\mathbf{x}| > 1, \end{aligned} \quad (1.24)$$

wobei

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{-\mathbf{y}}{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}, \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2} \right), \quad (1.25)$$

gilt und Z eine Konstante (die Zirkulation) ist. Unter diesen Bedingungen kann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_+}{\partial \nu} &= -\frac{\partial \Phi_-}{\partial \nu} \\ \text{und} \\ \frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma} &= -\frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

wobei σ die Einheitstangente von $\partial K(0, 1)$ ist, auf dem Kreis gezeigt werden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma_1(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{v}_{\infty} \cdot \nu(\mathbf{x}) \right) &= \rho \gamma_2(\mathbf{x}) [\mathbf{C}_-(\mathbf{t}) - \mathbf{C}_+(\mathbf{t}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_+(\mathbf{x}) - \Phi_-(\mathbf{x})) + (2\mathbf{v}_{\infty} \cdot \sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{Z}) \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \frac{1}{2} \mathbf{Z} \right)], \end{aligned} \quad (1.27)$$

und diese Gleichung ist nun linear. Damit wird das Problem wesentlich vereinfacht. Die gleiche Überlegung gilt auch für jeden Kreis und jede Gerade. Wenn nur ein Teil eines Kreises oder ein Teil einer Geraden porös oder un durchlässig ist, setzen wir $\gamma_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ auf dem durchlässigen Teil des Kreises bzw. der Geraden und betrachten das Problem 1.0.1, wobei Γ ein ganzer Kreis bzw. eine ganze Gerade ist. Somit erhalten wir wiederum an dieser Stelle eine lineare Gleichung.

Die erste dem Autor bekannte Arbeit aus diesem Gebiet stammt von H. JA. BAJTSCHOROW. Er gibt in [1] die allgemeinen Grundlagen für das Problem, wenn Γ ein Kreiszylinder ist. Das Filtergesetz wird in ganz allgemeiner Form betrachtet:

$$p_- - p_+ = F(\mathbf{v} \cdot \nu, \lambda), \quad (1.28)$$

wobei F eine (allgemein nichtlineare) Funktion ist und λ ein Parameter ist, der vom Fluid selbst, der Geschwindigkeit im Unendlichen und den Dimensionen des Kreiszylinders abhängt. In seinen Arbeiten ist die Wirbelfreiheit der Strömung nur außerhalb des Zylinders vorausgesetzt, und innerhalb des Zylinders ist entweder die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit in der Innenseite des Zylinders Null oder der Druck an der Innenseite des Zylinders konstant. Das Problem ist in Form einer Integralgleichung gestellt. In [2] ist eine näherungsweise Lösung für das Filtergesetz in der Form

$$p_- - p_+ = \alpha + \beta \mathbf{v} \cdot \nu \quad (1.29)$$

bzw. in der Form

$$p_- - p_+ = \alpha \mathbf{v} \cdot \nu + \beta (\mathbf{v} \cdot \nu)^2 \quad (1.30)$$

gegeben, jedoch nur für genügend großes β .

Sir G. TAYLOR betrachtet in [18] das Problem, wobei Γ ein Winkel oder ein Konus oder wiederum ein Kreiszylinder ist. Das Verschwinden der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit auf einer Seite des Hindernisses ist wiederum vorausgesetzt. Das Filtergesetz wird in den Formen (1.29) und (1.30) mit $\alpha = 0$ aufgestellt. Er stellt das Problem in Form einer Integralgleichung dar und gibt im Fall (1.29) die explizite Lösung an. Seine Ergebnisse sind auch experimentell bestätigt.

E. WEGERT und L. v. WOLFERSDORF untersuchen in [19] das lineare Filtergesetz von H. JA. BAJTSCHOROW unter beiden genannten Voraussetzungen und geben jeweils einen allgemeinen Existenzsatz an. R. KÜHNAU gibt in [8] die expliziten Lösungen für diese zwei Probleme. In [22] wird das lineare Filtergesetz für den Kreiszylinder in der Form (1.6) von L. v. WOLFERSDORF betrachtet, wobei die Strömung innerhalb des Zylinders auch wirbelfrei ist (wie in dieser Arbeit). Dort wird eine explizite Formel für diesen Fall gefunden und ein Eindeutigkeitssatz für die allgemeine Form

$$\mathbf{v} \cdot \nu = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+) \quad (1.31)$$

des Filtergesetzes bewiesen. In [20] sind drei Existenzsätze für diesen allgemeinen Fall bewiesen.

A. MIKELIĆ, A. SUHADOLC und K. VESELIĆ betrachten in [12] die Strömung einer idealen Flüssigkeit über eine allgemeine abgeschlossene poröse Oberfläche im \mathbf{R}^2 und \mathbf{R}^3 mit dem Filtergesetz (1.6) unter der Voraussetzung $p_{ex} = 0$ und geben einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für genügend kleines γ an. Im Fall Γ ein Kreiszylinder ist die Existenz der Lösung für jedes γ bewiesen.

Der instationäre Fall für den Kreis in \mathbf{R}^2 ist von L. v. WOLFERSDORF in [23] untersucht worden. Für die wirbelfreie Strömung und $\gamma = Konst.$ in (1.6) ist ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz bewiesen. In REISSIG [17] ist für den allgemeinen Fall

$$\mathbf{v} \cdot \nu = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-) \quad (1.32)$$

ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz einer lokal (im Bezug zu Variable t) definierten Lösung bewiesen.

Die vorliegende Arbeit betrachtet das Problem 1.0.1. Sie gibt die Antwort auf die Frage, in welchen Fällen dieses Problem auf ein im wesentlichen lineares Problem reduziert werden kann: wenn Γ ein Kreis, ein Teil eines Kreises, eine Gerade oder ein Teil einer Geraden ist. Im stationären Fall (d.h. alles von t unabhängig) sind für Γ ein Teil eines Kreises, eine Gerade und ein Teil einer Geraden explizite Lösungen des Problems gefunden und ihre Eindeutigkeit bewiesen. Im allgemeinen (instationären) Fall ist für Γ ein Kreis, ein Teil eines Kreises und eine Gerade unter Voraussetzung, daß die stationäre Lösung existiert und Γ nirgendwo vollkommen undurchlässig ist, die Existenz und Eindeutigkeit einer in der Variable t stetigen und im Unendlichen beschränkten Lösung bewiesen.

In Kapitel 2 wird die Linearität des Problems betrachtet. Für die stückweise glatten Kurven Γ , die \mathbf{R}^2 in zwei offene Gebiete aufteilen wird eine Eigenschaft, hier als lineare Eigenschaft genannt, eingeführt, die das Problem linearisiert, und es wird gezeigt, daß diese Eigenschaft im \mathbf{R}^2 nur Kreise und Geraden besitzen. Im letzten Abschnitt werden auch andere Kurven betrachtet (die \mathbf{R}^2 in mehrere Gebiete aufteilen), und es wird ohne ausführlichen Beweis gezeigt, daß bei diesen Kurven das Problem nicht linear ist.

In Kapitel 3 wird der stationäre Fall, wobei Γ eine Gerade oder ein Teil einer Geraden ist, betrachtet. Im Fall einer ganzen porösen Geraden, wenn $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ einen Grenzwert im Unendlichen hat und die Geschwindigkeit im Unendlichen nicht senkrecht zu Γ steht, wird gezeigt, daß genau eine Lösung in einem Unterraum von $H_{loc}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma)$ existiert, und diese Lösung wird explizit angegeben. Im Fall, wenn nur ein Teil einer Geraden porös ist, wird bei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)} = 0 \quad (1.33)$$

das gleiche Ergebnis erreicht. Im Fall, wenn \mathbf{v}_∞ senkrecht zu Γ ist, wird auf die Formel von Keldysch und Sedow verwiesen.

In Kapitel 4 wird der stationäre Fall, wobei Γ ein Kreis oder ein Teil eines Kreises ist, betrachtet. Es wird wie bei den Geraden die Eindeutigkeit der Lösung in einem Unterraum von $H_{loc}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma)$ für jede gegebene Zirkulation um den Kreis bewiesen, wohingegen im Fall, daß Γ ein Teil einer Geraden ist, nur eine Lösung für genau eine Zirkulation existiert. Bei einem nirgendwo ganz durchlässigen Kreis wird für jede Zirkulation eine explizite Lösung gefunden. Diese Lösung ist nicht neu, sondern schon in WOLFERSDORF [22] gefunden, wurde aber vollständigkeitshalber auch hier noch einmal angegeben

und (mit einem anderen Beweis) bewiesen. In anderen Fällen wird bewiesen, für welche Zirkulationen eine Lösung existiert, und für diese Zirkulationen eine explizite Lösung angegeben.

Die instationären Fälle werden unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die poröse Kurve nirgendwo total undurchlässig ist, betrachtet. In Kapitel 5 betrachten wir den instationären Fall mit Γ ein Kreis oder ein Teil davon. Es wird die Existenz einer auf $t \in [0, \infty)$ beschränkten Lösung in $L^2_{loc}(\mathbf{R}^2)$ bewiesen. Im Fall eines nirgendwo total durchlässigen Kreises wird gezeigt, daß diese Lösung auch asymptotisch stabil ist und gegen die stationäre Lösung strebt. Es wird auch in Abhängigkeit von der Glattheit der Funktion $\delta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ die Existenz der Lösung in höheren Sobolevräumen bewiesen.

In Kapitel 6 wird der instationäre Fall bei einer porösen Geraden betrachtet. Die Fälle, wenn nur ein Teil der Geraden porös ist, werden nicht betrachtet. Genauso wie bei dem Kreis wird die Existenz einer auf $t \in [0, \infty)$ in $L^2_{loc}(\mathbf{R}^2)$ beschränkten Lösung bewiesen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Herren PROF. DR. I. AGANOVIĆ, DR. Z. DRMAČ, DR. D. KEIM, DR. E. PIETZSCH, DR. I. SLAPNIČAR, PROF. DR. K. VESELIĆ und DR. A. WIEGNER für geduldiges Zuhören und hilfreiche Diskussionen bei den zahlreichen Seminaren bedanken, in denen Teile dieser Arbeit vorgetragen wurden. Vielen Dank auch K. BRABENDER und DR. A. WIEGNER für die grammatische Korrektur dieses Textes. Mein besonderer Dank aber gilt Herrn PROF. DR. K. VESELIĆ für die Anregung zu dieser Arbeit, seine wertvollen Hinweise und seine ständige Bereitschaft zu kritischen Diskussionen.

Kapitel 2

Über die Linearität des Filtergesetzes

2.1 Einführung

Dieses Kapitel zeigt, wie unser allgemein nichtlineares Problem in bestimmten Fällen auf ein im wesentlichen lineares Problem reduziert wird. Wann diese Fälle auftreten, hängt allein von der Form der porösen Kurve Γ ab. Die Kurven, bei denen unser Problem linearisiert werden kann, nennen wir hier „Kurven mit der linearen Eigenschaft“. (Einige Hyperflächen im \mathbf{R}^n besitzen auch eine analoge Eigenschaft.) In diesem Abschnitt wird das Problem formell aufgestellt, seine Linearität betrachtet und Kurven bzw. Hyperflächen mit der linearen Eigenschaft präzise definiert. Im zweiten Abschnitt werden Beispiele von Kurven und Hyperflächen mit und ohne die lineare Eigenschaft angegeben. Im dritten Abschnitt wird bewiesen, daß Kurven mit der linearen Eigenschaft im \mathbf{R}^2 nur die Kreise und die Geraden bzw. deren Teile sind. Im ersten und dritten Abschnitt werden nur die Kurven oder Teile der Kurven betrachtet, die \mathbf{R}^2 in zwei offene zusammenhängende Gebiete aufteilen. Im vierten Abschnitt werden breitere Klassen von Kurven betrachtet (Kurven, die sich berühren oder schneiden, oder die \mathbf{R}^2 in mehrere Gebiete aufteilen) und ohne ausführlichen Beweis gezeigt, daß auch in anderen Fällen unser Problem nicht linear ist.

Dieses Kapitel gibt keinesfalls eine allgemeine Antwort auf die Frage, wann überhaupt unser Problem linearisiert werden kann. Diese Antwort ist schon deshalb nicht möglich, weil man sowieso nicht *alle* Methoden aufzählen

kann, die zur Linearisierung eines nichtlinearen Problems führen. Es führt lediglich eine Eigenschaft (hier als lineare Eigenschaft genannt) ein, die hinreichend für eine mögliche Linearisierung des Problems ist, und zeigt, daß nur Kreise, Geraden und deren Teile die einzigen Kurven im \mathbf{R}^2 sind, die diese Eigenschaft besitzen.

Wenn wir eine größere Kurve Γ_1 nehmen (d.h ein Γ_1 mit $\Gamma \subset \Gamma_1$) und setzen

$$\gamma_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \setminus \Gamma, \quad (2.1)$$

erhalten wir ein mit Problem 1.0.1 äquivalentes Problem. In der Tat, auf $\Gamma_1 \setminus \Gamma$ wird nun (1.15), (1.17) und $p_- - p_+ = 0$ verlangt, was schon im Problem 1.0.1 mit Γ erfüllt war, und es entfallen die Bedingungen (1.12) und (1.13), die wegen des Satzes 7.5.3 im neuen Problem (Problem 1.0.1 mit Γ_1) erfüllt sein müssen. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit Γ als eine doppelpunktfreie stückweise glatte Kurve annehmen, die \mathbf{R}^2 in zwei offene Gebiete \mathbf{R}_+^2 und \mathbf{R}_-^2 aufteilt.

Im Rest dieses Kapitels bezeichnen wir mit

Kurve eine doppelpunktfreie stückweise glatte Kurve und mit

Kurve Γ eine doppelpunktfreie stückweise glatte Kurve, die \mathbf{R}^2 in zwei offene Gebiete \mathbf{R}_+^2 und \mathbf{R}_-^2 aufteilt.

Man merke auch, daß eine beschränkte Kurve Γ geschlossen sein muß und eine unbeschränkte Kurve Γ homöomorph zu einer Geraden ist. Im Fall, daß Γ eine unbeschränkte Kurve ist, schreiben wir

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_\infty + \operatorname{grad} \Phi_+(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2, \\ \mathbf{v}_\infty + \operatorname{grad} \Phi_-(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbf{R}_-^2, \end{cases} \quad (2.2)$$

und im Fall, daß Γ eine beschränkte geschlossene Kurve ist, schreiben wir

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_\infty + \operatorname{grad} \Phi_+(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2, \\ \mathbf{v}_\infty + \mathbf{Z}(t)\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} \Phi_-(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbf{R}_-^2, \end{cases} \quad (2.3)$$

wobei \mathbf{v}_1 ein harmonisches Vektorfeld ist, das im Unendlichen verschwindet und dessen Normalkomponente auf Γ null ist. Die Existenz einer solchen Funktion ist im Hilfssatz 7.5.7 bewiesen. Die Funktion Z wird durch Zirkulation des Fluids um Γ bestimmt. Nun kann die Eulersche Gleichung durch die Bernoullische Gleichung

$$\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)^2}{2} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)}{\rho} = \mathbf{C}_\pm(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_\pm^2 \quad (2.4)$$

ersetzt werden. Das Einsetzen von (2.4) in das Filtergesetz (1.16) ergibt

$$\gamma_1(\mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \nu)(\mathbf{x}, t) = \rho \gamma_2(\mathbf{x})[\mathbf{C}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{v}_+(\mathbf{x}, t)^2 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_-(\mathbf{x}, t)^2 + \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_+(\mathbf{x}, t) - \Phi_-(\mathbf{x}, t))], \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.5)$$

wobei

$$C(t) = C_-(t) - C_+(t) \quad (2.6)$$

ist. Damit erhalten wir das Problem nur in Φ_+, Φ_- :

Problem 2.1.1 *Gegeben sind:*

Kurve Γ ,

$\gamma_1, \gamma_2 : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$: zwei beschränkte stückweise Hölder-stetige Funktionen,

$h_0 \in L^2(\Gamma)$,

$\rho > 0, \mathbf{v}_\infty \in \mathbf{R}^2$.

Gesucht wird das Tripel (Φ_+, Φ_-, C) , $\Phi_+ : \mathbf{R}_+^2 \cup \Gamma \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$, $\Phi_- : \mathbf{R}_-^2 \cup \Gamma \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$, $C : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \mathbf{R}_\pm^2, \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \operatorname{grad} \Phi_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \mathbf{0}, & t \geq 0, \\ \frac{\partial \Phi_+}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \frac{\partial \Phi_-}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \gamma_1 \left(\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{v}_\infty \cdot \nu \right) &= \rho \gamma_2(\mathbf{x}) [\mathbf{C}(\mathbf{t}) + \\ &+ (\mathbf{v}_\infty \cdot \sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right) + \\ &+ Z \frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \Phi_-(\mathbf{x}, \mathbf{t})) - \\ &- v_\infty \cdot \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{Z}(\mathbf{t}) - \frac{1}{2} \mathbf{Z}^2(\mathbf{t})] & \mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \\ \operatorname{grad} \Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \operatorname{grad} \Phi_-(\mathbf{x}, \mathbf{t}) & \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \operatorname{supp}(\gamma_1), \\ && t \geq 0, \\ \frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) &= \mathbf{h}_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dieses Problem ist äquivalent mit dem Problem 1.0.1. Gilt nun

$$\left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right)^2 = 0 \quad (2.8)$$

für jedes $\mathbf{x} \in \Gamma$ und jedes $t \geq 0$, so werden alle Gleichungen in Problem 2.1.1 linear. Dies tritt auf, wenn für jedes $\mathbf{x} \in \Gamma$ und jedes $t \geq 0$ entweder

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad (2.9)$$

oder

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = -\frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad (2.10)$$

gilt.

Für eine offene Menge Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(\otimes)$ die Menge aller harmonischen Funktionen auf Ω .

Satz 2.1.2 Wenn aus¹

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm} &\in C^1(\mathbf{R}_{\pm}^2 \cup \Gamma) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_{\pm}^2), \\ \frac{\partial \Phi_{\pm}}{\partial \nu}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \Phi_{\mp}}{\partial \nu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \operatorname{grad} \Phi_{\pm}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.11}$$

folgt

$$\left(\frac{\partial \Phi_{+}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_{-}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right)^2 = 0,\tag{2.12}$$

dann gilt auch

$$\left(\frac{\partial \Phi_{+}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right) + \left(\frac{\partial \Phi_{-}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right) = 0.\tag{2.13}$$

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe ein Paar (Φ_{1+}, Φ_{1-}) , $\Phi_{1\pm} \in C^1(\mathbf{R}_{\pm}^2 \cup \Gamma) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_{\pm}^2)$, das (2.11) erfüllt und für das (2.13) nicht überall auf Γ gilt. Es sei Γ_1 der Teil der Kurve Γ , wo (2.13) für (Φ_{1+}, Φ_{1-}) nicht erfüllt ist. Dann gilt

$$\left(\frac{\partial \Phi_{1+}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right) = \left(\frac{\partial \Phi_{1-}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right) \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1.\tag{2.14}$$

Da die Funktionen $\Phi_{1\pm}$ stetig differenzierbar sind, ist Γ_1 eine Menge, die einen glatten Bogen von positiver Länge enthält. Es sei nun (Φ_{2+}, Φ_{2-}) , $\Phi_{2\pm} \in C^1(\mathbf{R}_{\pm}^2 \cup \Gamma) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_{\pm}^2)$ ein beliebiges anderes Paar, das (2.11) erfüllt. Aus

$$\left(\frac{\partial(\Phi_{1+} + \Phi_{2+})}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right)^2 - \left(\frac{\partial(\Phi_{1-} + \Phi_{2-})}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right)^2 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,\tag{2.15}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_{2+}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_{2-}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right)^2 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma\tag{2.16}$$

und aus (2.14) folgt

$$\left(\frac{\partial \Phi_{2+}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right) = \left(\frac{\partial \Phi_{2-}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,\tag{2.17}$$

¹Unter $C^1(\mathbf{R}_{\pm}^2 \cup \Gamma) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_{\pm}^2)$ wird die Menge von Funktionen verstanden, die auf $\mathbf{R}_{\pm}^2 \cup \Gamma$ definiert sind, dort C^1 -Funktionen sind und deren Einschränkungen auf \mathbf{R}_{\pm}^2 harmonisch sind.

d.h. (2.17) ist dann für jedes Paar $\Phi_{2\pm}$ mit (2.11) erfüllt. Es sei nun Γ_2 ein beschränkter zusammenhängender und glatter Teil von Γ_1 mit der Länge größer als null, $z : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ eine glatte Parameterdarstellung von Γ_2 mit der Eigenschaft

$$|z'(\xi)| = 1, \quad \xi \in [a, b], \quad (2.18)$$

und $u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ eine Hölder-stetige Funktion mit den Eigenschaften

$$\int_a^b u(\xi) d\xi = 0 \quad (2.19)$$

und

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (2.20)$$

Ferner sei u nicht überall gleich null. Wir definieren zwei analytische Funktionen $\Psi_\pm : \mathbf{C}_\pm \rightarrow \mathbf{C}$ durch

$$\Psi_\pm(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{u(\eta) d\eta}{z(\eta) - q} \quad q \in \mathbf{C}_\pm, \quad (2.21)$$

und zwei harmonische Vektorfelder $\mathbf{w}_\pm : \mathbf{R}_\pm^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{w}_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\operatorname{Re} \Psi_\pm(\mathbf{x} + i\mathbf{y}), -\operatorname{Im} \Psi_\pm(\mathbf{x} + i\mathbf{y})). \quad (2.22)$$

Ist Γ unbeschränkt, so gibt es zwei harmonische Funktionen

$\Phi_+, \Phi_- : \mathbf{R}_\pm^2 \cup \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ mit

$$\operatorname{grad} \Phi_\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_\pm(\mathbf{x}), \quad (2.23)$$

weil die Gebiete \mathbf{R}_\pm^2 einfach zusammenhängend sind. Ist Γ beschränkt, so folgt aus Satz 7.5.12

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w}_-(\mathbf{x}) \cdot \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

und dies ist genügend für die Existenz zweier harmonischen Funktionen $\Phi_\pm : \mathbf{R}_\pm^2 \rightarrow \mathbf{R}$ mit (2.23). Da die Funktionen \mathbf{w}_\pm dem Raum $C(\mathbf{R}_\pm^2 \cup \Gamma)$ angehören, sind Φ_\pm in $C^1(\mathbf{R}_\pm^2 \cup \Gamma)$. Weil Γ_2 beschränkt ist, haben wir

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \Psi_\pm(q) = 0, \quad (2.25)$$

und daraus folgt

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \operatorname{grad} \Phi_\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Satz 7.5.12 ergibt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_{3+}(z(\xi)) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_{3-}(z(\xi)) = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta) z'(\xi) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right]. \quad (2.27)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_{3+}(z(\xi)) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_{3-}(z(\xi)) = u(\xi), \quad \xi \in [a, b], \quad (2.28)$$

was im Widerspruch zu (2.17) ist. Q.E.D.

Somit sind im \mathbf{R}^2 nur die Kurven interessant, wo (2.10) gilt. Wir führen nun die folgende Definition ein:

Definition 2.1.3 Sei $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$ eine doppelpunktfreie stetige stückweise glatte Hyperfläche, die \mathbf{R}^n in zwei offene Gebiete aufteilt, und $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ die Menge aller $\mathbf{x} \in \Gamma$, wo Γ glatt ist. Γ heißt Hyperfläche mit der linearen Eigenschaft, wenn für jedes Paar $\Phi_{\pm} \in C^1(\mathbf{R}_{\pm}^n \cup \Gamma_0) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_{\pm}^n)$ mit den Eigenschaften²

$$\lim_{\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty \\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_{\pm}^n}} \operatorname{grad} \Phi_{\pm}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ falls sinnvoll,} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_+(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_-(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.30)$$

wobei ν die Einheitsnormale von Γ in \mathbf{x} ist, gilt³

$$\operatorname{Grad} \Phi_+(\mathbf{x}) + \operatorname{Grad} \Phi_-(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.31)$$

Bemerkung 2.1.4 Im \mathbf{R}^2 sprechen wir über Kurven mit der linearen Eigenschaft und die Gleichung (2.31) gilt als

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_+(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_-(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.32)$$

wobei σ die Einheitstangente der Kurve Γ ist.

Bemerkung 2.1.5 Die Gleichungen (2.31) und (2.32) sind äquivalent mit

$$\Phi_+(\mathbf{x}) + \Phi_-(\mathbf{x}) = \mathbf{Kons.}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.33)$$

²Unter ‘falls sinnvoll’ wird ‘falls’ das Unendliche dem Raum \mathbf{R}_+^2 bzw. \mathbf{R}_-^2 angehört’ gemeint.

³ $\operatorname{Grad} \Phi_+$ ist der sog. Flächengradient, d.h. die Projektion des Gradienten auf die Tangentialebene von Γ . (Siehe MARTENSEN [11], §2.1.3.)

In der Definition der Kurven mit der linearen Eigenschaft sind nur die Funktionen aus $C^1(\mathbf{R}_\pm^n \cup \Gamma_0) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_\pm^n)$ erwähnt. Der folgende Satz besagt nun, daß diese Eigenschaft nicht nur für die stetig differenzierbaren Funktionen gilt. Einfachheitshalber ist der Satz nur für beschränkte geschlossene Kurven Γ bewiesen. Ein analoger Satz für die Geraden im \mathbf{R}^2 ist im Beispiel 2.2.2 angegeben. Die Räume $H^s(\Omega)$ und $D_\Delta^s(\Omega)$, wobei Ω eine offene Menge ist, sind in §7.2.5, §7.2.6 und §7.2.7 definiert.

Satz 2.1.6 *Sei $\Gamma \subset K(0, R) \subset \mathbf{R}^2$ eine beschränkte Kurve mit der linearen Eigenschaft und (Φ_+, Φ_-) ein Paar Funktionen mit⁴ $\Phi_+ \in H^s(\mathbf{R}_+^2) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_+^2)$, $\Phi_- \in H^s(\mathbf{R}_-^2 \cap \mathbf{K}(0, \mathbf{R})) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_-^2)$ für $s > 2$ bzw. mit $\Phi_+ \in D_\Delta^s(\mathbf{R}_+^2) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_+^2)$, $\Phi_- \in D_\Delta^s(\mathbf{R}_-^2 \cap \mathbf{K}(0, \mathbf{R})) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_-^2)$ für $0 \leq s \leq 2$, und*

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \operatorname{grad} \Phi_\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ falls sinnvoll.} \quad (2.34)$$

Gilt

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_-}{\partial \nu} \quad (2.35)$$

in $H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)$, wobei die Randwerte im Sinn von Satz 7.3.1 bzw. 7.3.3 genommen werden, so gilt auch

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma} \quad (2.36)$$

in $H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)$.

Beweis. In LIONS-MAGENES [10], Sätze II-5.4 und II-7.2, ist bewiesen, daß die Abbildung

$$\mathbb{P} : \Phi_\pm \longmapsto \left(\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \nu} \Big|_\Gamma, \Delta \Phi \right) \quad (2.37)$$

ein algebraischer und topologischer Isomorphismus von

$$H^s(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(0, \mathbf{R}))/\mathbf{R} \quad \text{bzw.} \quad D_\Delta^s(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(0, \mathbf{R}))/\mathbf{R} \quad (2.38)$$

in

$$H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{s-2}(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(0, \mathbf{R})) \cap \mathcal{N}(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(0, \mathbf{R})) \quad (2.39)$$

bzw.

$$H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \Xi^{s-2}(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(0, \mathbf{R})) \cap \mathcal{N}(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(0, \mathbf{R})) \quad (2.40)$$

⁴ \mathbf{R}_+^2 sei hier das Gebiet innerhalb der Kurve Γ .

ist, wobei

$$\mathcal{N}(\otimes) = Cl_{\mathcal{H}^{-\frac{3}{2}}(\partial\otimes) \times \dot{\div}^{-\epsilon}(\otimes)} \left\{ (\{\}, \{\}) \in \mathcal{H}'(\partial\otimes) \times \mathcal{H}'(\otimes)) : \right. \\ \left. \int_{\partial\Omega} f(s) ds = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} \quad (2.41)$$

ist. Die Urbilder von $H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \cap \mathcal{N}(-) \times \{I\}$ dieser Abbildungen, wobei

$$\mathcal{N}(-) = \mathcal{C}_{\mathcal{H}^{-\frac{3}{2}}(-)}^{\uparrow} \left\{ \square \in \mathcal{H}'(-) \mid \int_{\Gamma} \square(f) f = 0 \right\} \quad (2.42)$$

ist, sind genau $H^s(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{R})) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_\pm^2)$ bzw. $D_\Delta^s(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{R})) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_\pm^2)$. Es sei nun \mathbf{x}_0 ein Punkt innerhalb Γ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_+ &\longmapsto \Psi_+ \\ \frac{\partial \Psi_+}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_+}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_+}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi_+}{\partial x} \\ \Psi_+(\mathbf{x}_0) &= \Phi_+(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (2.43)$$

definiert einen (algebraischen und topologischen) Isomorphismus von $H^s(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{R})) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_\pm^2)$ in sich selbst. (Die Norm in diesem Raum sei von $H^s(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{R}))$ übernommen.) Die tangentiale Ableitung von Φ_+ auf Γ ist gleich der normalen Ableitung von Ψ_+ auf Γ . Damit ist bewiesen, daß die Abbildung

$$h_+ : \frac{\partial \Phi_+}{\partial \nu} \longmapsto \frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma} \iff \frac{\partial \Phi_+}{\partial \nu} \longmapsto \Phi_+ \longmapsto \Psi_+ \longmapsto \frac{\partial \Psi_+}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma} \quad (2.44)$$

(siehe (2.43)) ein algebraischer und topologischer Isomorphismus von $H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \cap \mathcal{N}(-)$ in sich selbst ist. Analog kann die gleiche Aussage für h_- mit Φ_- bewiesen werden. Da nun $h_+(u) = -h_-(u)$ auf einer dichten Teilmenge von $H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \cap \mathcal{N}(-)$ gilt, (genauer gesagt auf dem Bild von $C^1((\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{R})) \cup \Gamma)$, was eine dichte Teilmenge⁵ von $H^s(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{R})) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_\pm^2)$ bzw. $D_\Delta^s(\mathbf{R}_\pm^2 \cap \mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{R})) \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}_\pm^2)$ ist) und, da h_+ und h_- beschränkte Operatoren von $H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \cap \mathcal{N}(-)$ in sich selbst sind, gilt $h_+(u) = -h_-(u)$ auch in ganz $H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \cap \mathcal{N}(-)$. Q.E.D.

Wenn die poröse Oberfläche in einer Hyperfläche mit der linearen Eigenschaft enthalten ist, dann gilt (1.26) und die Gleichung (1.23) wird in diesem

⁵Diese Dictheit ist in LIONS-MAGENES [10], Satz I-9.3 bewiesen.

Falle im gewissen Sinne eine lineare Gleichung. Im Problem 2.1.1 setzen wir

$$f = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\mathbf{v}_\infty \cdot \nu) \quad \mathbf{f} : \Gamma \longrightarrow [\mathbf{0}, \infty] \quad (2.45)$$

und

$$g = \mathbf{v}_\infty \cdot \sigma \quad \mathbf{g} : \Gamma \longrightarrow [\mathbf{0}, \infty). \quad (2.46)$$

Ist Γ eine Kurve mit der linearen Eigenschaft, so ist Problem 2.1.1 im folgendem Sinne linear:

Ist $(\Phi_{1+}, \Phi_{1-}, C_1)$ die Lösung für (f_1, g) und $(\Phi_{2+}, \Phi_{2-}, C_2)$ die Lösung für (f_2, g) , so ist $(\lambda\Phi_{1+} + \mu\Phi_{2+}, \lambda\Phi_{1-} + \mu\Phi_{2-}, \lambda C_1 + \mu C_2)$ die Lösung für $(\lambda f_1 + \mu f_2, g)$.

Das Problem ist nicht „echt“ linear, da Φ_\pm und C_\pm nicht linear von Eingangsdaten $\rho, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \mathbf{v}_\infty$ abhängen. Ist im Problem 1.0.1 eine Kurve $\tilde{\Gamma}$ gegeben, die \mathbf{R}^2 nicht in zwei offene Gebiete aufteilt, (sondern $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ zusammenhängend ist), erhalten wir mit (2.1) ein äquivalentes Problem mit einer Kurve $\Gamma \supseteq \tilde{\Gamma}$, die \mathbf{R}^2 in zwei offene Gebiete aufteilt. Gibt es eine solche Kurve $\Gamma \supseteq \tilde{\Gamma}$, die die lineare Eigenschaft besitzt, so ist das Problem 1.0.1 mit $\tilde{\Gamma}$ insofern linear, daß es durch ein lineares Problem ersetzt werden kann.

2.2 Beispiele

Beispiel 2.2.1 *Der Kreis.*

Sei $\Gamma = \partial K(0, R)$ in \mathbf{R}^2 und $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^*$ die sogenannte Inversion

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{x}^2} \mathbf{x}. \quad (2.47)$$

Für ein gegebenes Paar Φ_+, Φ_- aus der Definition 2.1.3 definieren wir die Funktion $\tilde{\Phi}_+$ durch

$$\tilde{\Phi}_+(\mathbf{x}) = -\Phi_-(\mathbf{x}^*(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2. \quad (2.48)$$

Die Funktionen Φ_+ und $\tilde{\Phi}_+$ sind beide harmonisch und haben gleiche Normalableitungen auf $\partial K(0, R)$. Daraus folgt

$$\Phi_+(\mathbf{x}) = \tilde{\Phi}_+(\mathbf{x}) + \mathbf{c}, \quad (2.49)$$

wobei c eine Konstante ist. Da für das Paar $(\tilde{\Phi}_+, \Phi_-)$ die Gleichung (2.32) erfüllt ist, gilt sie auch für (Φ_+, Φ_-) . Somit ist gezeigt, daß jeder Kreis im \mathbf{R}^2 eine Kurve mit der linearen Eigenschaft ist.

Beispiel 2.2.2 Die Hyperebene.

Sei Γ eine Hyperebene im \mathbf{R}^n und $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ die Spiegelung an dieser Hyperebene. Genauso wie in Beispiel 2.2.1 definieren wir

$$\tilde{\Phi}_+(\mathbf{x}) = -\Phi_-(\mathbf{x}'(\mathbf{x})). \quad (2.50)$$

Die Funktionen Φ_+ und $\tilde{\Phi}_+$ sind wiederum beide harmonisch, haben auf Γ gleiche Normalableitungen, und ihre Gradienten verschwinden im Unendlichen. Daraus und aus Satz 7.3.5 folgt (2.49), und (2.31) gilt für (Φ_+, Φ_-) , weil es für $(\tilde{\Phi}_+, \Phi_-)$ gilt.

In Satz 2.1.6 ist bewiesen, daß die lineare Eigenschaft einer beschränkten Kurve Γ nicht nur für die Funktionen aus $C^1(\mathbf{R}_\pm^2 \cup \Gamma)$ gilt, sondern auf einige Sobolev Räume erweitert werden kann. Nun beweisen wir einen analogen Satz für eine Gerade in \mathbf{R}^2 .

Satz 2.2.3 Sei Γ die Gerade $y = 0$ im \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}_+^2 bzw. \mathbf{R}_-^2 das Gebiet oberhalb (unterhalb) dieser Geraden und $\Phi_\pm : \mathbf{R}_\pm^2 \cup \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ zwei harmonische Funktionen mit $\Phi_+ \in H_\phi^s(\mathbf{R}_+^2)$, $\Phi_- \in H_\phi^s(\mathbf{R}_-^2)$ für $s > \frac{3}{2}$ bzw. mit $\Phi_+ \in D_{\Delta\phi}^s(\mathbf{R}_+^2)$, $\Phi_- \in D_{\Delta\phi}^s(\mathbf{R}_-^2)$ für $0 \leq s \leq \frac{3}{2}$. Gilt

$$\lim_{\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty \\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_\pm^2}} \text{grad } \Phi_\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

und

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_-}{\partial y} \quad (2.52)$$

in $H_\phi^{s-\frac{3}{2}}(\mathbf{R})$, wobei die Randwerte wie in Satz 7.3.5 genommen werden, dann gilt auch

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_-}{\partial x} \quad (2.53)$$

in $H_\phi^{s-\frac{3}{2}}(\mathbf{R})$.

Beweis. Wir setzen $\Phi_\pm = \Psi_\pm \circ \mathbf{f}$, wobei \mathbf{f} aus (7.57) ist. Wir haben $\Psi_+ \in \mathcal{H}(\mathcal{K}(t, \infty))$, $\Psi_- \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(0, 1)})$, $\Psi_+ \in H^s(K(0, 1))$ und $\Psi_+ \in H^s(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)})$ für jedes $R > 1$. Wir wenden den Satz 2.1.6 auf die Funktionen Ψ_+ und Ψ_- an. Da die Abbildung \mathbf{f} eine konforme Abbildung ist, erhalten aus $\Phi_\pm = \Psi_\pm \circ \mathbf{f}$ die gewünschte Aussage. Q.E.D.

Beispiel 2.2.4 Das Quadrat.

Es sei

$$Q = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\} \quad (2.54)$$

ein Quadrat im \mathbf{R}^2 . Wir setzen

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}(x, y) = & 2(x+1) \arctan \frac{x+1}{y+1} - 2(x-1) \arctan \frac{x-1}{y+1} + \\ & + 2(y+1) \arctan \frac{y+1}{x+1} - 2(y-1) \arctan \frac{y-1}{x+1} + \\ & + 2(y+1) \arctan \frac{y+1}{x-1} - 2(y-1) \arctan \frac{y-1}{x-1} + \\ & + 2(x+1) \arctan \frac{x+1}{y-1} - 2(x-1) \arctan \frac{x-1}{y-1} + \\ & + (y+1) \ln \frac{(x-1)^2 + (y+1)^2}{(x+1)^2 + (y+1)^2} + (y-1) \ln \frac{(x+1)^2 + (y-1)^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \\ & + (x+1) \ln \frac{(x+1)^2 + (y+1)^2}{(x+1)^2 + (y-1)^2} + (x-1) \ln \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2}{(x-1)^2 + (y+1)^2} - \\ & - 2\pi \operatorname{sign}(y+1) - 2\pi \operatorname{sign}(y-1) - \\ & - 2\pi \operatorname{sign}(x+1) - 2\pi \operatorname{sign}(x-1). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Es gilt $\Phi_+ \in C^1(Q)$, $\Phi_- \in C^1(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{Q}})$, (2.29) und (2.30). Die Eigenschaft

$$\left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right) + \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) \right) = 0 \quad (2.56)$$

ist aber für kein $\mathbf{x} \in \partial \mathbf{Q}$ erfüllt. Damit ist das Quadrat keine Kurve mit der linearen Eigenschaft.

Beispiel 2.2.5 Die Kugel.

Es sei $K(0, R)$ eine Kugel im \mathbf{R}^3 . Wir setzen

$$\begin{aligned} \Phi_+(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{r}{R} \cos \vartheta, \\ \Phi_-(r, \vartheta, \varphi) &= -\frac{R^2}{2r^2} \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (2.57)$$

wobei (r, ϑ, φ) die sphärischen Koordinaten sind. Die Bedingungen $\Phi_+ \in C^1(K(0, R))$, $\Phi_- \in C^1(\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\mathbf{K}(0, R)})$, (2.29) und (2.30) sind erfüllt. Wir erhalten

$$\left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \vartheta}(R, \vartheta, \varphi) \right) + \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \vartheta}(R, \vartheta, \varphi) \right) = -\frac{1}{2} \sin \vartheta \neq 0, \quad (2.58)$$

für $\vartheta \neq 0, \pi$ und somit ist die Kugel keine Fläche mit der linearen Eigenschaft.

Beispiel 2.2.6 *Der Streifen.*

Es sei das poröse Gebiet im \mathbf{R}^2 innerhalb der zwei Geraden $y = 0$ und $y = 1$ enthalten. Hier wird \mathbf{R}^2 nicht in zwei, sondern in drei Gebiete aufgeteilt, und somit kann die Definition 2.1.3 nicht angewendet werden. Die Linearität kann analog wie folgt definiert werden: Es sei Ω_1 das Gebiet $y < 0$, Ω_2 das Gebiet $0 < y < 1$ und schließlich Ω_3 das Gebiet $y > 1$. Das Problem ist linear, wenn für jedes Tripel (Φ_1, Φ_2, Φ_3) , $\Phi_i \in C^1(\overline{\Omega}_i)$ harmonischer Funktionen mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \operatorname{grad} \Phi_i(\mathbf{x}) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x, 0) &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x, 0), \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x, 1) &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}(x, 1)\end{aligned}\tag{2.59}$$

gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, 0)\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, 0)\right)^2 &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, 1)\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}(x, 1)\right)^2 &= 0.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y) &= \frac{2xy}{(y-2)^2+x^2} + \frac{2x(y-1)}{(y-3)^2+x^2}, \\ \Phi_2(x, y) &= \frac{2xy}{(y+2)^2+x^2} + \frac{2x(y-1)}{(y-3)^2+x^2}, \\ \Phi_3(x, y) &= \frac{2xy}{(y+2)^2+x^2} + \frac{2x(y-1)}{(y+1)^2+x^2}.\end{aligned}\tag{2.61}$$

Die Bedingungen (2.60) sind erfüllt und (2.61) nicht. Somit ist das Problem in diesem Fall nicht linear.

Beispiel 2.2.7 *Der Kreisring.*

Es sei das poröse Gebiet im \mathbf{R}^2 innerhalb der zwei Kreisen $\partial K(0, 1)$ und $\partial K(0, 2)$ enthalten. Hier ist wiederum die Definition 2.1.3 nicht anwendbar. Wir definieren die Linearität auf folgende Weise: Es sei Ω_1 die Kreisscheibe $K(0, 1)$, Ω_2 der Kreisring $K(0, 2) \setminus \overline{K(0, 1)}$ und Ω_3 das Äußere des Außenkreises. Das Problem ist linear, wenn für jedes Tripel (Φ_1, Φ_2, Φ_3) , $\Phi_i \in C^1(\overline{\Omega}_i)$ harmonischer Funktionen mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \operatorname{grad} \Phi_3(\mathbf{x}) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(1, \varphi) &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(1, \varphi), \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(2, \varphi) &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}(2, \varphi)\end{aligned}\tag{2.62}$$

gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(1, \varphi) \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}(1, \varphi) \right)^2 &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}(2, \varphi) \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi}(2, \varphi) \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \varphi) &= 2r \cos \varphi, \\ \Phi_2(r, \varphi) &= r \cos \varphi - \frac{1}{r} \cos \varphi, \\ \Phi_3(r, \varphi) &= -\frac{9}{r} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Die Bedingungen (2.63) sind erfüllt und (2.64) nicht. Somit ist das Problem in diesem Fall nicht linear.

2.3 Kurven mit der linearen Eigenschaft im \mathbf{R}^2

In diesem Abschnitt beweisen wir, daß die Kurven mit der linearen Eigenschaft in \mathbf{R}^2 nur Kreise und Geraden sind. Wir können zwei Fälle unterscheiden:

1. Γ ist eine unbeschränkte Kurve (d.h. homöomorph zu einer Geraden) und
2. Γ ist eine beschränkte geschlossene Kurve (d.h. homöomorph zu einem Kreis).

Satz 2.3.1 *Die Geraden sind die einzigen stetigen unbeschränkten stückweise glatten Kurven im \mathbf{R}^2 mit der linearen Eigenschaft.*

Beweis. Aus Beispiel 2.2.2 folgt, daß alle Geraden Kurven mit der linearen Eigenschaft sind. Es genügt zu zeigen, daß es keine andere unbeschränkte Kurve mit der linearen Eigenschaft gibt. Sei Γ eine unbeschränkte Kurve mit der linearen Eigenschaft, mit dem glatten Teil Γ_0 und mit einer stetigen stückweise glatten Parameterdarstellung $z : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft

$$|z'(\xi)| = 1, \quad (2.65)$$

für jedes ξ aus \mathbf{R}_0 , der Menge aller $\xi \in \mathbf{R}$, wo z stetig differenzierbar ist. Für jedes u aus $C_0^\infty(\mathbf{R}_0)$ (der Menge aller reellwertigen u aus $C^\infty(\mathbf{R})$, die einen

kompakten Träger in \mathbf{R}_0 haben) definieren wir $\Psi_{\pm} : \mathbf{C}_{\pm} \rightarrow \mathbf{C}$ durch

$$\Psi_{\pm}(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)d\eta}{z(\eta) - q} \quad q \in \mathbf{C}_{\pm}, \quad (2.66)$$

dann zwei Vektorfelder $\mathbf{w}_{\pm} : \mathbf{R}_{\pm}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{w}_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^T(\operatorname{Re} \Psi_{\pm}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}), -\operatorname{Im} \Psi_{\pm}(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) \quad (2.67)$$

und schließlich zwei harmonische Funktionen $\Phi_{\pm} : \mathbf{R}_{\pm}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ durch:

$$\mathbf{w}_{\pm} = \operatorname{grad} \Phi_{\pm}. \quad (2.68)$$

Die Funktionen Φ_+ und Φ_- sind wohldefiniert, weil beide Mengen \mathbf{R}_+^2 und \mathbf{R}_-^2 einfach zusammenhängend sind. Alle diese Funktionen können auf Γ_0 stetig fortgesetzt werden. Satz 7.5.12 ergibt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_+(z(\xi)) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_-(z(\xi)) = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)z'(\xi)d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right]. \quad (2.69)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_{\pm}(z(\xi)) = \pm \frac{1}{2} u(\xi) + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)z'(\xi)d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right]. \quad (2.70)$$

Da wir eine Kurve mit der linearen Eigenschaft haben, muß

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_+(z(\xi)) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_-(z(\xi)) = 0, \quad (2.71)$$

gelten. Daraus folgt

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi i} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)z'(\xi)d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)z'(\xi)d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] = 0 \quad (2.72)$$

für jedes u aus $C_0^\infty(\mathbf{R}_0)$ und jedes ξ aus \mathbf{R}_0 . Das Lemma von Lagrange liefert

$$\operatorname{Im} \left[\frac{z'(\xi)}{z(\eta) - z(\xi)} \right] = 0 \quad (2.73)$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbf{R}_0$, $\xi \neq \eta$. Man merke, daß für die Funktion $\xi \mapsto pz(\xi) + q$, wobei $p, q \in \mathbf{C}$, $|p| = 1$ sind, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[\frac{(pz+q)'(\xi)}{(pz+q)(\eta) - (pz+q)(\xi)} \right] &= \operatorname{Im} \left[\frac{z'(\xi)}{z(\eta) - z(\xi)} \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

d.h. $pz + q$ erfüllt die Bedingung (2.73). Unter den stetigen Funktionen $z : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft

$$|z'(\xi)| = 1 \text{ f.ü.} \quad (2.75)$$

führen wir die Äquivalenzrelation

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbf{C}, |p| = 1, \mathbf{z}_2 = p\mathbf{z}_1 + \mathbf{q} \quad (2.76)$$

ein, und aus jeder Äquivalenzklasse wählen wir den Vertreter mit den Eigenschaften

$$z_0(0) = 0, \quad z'_0(0) = 1 \quad (2.77)$$

aus. Wir setzen $\xi = 0$ in Gleichung (2.73) und erhalten

$$\operatorname{Im} \left[\frac{1}{z_0(\eta)} \right] = 0. \quad (2.78)$$

Daraus folgt $\operatorname{Im} z_0 = 0$, d.h. z_0 ist die reelle Achse. Wir gehen nun zurück zu (2.76) und betrachten die ganze Äquivalenzklasse, deren Vertreter z_0 ist. Durch $pz_0 + q$, $p, q \in \mathbf{C}$, $|p| = 1$, erhält man alle Geraden aus \mathbf{C} . Somit können unbeschränkte Kurven mit der linearen Eigenschaft nur die Geraden sein. Q.E.D.

Dieser Beweis kann nicht auf beschränkte Kurven Γ angewendet werden, da die Existenz der Funktionen Φ_{\pm} in (2.68) nicht klar ist. In der Tat ist eine analoge Konstruktion der Funktionen Φ_{\pm} in (2.68) bei einer beschränkten Kurve Γ mit den Funktionen Ψ und \mathbf{w} in (2.66) und (2.67) nur bei $u \in C^{\infty}(M)$ mit

$$\int_M u(\xi) d\xi = 0 \quad (2.79)$$

möglich. Mit einer solchen Menge der Funktionen ist die direkte Anwendung des Lemmas von Lagrange in (2.72) nicht möglich.

Satz 2.3.2 *Die Kreise sind die einzigen beschränkten stetigen stückweise glatten Kurven im \mathbf{R}^2 mit der linearen Eigenschaft.*

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis zu Satz 2.3.1. Aus Beispiel 2.2.1 folgt, daß alle Kreise Kurven mit der linearen Eigenschaft sind. Sei Γ eine beschränkte Kurve mit der linearen Eigenschaft, \mathbf{R}_+^2 das Gebiet

innerhalb Γ und $z : M = [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ eine stetige, stückweise glatte Parameterdarstellung von Γ mit

$$|z'(\xi)| = 1, \quad (2.80)$$

für jedes ξ aus $M_0 \subseteq M$, der Menge aller $\xi \in M$, wo z stetig differenzierbar ist. Sei auch $\Gamma_0 = z(M_0)$. Für jedes u aus $C_0^\infty(M_0)$ (der Menge aller Funktionen, die einen kompakten Träger in M_0 haben) mit der Eigenschaft

$$\int_a^b u(\eta) d\eta = 0 \quad (2.81)$$

definieren wir $\Psi_\pm : \mathbf{C}_\pm \rightarrow \mathbf{C}$:

$$\Psi_\pm(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{u(\eta) d\eta}{z(\eta) - q}, \quad q \in \mathbf{C}_\pm, \quad (2.82)$$

und zwei harmonische Vektorfelder $\mathbf{w}_\pm : \mathbf{R}_\pm^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{w}_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\operatorname{Re} \Psi_\pm(\mathbf{x} + i\mathbf{y}), -\operatorname{Im} \Psi_\pm(\mathbf{x} + i\mathbf{y})). \quad (2.83)$$

Aus Satz 7.5.12 folgt

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w}_-(\mathbf{x}) \cdot \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.84)$$

und dies liefert die Existenz zweier harmonischen Funktionen $\Phi_\pm : \mathbf{R}_\pm^2 \rightarrow \mathbf{R}$ mit

$$\mathbf{w}_\pm = \operatorname{grad} \Phi_\pm. \quad (2.85)$$

Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_+(z(\xi)) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_-(z(\xi)) = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} V.P. \int_a^b \frac{u(\eta) z'(\xi) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] \quad (2.86)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_\pm(z(\xi)) = \pm \frac{1}{2} u(\xi) + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} V.P. \int_a^b \frac{u(\eta) z'(\xi) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] \quad (2.87)$$

(siehe Satz 7.5.12). Die lineare Eigenschaft von Γ impliziert

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_+(z(\xi)) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_-(z(\xi)) = 0. \quad (2.88)$$

Dies ergibt

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi i} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)z'(\xi)d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)z'(\xi)d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] = 0 \quad (2.89)$$

für jedes u aus $C_0^\infty(M_0)$ mit (2.81) und jedes ξ aus M_0 . Jedes w aus $C^\infty(\Gamma)$ können wir in folgender Form schreiben

$$w(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b w(\eta)d\eta + w_1(\xi), \quad (2.90)$$

und w_1 genügt

$$\int_a^b w_1(\eta)d\eta = 0. \quad (2.91)$$

Dann ergibt sich für jedes w aus $C^\infty(\Gamma)$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \left[V.P. \int_a^b \frac{z'(\xi)w(\eta)}{z(\eta) - z(\xi)} d\eta \right] = \\ &= \operatorname{Im} \left[V.P. \int_a^b \frac{z'(\xi) \frac{1}{b-a} \int_a^b w(\zeta)d\zeta}{z(\eta) - z(\xi)} d\eta + V.P. \int_a^b \frac{z'(\xi)w_1(\eta)}{z(\eta) - z(\xi)} d\eta \right]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Da das letzte Integral verschwindet, können wir schließen

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[V.P. \int_a^b \frac{z'(\xi)w(\eta)}{z(\eta) - z(\xi)} d\eta \right] &= \operatorname{Im} \left[V.P. \int_a^b z'(\xi) \frac{1}{b-a} \int_a^b w(\zeta)d\zeta \cdot \int_a^b \frac{d\zeta}{z(\zeta) - z(\xi)} \right] \\ &= f(\xi) \int_a^b w(\zeta)d\zeta, \end{aligned} \quad (2.93)$$

für jedes w aus $C^\infty(M)$, wobei f eine von w und η unabhängige Konstante ist. Das Lemma von Lagrange liefert

$$\operatorname{Im} \left[\frac{z'(\xi)}{z(\eta) - z(\xi)} - if_z(\xi) \right] = 0 \quad (2.94)$$

für jede Wahl von $\xi, \eta \in M_0$, $\xi \neq \eta$. Weiter gehen wir wie im Beweis von Satz 2.3.1 vor. Für die Funktion $pz(\xi) + q$, wobei $p, q \in \mathbf{C}$, $|p| = 1$ sind, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[\frac{(pz+q)'(\xi)}{(pz+q)(\eta) - (pz+q)(\xi)} - if_z(\xi) \right] &= \operatorname{Im} \left[\frac{z'(\xi)}{z(\eta) - z(\xi)} - f_z(\xi) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.95)$$

d.h. $pz + q$ erfüllt auch die Bedingung (2.94) mit demselben f_z . Unter den Funktionen $z : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft

$$|z'(\xi)| = 1 \quad \text{f.ü.} \quad (2.96)$$

führen wir die Äquivalenzrelation

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbf{C}, |p| = 1, \mathbf{z}_2 = p\mathbf{z}_1 + \mathbf{q} \quad (2.97)$$

ein, und aus jeder Äquivalenzklasse wählen wir den Vertreter mit den Eigenschaften

$$z_0(0) = 0, \quad z'_0(0) = 1 \quad (2.98)$$

aus. Wir setzen $\xi = 0$ in Gleichung (2.94) und erhalten

$$\operatorname{Im} \left[\frac{1}{z_0(\eta)} \right] = f_z(0) = \text{Konst.}, \quad (2.99)$$

d.h. $\frac{1}{z_0}$ ist eine Gerade parallel zur reellen Achse. Dann ist z_0 entweder ein Kreis, der durch den Ursprung des Koordinatensystems läuft, oder die reelle Achse. Die letzte Möglichkeit entfällt, weil die reelle Achse eine unbeschränkte Kurve ist. Alle beschränkten Kurven mit der linearen Eigenschaft sind nun mit $pz_0 + q$, $p, q \in \mathbf{C}$, $|p| = 1$, gegeben, wobei z_0 ein Kreis ist, der durch den Ursprung des Koordinatensystems läuft. Dies sind nur die Kreise, d.h. die Kreise sind die einzigen beschränkten Kurven im \mathbf{R}^2 mit der linearen Eigenschaft. Q.E.D.

2.4 Nichtzusammenhängende Kurven und Kurven, die sich selbst berühren oder schneiden

Bisher wurden bis auf zwei Beispiele in §2.2 nur einfach zusammenhängende Kurven Γ , die sich weder selbst schneiden noch berühren und die \mathbf{R}^2 in zwei offene Gebiete aufteilen, oder deren Teile betrachtet. Es bleibt noch das Problem mit porösen Kurven, die \mathbf{R}^2 in mehrere Gebiete aufteilen. Wir beschränken uns hier einfacheitshalber nur an die Kurven, die \mathbf{R}^2 in endlich viele offene Gebiete $\mathbf{R}_1^2, \mathbf{R}_2^2, \dots, \mathbf{R}_n^2$ aufteilen. Die Linearität des Problems kann wie folgt definiert werden: Für jede in $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ harmonische Funktion

Φ , deren Gradient im Unendlichen verschwindet und deren Einschränkungen auf \mathbf{R}_i^2 zusammen mit der ersten Ableitungen von Φ stetig fortsetzbar auf $\overline{\mathbf{R}_i^2}$ sind, gilt: Aus

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_-}{\partial \nu} \quad (2.100)$$

auf ganz Γ folgt

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \Phi_-}{\partial \sigma} \quad (2.101)$$

auf ganz Γ , wobei + und – zwei verschiedene Seiten von Γ sind. Es ist offensichtlich, daß jeder Teil von Γ , der z.B. \mathbf{R}^2 nur in zwei Gebiete aufteilt, die lineare Eigenschaft besitzen soll. Dies ist darin begründet, daß die Menge aller Φ , die (2.100) nur auf einem Teil von Γ erfüllen und sonst harmonisch sind, eine Teilmenge von der ursprünglichen Menge der Funktionen Φ ist. Somit müßte Γ nur aus Kreisen und Geraden oder deren Teilen entstehen. Genauso wie in den Beispielen 2.2.6 und 2.2.7 kann auch in anderen Kombinationen (zwei Geraden, die sich schneiden, ein Kreis und eine Gerade oder zwei Kreise, die sich schneiden oder nicht schneiden) gezeigt werden, daß in diesen Fällen das Problem nicht linear ist. Nun können wir als allgemeine Tatsache annehmen, daß das Problem linear ist, nur wenn Γ ein Kreis, eine Gerade, ein Teil eines Kreises oder ein Teil einer Geraden ist.

Kapitel 3

Der stationäre Fall für die Gerade

3.1 Einführung

Dieses Kapitel betrachtet den stationären Fall, wenn die poröse Linie in einer Geraden Γ enthalten ist. Zunächst wird im zweiten Abschnitt der Fall behandelt, daß die ganze Gerade Γ poröse oder undurchlässig ist. Unter Einschränkung, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)} = d < \infty \quad (3.1)$$

gilt, daß es keine scharfen Punkte auf der Geraden Γ gibt und daß die Geschwindigkeit im Unendlichen nicht senkrecht zu Γ steht, wird eine Lösung explizit angegeben und ihre Eindeutigkeit bewiesen. Im dritten Abschnitt wird der Fall betrachtet, wenn nur ein Teil von Γ porös oder undurchlässig ist. In diesem Fall wird unter Einschränkung, daß

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)} = 0 \quad (3.2)$$

gilt, daß es wiederum keine scharfen Punkte auf Γ gibt und daß die Geschwindigkeit im Unendlichen nicht senkrecht zu Γ steht, wiederum eine Lösung angegeben und ihre Eindeutigkeit bewiesen. Wenn der poröse und der undurchlässige Teil der Geraden beschränkt sind, erhalten wir nur eine Lösung mit einer bestimmten Zirkulation. Wenn wir auf einem beschränkten Teil von Γ γ_2 gegen null streben lassen (d.h. die Strecke wird immer undurchlässiger),

erhalten wir die durch die Formel von Keldysch und Sedow gegebene Lösung, wobei die Zirkulation so gewählt wurde, daß die Tschaplyginsche Bedingung¹ nur auf einem (immer linken oder immer rechten) Ende des Hindernisses erfüllt ist. Im letzten Abschnitt wird der Fall, daß die Geschwindigkeit senkrecht zu Γ steht, betrachtet. Hierbei gibt es entweder keine oder mehrere gleichwertige Lösungen, und somit hat sich die Aufstellung einer Existenz-Eindeutigkeitstheorie als unmöglich erwiesen. Ergänzend zeigen die in diesem Fall existierenden Lösungen eine physikalisch unvertretbare Eigenschaft, daß das Fluid nicht durch sondern um das Hindernis fließt.

Wir wählen das Koordinatensystem so, daß die poröse Gerade die Gerade $y = 0$ ist. Im Problem 1.0.1 ist also Γ die Gerade $y = 0$, und die Abhängigkeit von t entfällt. Damit entfällt auch die Anfangsbedingung (1.18), da sie nun keinen Sinn hat. Die Halbebene $y > 0$ nennen wir hier \mathbf{R}_+^2 , die Halbebene $y < 0$ \mathbf{R}_-^2 und die Gerade $y = 0$ nennen wir \mathbf{R} . Diese Gerade wird hier mit der Menge der reellen Zahlen identifiziert. Anstatt $\gamma_1(\mathbf{x}), \gamma_2(\mathbf{x})$ schreiben wir $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$ mit der Identifikation $x = (x, 0) = \mathbf{x}$. Die Eulersche Gleichung im Problem 1.0.1 kann durch die Bernoullische Gleichung

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_{\pm} \quad (3.3)$$

ersetzt werden. Die Gleichung (1.16) lautet somit

$$\gamma_1(x)v_y(x) = \frac{1}{2}\rho\gamma_2(x)(4C + \mathbf{v}_+(\mathbf{x})^2 - \mathbf{v}_-(\mathbf{x})^2), \quad (3.4)$$

wobei

$$C = \frac{1}{2}(C_- - C_+) \quad (3.5)$$

ist. Nun taucht der Druck p nur in der Bernoullischen Gleichung auf. Diese Gleichung dient nur als Bestimmungsgleichung für p und die Geschwindigkeit des Fluids soll aus den anderen Gleichungen im Problem ermittelt werden. Die Grenzwerte der Geschwindigkeitskomponenten werden im Sinn des Satzes 7.3.5 in $D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_{\pm}^2)$ bzw. in $H_{\phi}^0(\mathbf{R})$ genommen (siehe §7.3.2). Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $\text{supp } \gamma_1 = \mathbf{R}$, d.h. die ganze Gerade ist entweder porös oder undurchlässig.
2. $\text{supp } \gamma_1 \neq \mathbf{R}$, d.h. nur ein Teil der Geraden ist porös oder undurchlässig,

¹auch Kuttasche oder Kutta-Joukowskische Abflußbedingung genannt

Im ersten Fall brauchen wir wegen $\text{supp } \gamma_1 = \mathbf{R} = \Gamma$ die Stetigkeit der Geschwindigkeit auf $\Gamma \setminus \text{supp } \gamma_1$ nicht zu verlangen, da diese Menge leer ist. Es taucht aber im Filtergesetz die Konstante C auf, die nicht zu den Eingangsdaten gehört, sondern auch zu bestimmen ist.² Nun haben wir die Geschwindigkeit des Fluids und die Konstante C aus der Lösung des folgenden Problems zu suchen:

Problem 3.1.1 *Es seien $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ zwei nicht negative stückweise Hölder-stetige Funktionen mit $\gamma_1(x) + \gamma_2(x) > 0$, $\text{supp } \gamma_1 = \mathbf{R}$; $\rho > 0$ und $\mathbf{v}_\infty \in \mathbf{R}^2$. Gesucht wird das Paar (\mathbf{v}, \mathbf{C}) , $\mathbf{v} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $v_x, v_y \in D_{\Delta_\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap D_{\Delta_\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$, $C \in \mathbf{R}$, das*

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}, \quad (3.6)$$

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}, \quad (3.7)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_\infty = (\mathbf{v}_{\infty x}, \mathbf{v}_{\infty y}), \quad (3.8)$$

$$v_{y+} = v_{y-}, \quad \text{in } H_\phi^0(\mathbf{R}) \quad (3.9)$$

und

$$\gamma_1 v_y = \frac{1}{2} \rho \gamma_2 \left(4C + \mathbf{v}_+^2 - \mathbf{v}_-^2 \right), \quad \text{in } H_\phi^0(\mathbf{R}) \quad (3.10)$$

genügt.

Im zweiten Fall muß die Geschwindigkeit auf dem durchlässigen Teil der Geraden stetig sein. Daraus folgt

$$C = \frac{1}{2}(C_- - C_+) = 0. \quad (3.11)$$

Die Geschwindigkeit des Fluids soll dann aus dem folgenden Problem bestimmt werden:

Problem 3.1.2 *Es seien $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ zwei nicht negative stückweise Hölder-stetige Funktionen mit $\gamma_1(x) + \gamma_2(x) > 0$, $\rho > 0$, $\mathbf{v}_\infty \in \mathbf{R}^2$ und*

$$\mathbf{S} = \text{supp } \gamma_1 \subset \mathbf{R}. \quad (3.12)$$

²Es wäre auch sinnvoll, das Problem mit der Konstante C als einem freien Parameter zu betrachten. Da sich aber herausgestellt hat, daß eine Lösung des Problems nur für ein bestimmtes C existiert, haben wir uns für diese Form der Problemaufstellung entschieden.

Gesucht wird die Funktion $\mathbf{v} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ mit $v_x, v_y \in D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$, die

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S}, \quad (3.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S}, \quad (3.14)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_\infty = (\mathbf{v}_{\infty x}, \mathbf{v}_{\infty y}), \quad (3.15)$$

$$v_{y+} = v_{y-}, \quad \text{in } H_\phi^0(\mathbf{R}) \quad (3.16)$$

und

$$\gamma_1 v_y = \frac{1}{2} \rho \gamma_2 (\mathbf{v}_+^2 - \mathbf{v}_-^2), \quad \text{in } H_\phi^0(\mathbf{R}) \quad (3.17)$$

genügt.

Gilt $v_{\infty x} \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$ in einer Umgebung vom Unendlichen, ist $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ Hölder stetig im Unendlichen und gibt es keinen scharfen Punkt auf der Geraden Γ , so wird jeweils eine Lösung der beiden Probleme explizit angegeben und die Eindeutigkeit der Lösung in $D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$ bewiesen. Der Fall $v_{\infty x} = 0$ wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels betrachtet. Hier wird auf die Formel von Keldysch und Sedow verwiesen.

3.2 Fall I (Die ganze Gerade)

In diesem Abschnitt betrachten wir das Problem 3.1.1. Hier ist das Gebiet der idealen Strömung nicht zusammenhängend. Es taucht daher im Problem 3.1.1 die Konstante C auf, die die Differenz der Bernoullischen Konstanten in den beiden Gebieten ist. Die Lösung wird explizit durch eine Formel angegeben. Diese Formel wurde auf folgende Weise gefunden: Zunächst wurde das Problem auf eine singuläre Integralgleichung auf der Geraden reduziert, dann ist die explizite Lösung dieser Gleichung aus GACHOV [4] genommen, und die Lösung wurde mit Hilfe einiger Sätze in PICHTEEV [16] vereinfacht. Dieser Vorgang wird hier nicht durchgeführt, sondern es wird bewiesen, daß die angegebene Formel die Lösung ist. Es werden die Eigenschaften der Lösung betrachtet, und die Eindeutigkeit der Lösung wird bewiesen.

Satz 3.2.1 Das Problem 3.1.1 hat höchstens eine Lösung.

Beweis. Es seien (\mathbf{v}_1, C_1) und (\mathbf{v}_2, C_2) zwei Lösungen des Problems 3.1.1 und (\mathbf{v}, \mathbf{C}) , $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $C = C_1 - C_2$ ihre Differenz. Es gilt $v_x, v_y \in D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap \mathbf{D}_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$. Die Funktion \mathbf{v} genügt (3.6), (3.7), (3.9),

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

und

$$\gamma_1 v_y = \frac{1}{2} \rho \gamma_2 \left(4C + \mathbf{v}_{1+}^2 - \mathbf{v}_{1-}^2 - \mathbf{v}_{2+}^2 + \mathbf{v}_{2-}^2 \right) \quad (3.19)$$

in $H_\phi^0(\mathbf{R})$. Die lineare Eigenschaft der Geraden und (3.16) reduzieren die letzte Gleichung auf

$$\gamma_1(x) v_y(x) = 2\rho \gamma_2(x) (C + v_{\infty x} v_{x+}(x)). \quad (3.20)$$

Die Funktion

$$g(x + iy) = v_x(x, y) - iv_y(x, y) \quad (3.21)$$

ist auf $\mathbf{C} \setminus \mathbf{S}$ analytisch. Die Funktion

$$h(z) = q(z)g(z) = \left(e^{-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau-z} d\tau} + i \frac{C}{v_{\infty x}} \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z) \right) g(z) \quad (3.22)$$

ist somit auch analytisch. Die reellen und imaginären Teile der Funktionen q und g gehören zum Raum $D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap \mathbf{D}_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$. Ihre Grenzwerte, im Sinn des Satzes 7.3.5 angenommen, gehören zu $H_\phi^0(\mathbf{R})$. Aus (3.20) folgt

$$\operatorname{Re} [q(x + 0i) \cdot g(x + 0i)] = 0. \quad (3.23)$$

Dies zusammen mit Satz 7.3.7 ergibt $\operatorname{Re} h = 0$. Daraus folgt nun $\operatorname{Im} h = \text{Konst}$. Die Beschränktheit von q und das Verschwinden von g im Unendlichen liefern $\operatorname{Im} h = 0$. Daraus folgt nun $g = 0$, da q nirgendwo null ist, und dies liefert $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Q.E.D.

Satz 3.2.2 Ist $v_{\infty x} \neq 0$, $\gamma_2(x) \neq 0$ in einer Umgebung vom Unendlichen, die Funktion $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ Hölder-stetig im Unendlichen, gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)} = d < \infty \quad (3.24)$$

und gibt es keinen Punkt $x_0 \in \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \gamma_1(x_0+) &= 0, & \gamma_2(x_0-) &= 0 & \text{falls } v_{\infty x} > 0, \\ \gamma_1(x_0-) &= 0, & \gamma_2(x_0+) &= 0 & \text{falls } v_{\infty x} < 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

so ist die Lösung des Problems 3.1.1 durch

$$\begin{aligned} C &= v_{\infty x} v_{\infty y} \tan f(\infty) = \frac{v_{\infty y} \gamma_1(\infty)}{2\rho \gamma_2(\infty)} \\ v_x(x, y) &= v_{\infty x} + \frac{v_{\infty y}}{\cos f(\infty)} \operatorname{Im} e^{\frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x - iy} d\tau} - \frac{C}{v_{\infty x}} \operatorname{sign} y, \\ v_y(x, y) &= \frac{v_{\infty y}}{\cos f(\infty)} \operatorname{Re} e^{\frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x - iy} d\tau}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

gegeben, wobei

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \left(\frac{\gamma_1(x)}{2\rho v_{\infty x} \gamma_2(x)} \right) & \gamma_2(x) \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} v_{\infty x} & \gamma_2(x) = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

ist. Die Lösung gehört zu $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R})$. Ihre Einschränkungen auf \mathbf{R}_+^2 und \mathbf{R}_-^2 sind auf $\mathbf{R}_+^2 \cup \mathbf{R}_0$ bzw. $\mathbf{R}_-^2 \cup \mathbf{R}_0$ Hölder-stetig fortsetzbar, wobei \mathbf{R}_0 die Menge aller Punkte ist, wo γ_1 und γ_2 beide Hölder-stetig sind. In den Punkten $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0, 0)$, wo γ_1 oder γ_2 Sprungstellen haben, ist die Lösung in der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\infty \mathbf{x}} \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_\pm(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha \quad (3.28)$$

darstellbar, wobei

$$\alpha = \frac{1}{\pi} (f(x_0-) - f(x_0+)) > -\frac{1}{2} \quad (3.29)$$

und \mathbf{a}_\pm zwei in $\mathbf{R}_\pm^2 \cup \mathbf{R}$ definierte beschränkte und in einer punktierten Umgebung von \mathbf{x}_0 stetige Funktionen sind.

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$\Xi(x + iy) = v_x(x, y) - iv_y(x, y). \quad (3.30)$$

Aus (3.26) folgt

$$\Xi(z) = v_{\infty x} - i \frac{v_{\infty y}}{\cos f(\infty)} e^{\frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau} - \frac{C}{v_{\infty x}} \operatorname{sign} y, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}. \quad (3.31)$$

Damit ist (3.6) und (3.7) erfüllt, weil Ξ eine in $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ analytische Funktion ist. Es gilt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} V.P. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = if(\infty) \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z). \quad (3.32)$$

(GACHOV [4], §4.6). Dies ergibt (3.8). Die Plemeljschen Formeln auf das Integral

$$\Pi(z) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (3.33)$$

angewendet ergeben auf der Geraden $y = 0$

$$\Pi(x \pm 0i) = \pm i f(x) + \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x} d\tau. \quad (3.34)$$

Die Funktion Π ist auf $\mathbf{C}_{\pm} \cup \mathbf{R}_0$ Hölder-stetig fortsetzbar, und auf \mathbf{R}_0 werden die gerade erwähnten Werte aus den Plemeljschen Formeln angenommen. In der Umgebung der Unstetigkeitspunkte von γ_1 oder γ_2 ist die Funktion Π in der Form

$$\Pi(z) = \alpha \ln(z - z_0) + q(z) \pm i f(z) \quad (3.35)$$

darstellbar, wobei z_0 der Unstetigkeitspunkt,

$$\alpha = \frac{1}{\pi} (f(x_0-) - f(x_0+)) \quad (3.36)$$

und q eine in z_0 Hölder-stetige Funktion sind. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &\in [0, \frac{\pi}{2}] & \text{falls } v_{\infty x} > 0, \\ f(x) &\in [-\frac{\pi}{2}, 0] & \text{falls } v_{\infty x} < 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Daraus folgt $\alpha \geq -\frac{1}{2}$. Der Fall $\alpha = -\frac{1}{2}$ ist wegen (3.25) ausgeschlossen. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} \Xi_+(x + 0i) &= v_{\infty x} - iv_{\infty y}(e^{if(x)+If(x)} - iC), \\ \Xi_-(x + 0i) &= v_{\infty x} - iv_{\infty y}(e^{-if(x)+If(x)} + iC), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$v_{y\pm}(x, 0) = -\operatorname{Im} (\Xi_{\pm}(x + 0i)) = v_{\infty y} \frac{\cos f(x)}{\cos f(\infty)} e^{If(x)} \quad (3.39)$$

und

$$v_{x\pm}(x, 0) = \operatorname{Re} (\Xi_{\pm}(x + 0i)) = v_{\infty x} \pm v_{\infty y} \frac{\sin f(x)}{\cos f(\infty)} e^{If(x)} \mp \frac{C}{v_{\infty x}}, \quad (3.40)$$

wobei

$$If(x) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x} d\tau \quad (3.41)$$

ist. Die Gleichung (3.9) ist damit bewiesen. Die Eigenschaften der Funktion Π ergeben die Hölder-stetige Fortsetzbarkeit von \mathbf{v} auf \mathbf{R}_0 und das in der Satzaussage angegebene Verhalten in den Umgebungen der Unstetigkeitspunkte von γ_1 und γ_2 . Aus $\alpha > -\frac{1}{2}$ folgt $v_{x\pm}, v_{y\pm} \in H_\phi^0(\mathbf{R})$, und aus Satz 7.3.5 folgt nun $v_x, v_y \in D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap \mathbf{D}_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$. Es sei

$$\chi(x) = \sqrt{\gamma_1(x)^2 + 4\rho^2 v_{\infty x}^2 \gamma_2(x)^2}. \quad (3.42)$$

Auf \mathbf{R} erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\rho\gamma_2(x)(4C + \mathbf{v}_+(x)^2 - \mathbf{v}_-(x)^2) = \\ &= \frac{2\rho\gamma_2(x)v_{\infty x}v_{\infty y} \sin f(x)e^{If(x)}}{\cos f(\infty)} = \\ &= \frac{v_{\infty y}\chi(x)\sin f(x)\cos f(x)e^{If(x)}}{\cos f(\infty)} = \\ &= \gamma_1(x)v_y(x), \end{aligned} \quad (3.43)$$

und damit ist (3.10) erfüllt. Q.E.D.

Bemerkung 3.2.3 *Gibt es einen Punkt mit (3.25), so ist mit (3.26) ebenfalls eine Lösung des Problems 3.1.1 gegeben, die aber die Bedingung $v_x, v_y \in D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap \mathbf{D}_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$ nicht erfüllt. Die Lösung gehört noch immer zu $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R})$, und ihre Einschränkungen auf \mathbf{R}_+^2 und \mathbf{R}_-^2 sind auf $\mathbf{R}_+^2 \cup \mathbf{R}_0$ bzw. $\mathbf{R}_-^2 \cup \mathbf{R}_0$ Hölder-stetig fortsetzbar. In den Punkten $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$, wo γ_1 oder γ_2 Sprungstellen haben, ist die Lösung in der Form*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\infty \mathbf{x}} \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_\pm(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha \quad (3.44)$$

darstellbar, wobei

$$\alpha = \frac{1}{\pi}(f(x_0-) - f(x_0+)) \geq -\frac{1}{2} \quad (3.45)$$

und \mathbf{a}_\pm zwei in $\mathbf{R}_\pm^2 \cup \mathbf{R}$ definierte beschränkte und in einer punktierten Umgebung von \mathbf{x}_0 stetige Funktionen sind. Diese Lösung befindet sich nicht mehr im Raum, wo die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen wurde.

3.3 Fall II (Ein Teil der Geraden)

In diesem Abschnitt wird das Problem 3.1.2 betrachtet, d.h. der Fall, daß mindestens ein eindimensionales Intervall positiver Länge vollkommen durchlässig

ist. Wir erhalten eine Lösung, nur wenn es keine scharfen Punkte gibt und wenn die Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)} = 0 \quad (3.46)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist in den Fällen, wenn eine Umgebung vom Unendlichen vollkommen durchlässig ist (d.h. der poröse und undurchlässige Teil der Geraden beschränkt sind), immer erfüllt.

Satz 3.3.1 *Das Problem 3.1.2 hat höchstens eine Lösung.*

Beweis. Das Problem 3.1.2 kann auch als Problem 3.1.1 mit zusätzlichen Bedingungen $C = 0$ und

$$\mathbf{v}_+(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_-(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathbf{S} \quad (3.47)$$

verstanden werden (siehe Satz 7.5.4). Aus Satz 3.2.1 folgt nun, daß auch dieses Problem nicht mehr als eine Lösung besitzen kann. Q.E.D.

Satz 3.3.2 *Ist $v_{\infty x} \neq 0$, $\gamma_2(x) \neq 0$ in einer Umgebung vom Unendlichen, die Funktion $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ Hölder-stetig im Unendlichen, gilt*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)} = 0 \quad (3.48)$$

und gibt es keinen Punkt $x_0 \in \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \gamma_1(x_0-) &= 0, & \gamma_2(x_0+) &= 0 & \text{falls } v_{\infty x} &> 0, \\ \gamma_1(x_0+) &= 0, & \gamma_2(x_0-) &= 0 & \text{falls } v_{\infty x} &< 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

so ist die Lösung des Problems 3.1.2 durch

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= v_{\infty x} + v_{\infty y} \operatorname{Im} e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x - iy} d\tau}, \\ v_y(x, y) &= v_{\infty y} \operatorname{Re} e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x - iy} d\tau} \end{aligned} \quad (3.50)$$

gegeben, wobei

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \left(\frac{\gamma_1(x)}{2\rho v_{\infty x} \gamma_2(x)} \right), & \gamma_2(x) \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} v_{\infty x}, & \gamma_2(x) = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

ist. Die Lösung gehört zu $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S})$. Ihre Einschränkungen auf \mathbf{R}_+^2 und \mathbf{R}_-^2 sind auf $\mathbf{R}_+^2 \cup \mathbf{R}_0$ bzw. $\mathbf{R}_-^2 \cup \mathbf{R}_0$ Hölder-stetig fortsetzbar, wobei $\mathbf{R}_0 \subseteq \mathbf{R}$ die Menge aller Punkte ist, wo γ_1 und γ_2 beide Hölder-stetig sind. In den Punkten $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$, wo γ_1 oder γ_2 Sprungstellen haben, ist die Lösung in der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\infty x} \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_\pm(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha \quad (3.52)$$

darstellbar, wobei

$$\alpha = \frac{1}{\pi}(f(x_0-) - f(x_0+)) > -\frac{1}{2} \quad (3.53)$$

ist und \mathbf{a}_\pm zwei in $\mathbf{R}_\pm^2 \cup \mathbf{R}$ definierte beschränkte und in einer punktierten Umgebung von \mathbf{x}_0 stetige Funktionen sind.

Beweis. Die Lösung ist gleich wie die Lösung für die ganze Gerade (3.26) mit $\cos f(\infty) = 1$ und $\tan f(\infty) = 0$. Damit ist (3.13) und (3.14) in $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}$ sowie (3.15), (3.16), $\mathbf{v} \in C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R})$, daß \mathbf{v} auf $\mathbf{R}_\pm^2 \cup \mathbf{R}_0$ Hölder-stetig fortsetzbar ist, $v_{x\pm}, v_{y\pm} \in H_\phi^0(\mathbf{R})$, und $v_x, v_y \in D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$ erfüllt. Aus $\tan f(\infty) = 0$ folgt $C = 0$ in (3.26), und dies ergibt (3.17). Wir haben (siehe (3.40))

$$v_{x\pm}(x) = v_{\infty x} \pm \sin f(x) e^{If(x)}, \quad (3.54)$$

und dies ergibt auf \mathbf{S}

$$v_{x\pm}(x) = v_{\infty x}, \quad (3.55)$$

da dort $\sin f(x) = 0$ gilt. Dies liefert nun

$$\mathbf{v}_+(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_-(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{S} \quad (3.56)$$

und dies ergibt (3.13) und (3.14) auch auf $\mathbf{R} \setminus \mathbf{S}$. Q.E.D.

Bemerkung 3.3.3 Gibt es einen Punkt mit (3.49) so ist durch (3.50) ebenfalls eine Lösung des Problems 3.1.2 gegeben, die aber der Bedingung $v_x, v_y \in D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$ nicht genügt. Wie in Satz 3.3.2, gehört die Lösung zu $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S})$. Ihre Einschränkungen auf \mathbf{R}_+^2 und \mathbf{R}_-^2 sind auf $\mathbf{R}_+^2 \cup \mathbf{R}_0$ bzw. $\mathbf{R}_-^2 \cup \mathbf{R}_0$ Hölder-stetig fortsetzbar. In den Punkten $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$, wo γ_1 oder γ_2 Sprungstellen haben, ist die Lösung in der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\infty x} \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_\pm(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha \quad (3.57)$$

darstellbar, wobei

$$\alpha = \frac{1}{\pi}(f(x_0+) - f(x_0-)) \geq -\frac{1}{2} \quad (3.58)$$

und \mathbf{a}_\pm zwei in $\mathbf{R}_\pm^2 \cup \mathbf{R}$ definierte beschränkte und in einer punktierten Umgebung von \mathbf{x}_0 stetige Funktionen sind. Diese Lösung gehört nicht mehr dem Raum an, in dem die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen wurde.

Bemerkung 3.3.4 Im Satz 3.3.2 wurde die Zirkulation nicht erwähnt, da die Lösung nur für eine Zirkulation existiert. Die Zirkulation um ein Intervall $[a, b]$ der Strecke ist laut (3.54) gleich

$$Z = 2 \int_a^b \sin f(x) e^{If(x)} dx \geq 0 \text{ für } v_{\infty x} > 0. \quad (3.59)$$

Beispiel 3.3.5

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \gamma_2(x) &= \begin{cases} c = \text{Konst.} > 0 & x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.60)$$

In diesem Fall erhalten wir

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{2\rho v_{\infty x} c} = M & x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= v_{\infty x} - v_{\infty y} \operatorname{Im} e^{\frac{2}{\pi} M \ln \left(\frac{x+iy-1}{x+iy+1} \right)}, \\ v_y(x, y) &= v_{\infty y} \operatorname{Re} e^{\frac{2}{\pi} M \ln \left(\frac{x+iy-1}{x+iy+1} \right)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

(siehe Abbildung 3.1). Der Grenzfall $c = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= v_{\infty x} - v_{\infty y} \operatorname{Im} \sqrt{\frac{x+iy-1}{x+iy+1}}, \\ v_y(x, y) &= v_{\infty y} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{x+iy-1}{x+iy+1}}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

wobei die komplexe Wurzel aus der Halbebene $\operatorname{Im} z \cdot v_{\infty x} > 0$ genommen wird (siehe Abbildung 3.2). Bei diesem Fluß ist die Zirkulation so bestimmt, daß die Tschaplyginsche Bedingung (bei $v_{\infty x} > 0$) am linken Ende der Strecke erfüllt wird. Am rechten Ende hat der Fluß eine Singularität. Man merke auch, daß die komplexe Darstellung

$$v_x(x, y) - i v_y(x, y) \quad (3.64)$$

des Flusses genau die Formel von Keldysch und Sedow ist (siehe LAWREN-TJEW-SCHABAT [9], §3.54).

Beispiel 3.3.6

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= \begin{cases} 1 & x \in [a_i, b_i], i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \gamma_2(x) &= \begin{cases} c_i > 0 & x \in [a_i, b_i], \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}\quad (3.65)$$

Wir erhalten

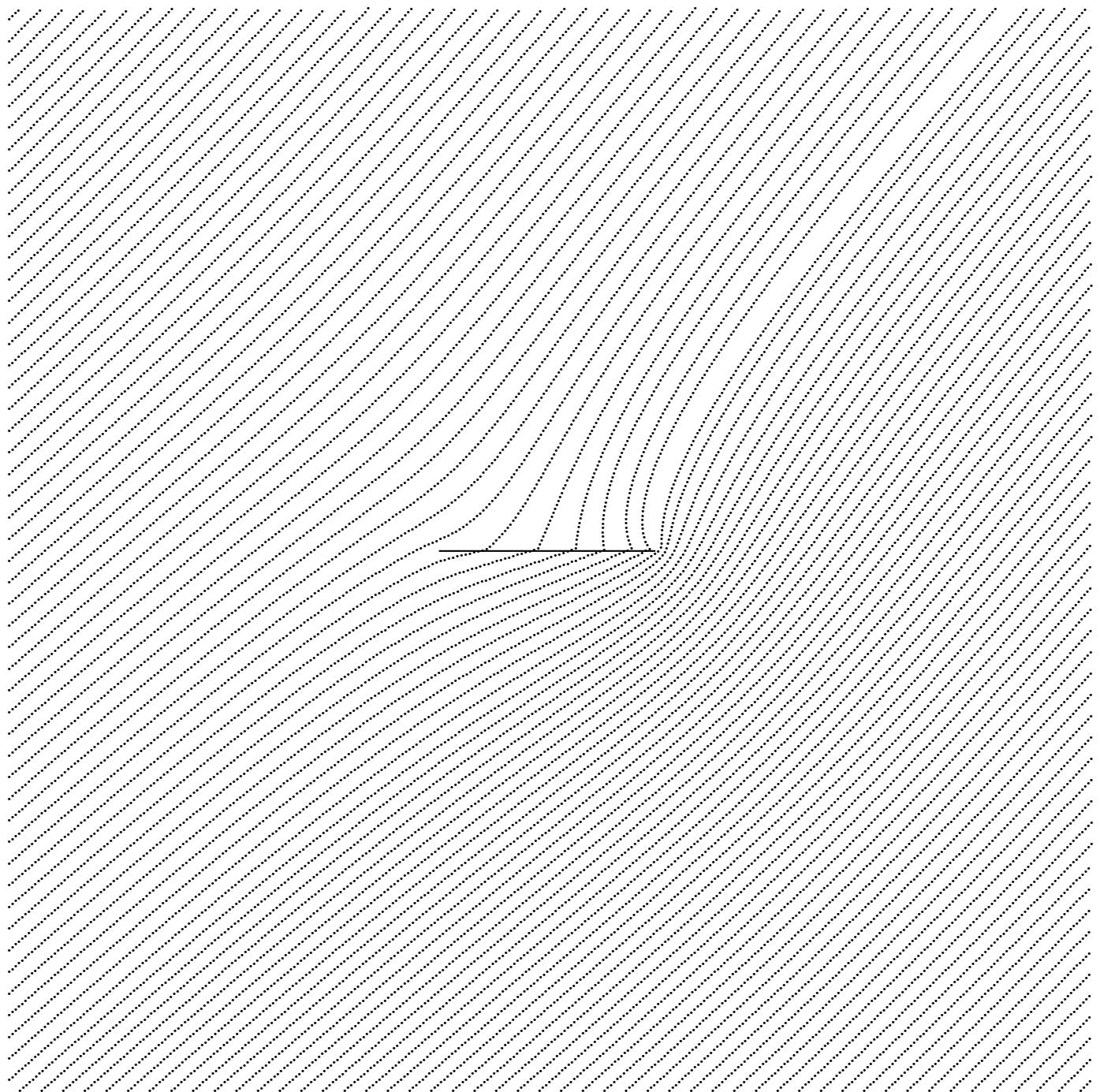
$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{2\rho v_{\infty x} c_i} = M_i & x \in [a_i, b_i], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}\quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}v_x(x, y) &= v_{\infty x} - v_{\infty y} \operatorname{Im} e^{\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n M_i \ln \left(\frac{x+iy-a_i}{x+iy-b_i} \right)}, \\ v_y(x, y) &= v_{\infty y} \operatorname{Re} e^{\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n M_i \ln \left(\frac{x+iy-a_i}{x+iy-b_i} \right)}\end{aligned}\quad (3.67)$$

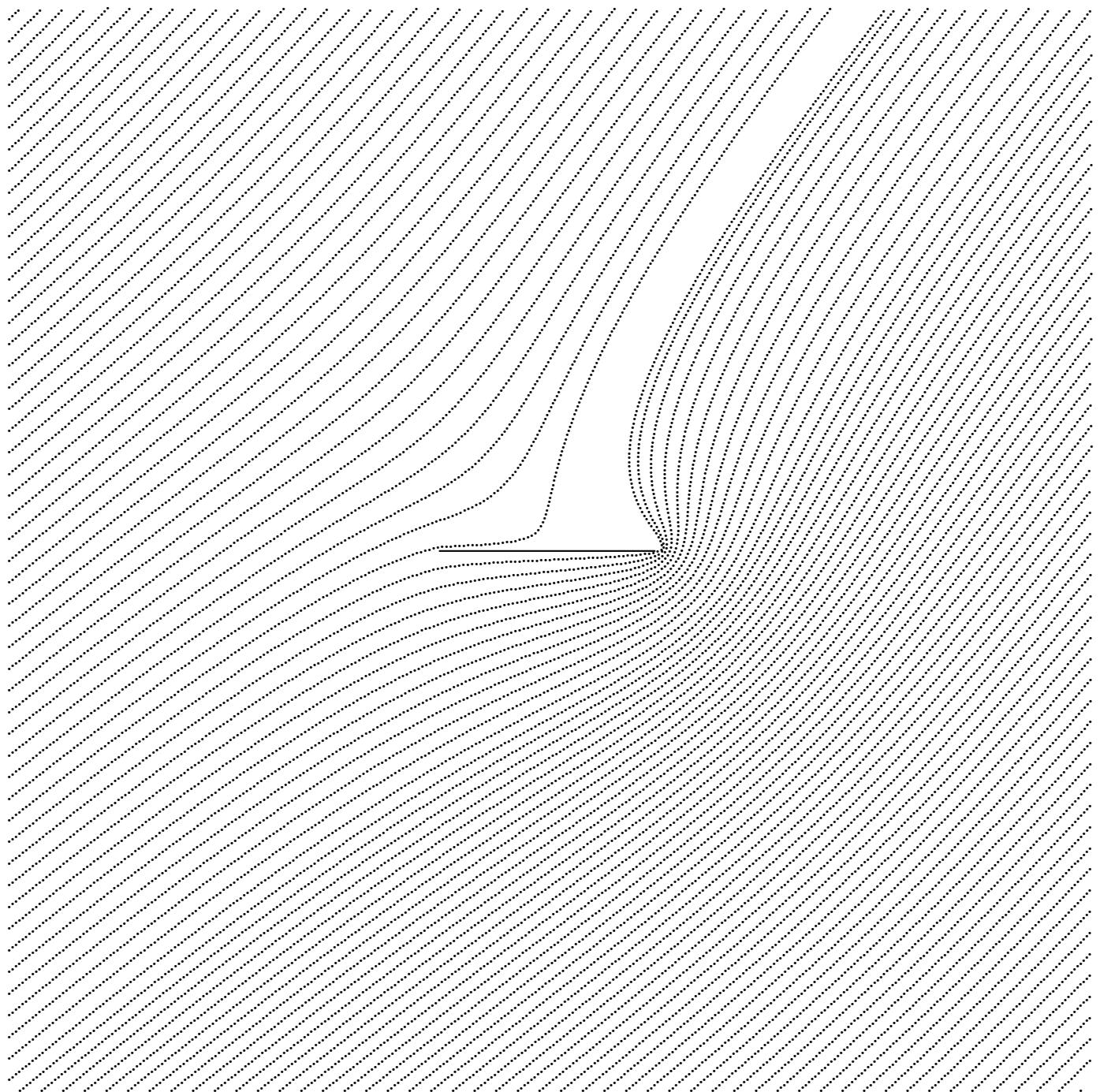
(siehe Abbildung 3.3). Der Grenzfall $c_i = 0, i = 1, \dots, n$ ergibt

$$\begin{aligned}v_x(x, y) &= v_{\infty x} - v_{\infty y} \operatorname{Im} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{x+iy-a_i}{x+iy-b_i}}, \\ v_y(x, y) &= v_{\infty y} \operatorname{Re} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{x+iy-a_i}{x+iy-b_i}},\end{aligned}\quad (3.68)$$

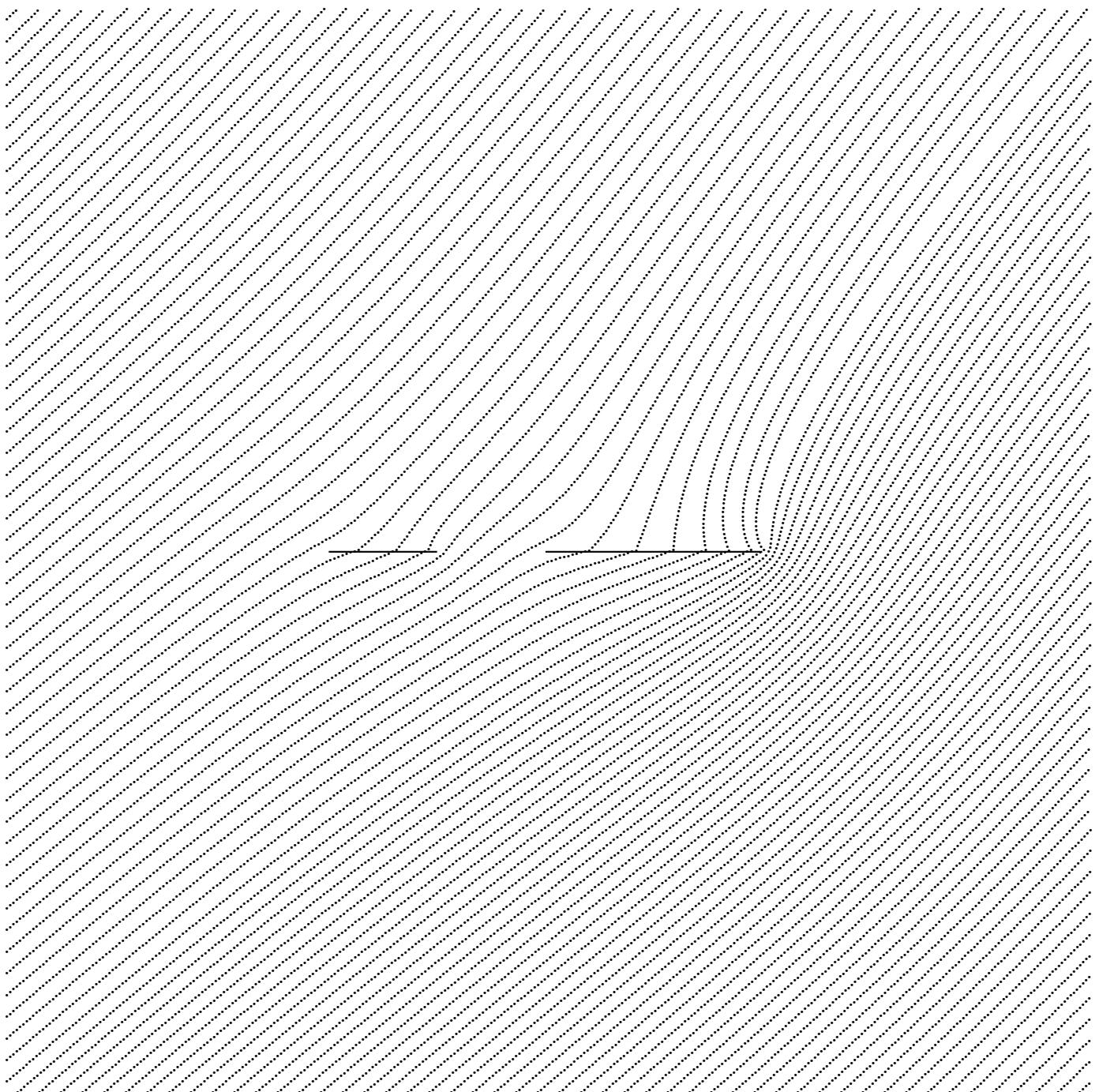
wobei die komplexe Wurzel aus der Halbebene $\operatorname{Im} z \cdot v_{\infty x} > 0$ genommen wird (siehe Abbildung 3.4). Die Zirkulation ist wiederum so bestimmt, daß die Tschaplyginsche Bedingung an den linken Enden der Strecken erfüllt wird.



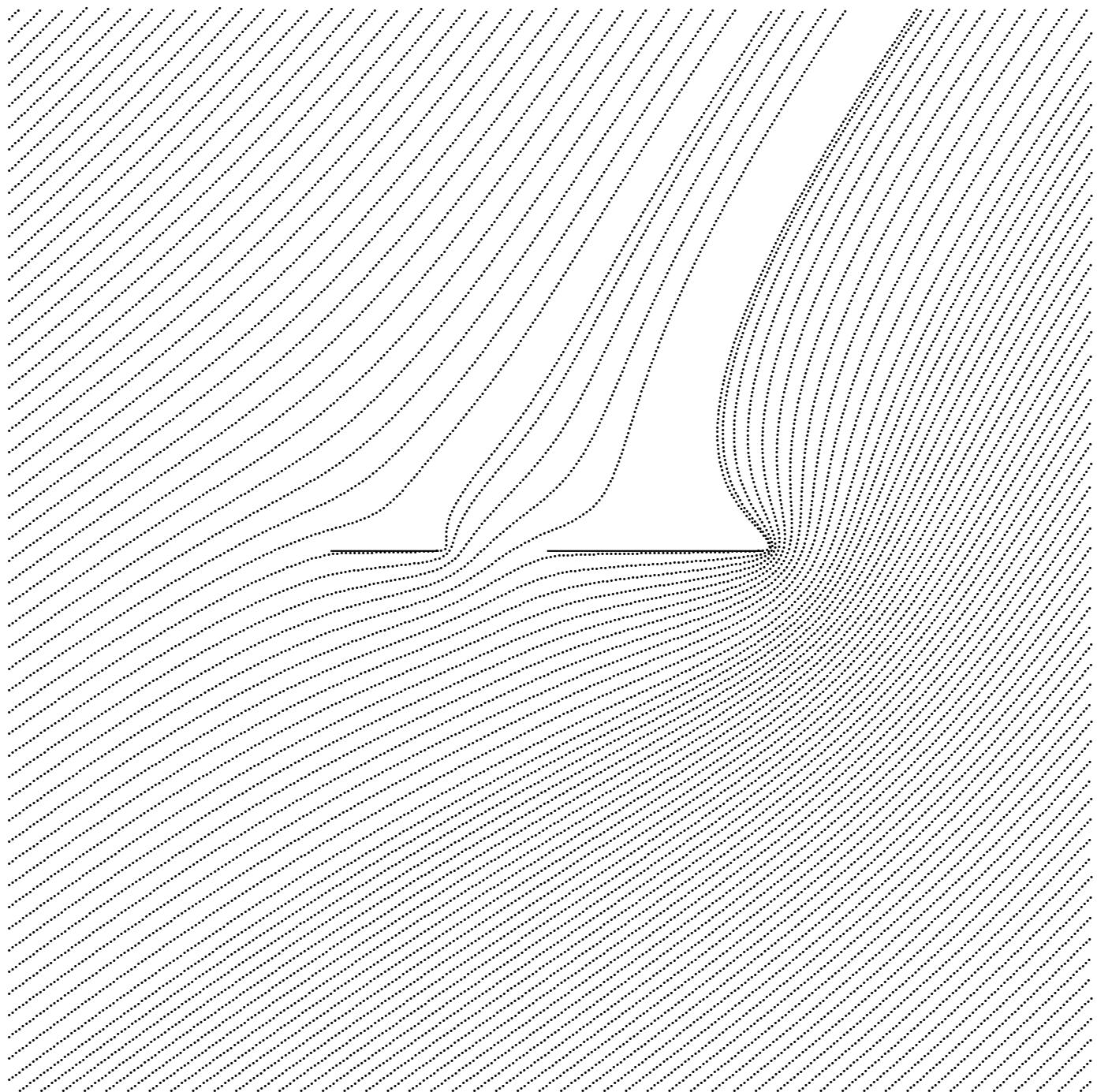
Flow through a finite porous line with constant porosity



Flow around a finite impervious line



Flow through multiple porous lines with constant porosity



Flow around multiple porous lines

3.4 Der Fall $v_{\infty x} = 0$

3.4.1 Ein Teil der Geraden

Setzen wir $\gamma_1, \gamma_2, v_{\infty y}$ fest und ändern nur $v_{\infty x}$, so erhalten wir

$$\lim_{\substack{v_{\infty x} \rightarrow 0 \\ v_{\infty x} > 0}} f(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in \mathbf{S}, \\ \frac{\pi}{2}, & \tau \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{S} \end{cases} \quad (3.69)$$

und

$$\lim_{\substack{v_{\infty x} \rightarrow 0 \\ v_{\infty x} < 0}} f(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in \mathbf{S}, \\ -\frac{\pi}{2}, & \tau \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{S}. \end{cases} \quad (3.70)$$

Dies ergibt

$$v_y(x) = 0, \quad x \in \mathbf{S}. \quad (3.71)$$

bei beiden Grenzwerten. Ganz allgemein erhalten wir aus (3.16) und aus der linearen Eigenschaft der Geraden

$$\gamma_1(x)v_y(x) = \gamma_2(x)(v_{x+}(x)^2 - v_{x-}(x)^2) = 0, \quad (3.72)$$

da $v_{x+}(x) + v_{x-}(x) = 0$ gilt. Deswegen ist (3.71) bei jeder Lösung von Problem 3.1.2 erfüllt. Aus der Stetigkeit von \mathbf{v} in $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S}$ folgt

$$v_x(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{S}. \quad (3.73)$$

Die Formel (3.50) liefert unabhängig von f , zwei verschiedene Lösungen unseres Problems. Man merke, daß das Fluid nicht durch sondern um das Hindernis fließt. Dies entspricht nicht der allgemein erwarteten Situation und zeigt eine Schwäche des Modells.³ Beide Lösungen sind eigentlich die klassischen Lösungen für das Umfließen eines Hindernisses, wobei bei der ersten Lösung die Tschaplyginsche Bedingung auf allen “linken” Enden erfüllt wird und bei der zweiten Lösung auf den “rechten” Enden des Hindernisses. Weil das Problem linear ist, ist jede lineare Kombination dieser zwei Lösungen auch eine Lösung. Die Grenzwerte dieser Lösungen auf der Geraden $y = 0$ gehören nicht zu $H_\phi^0(\mathbf{R})$ (wie in anderen Fällen), sondern nur zu $L_{loc}^1(\mathbf{R})$. Im Fall $\mathbf{S} = [-1, 1]$ lauten diese zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= -v_{\infty y} \operatorname{Im} \sqrt{\frac{x+iy-1}{x+iy+1}}, \\ v_y(x, y) &= v_{\infty y} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{x+iy-1}{x+iy+1}} \end{aligned} \quad (3.74)$$

³Hieraus folgt z.B., daß beim Eintauchen eines Siebs in fließendes Wasser senkrecht zur Flußrichtung das Wasser nicht durch sondern um das Sieb fließt.

und

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= -v_{\infty y} \operatorname{Im} \sqrt{\frac{x+iy+1}{x+iy-1}}, \\ v_y(x, y) &= v_{\infty y} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{x+iy+1}{x+iy-1}}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

wobei die komplexe Wurzel aus dem Argumentenbereich $[0, \pi)$ genommen wird (siehe Abbildung 3.5). Die komplexe Darstellung der Geschwindigkeit ergibt wiederum die schon im Beispiel 3.3.5 erwähnte Formel von Keldysch und Sedow.

Satz 3.4.1 *Im Fall $v_{\infty x} = 0$ und $v_{\infty y} \neq 0$ gibt es keine Lösung von Problem 3.1.2 in $D_{\Delta_\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap D_{\Delta_\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$.*

Beweis. Es sei

$$\Xi(x + iy) = (v_x(x, y) - iv_y(x, y))^2. \quad (3.76)$$

Aus (3.71) und (3.73) folgt

$$\operatorname{Im} \Xi(x + i0) = v_x(x, 0) \cdot v_y(x, 0) = 0. \quad (3.77)$$

Der Satz 7.3.7 liefert $\operatorname{Im} \Xi = 0$, und dies liefert $\operatorname{Re} \Xi = c = \text{Konst.}$. Das Verhalten von Ξ im Unendlichen ergibt

$$\operatorname{Re} \Xi = v_x^2 - v_y^2 = -v_{\infty y}^2. \quad (3.78)$$

Nun haben wir auf \mathbf{S}

$$v_x^2 + v_{\infty y}^2 = 0, \quad (3.79)$$

was nur für $v_{\infty y} = 0$ möglich ist. Q.E.D.

Satz 3.4.2 *Es sei*

$$\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^n [\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i], \quad (3.80)$$

$b_0 = -\infty$, $a_{n+1} = \infty$ und

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{S} \\ \frac{\pi}{2} & x \in \mathbf{S}, \mathbf{x} \leq \mathbf{a}_i \\ -\frac{\pi}{2} & x \in \mathbf{S}, \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_{i-1}, i = 1, \dots, n+1 \end{cases}. \quad (3.81)$$

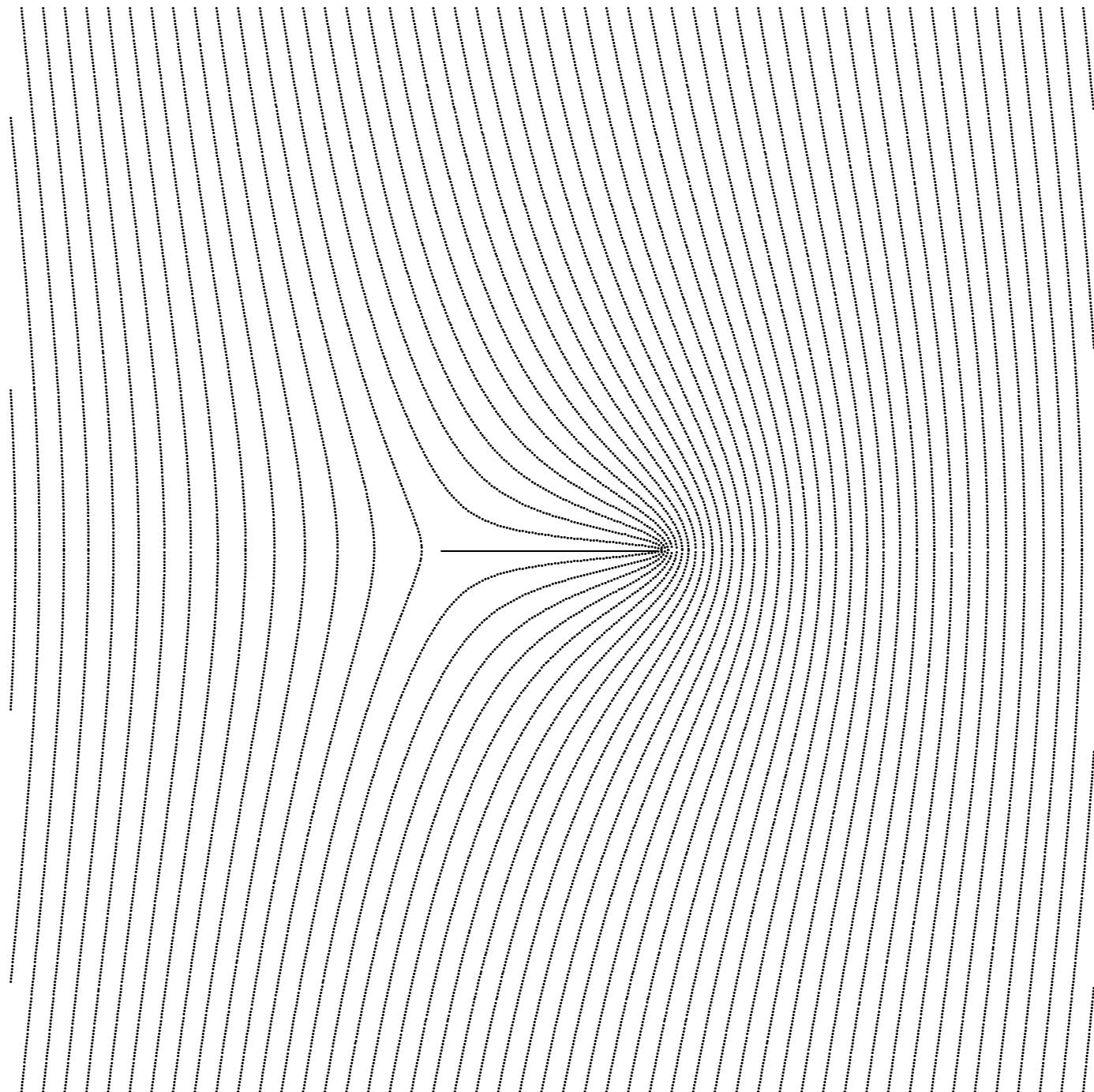


Abbildung 3.5: The flow through a finite porous line with perpendicular velocity in infinity

Die allgemeine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{in } \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S} \\ v_y &= 0 && \text{auf } S \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{0}, \mathbf{v}_{\infty y}) \end{aligned} \quad (3.82)$$

lautet

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= v_{\infty y} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \operatorname{Im} e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(\tau)}{\tau - x - iy} d\tau}, \\ v_y(x, y) &= v_{\infty y} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \operatorname{Re} e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(\tau)}{\tau - x - iy} d\tau}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1 \quad (3.84)$$

ist.

Beweis. Jede von diesen Funktionen ist ein harmonisches Vektorfeld in $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S}$. Die Plemeljschen Formeln ergeben $v_y = 0$ auf \mathbf{S} . Da f_i in einer Umgebung des Unendlichen verschwinden, erhalten wir auch $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\mathbf{0}, \mathbf{v}_{\infty y})$. Laut MUSCHELISCHVILI [14], §94 und 95, gibt es $n + 1$ linear unabhängige Lösungen von Problem (3.82) ohne die Bedingung im Unendlichen. Damit sind in (3.83) alle Lösungen dieses Problems aufgelistet. Q.E.D.

3.4.2 Die ganze Gerade

Satz 3.4.3 Das Problem 3.1.1 hat im Fall $v_{\infty x} = 0$ und $v_{\infty y} \neq 0$ keine Lösung.

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= v_{\infty y} + \operatorname{grad} \Phi_+(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= v_{\infty y} + \operatorname{grad} \Phi_-(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_-^2, \end{aligned} \quad (3.85)$$

Da die Gerade eine Kurve mit der linearen Eigenschaft ist, folgt aus

$$v_{y+} = v_{y-} \quad \text{in } H_\phi^0(\mathbf{R}), \quad (3.86)$$

daß gilt

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \Phi_-}{\partial y}(x, 0) \quad (3.87)$$

und weiter

$$v_{x+} = \frac{\partial \Phi_+}{\partial x}(x, 0) = -\frac{\partial \Phi_-}{\partial x}(x, 0) = -v_{x-}. \quad (3.88)$$

Somit gilt auf der Geraden \mathbf{R}

$$\mathbf{v}_+(\mathbf{x})^2 - \mathbf{v}_-(\mathbf{x})^2 = \mathbf{0}. \quad (3.89)$$

Die Gleichung (3.10) lautet nun

$$\gamma_1(x)v_y(x) = 2\rho C\gamma_2(x). \quad (3.90)$$

Aus (3.8) folgt

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v_{\infty y}\gamma_1(x)}{2\rho\gamma_2(x)}. \quad (3.91)$$

Damit ist im Fall, daß dieser Grenzwert nicht existiert, die Nichtexistenz der Lösung wegen $\gamma_1(x) \neq 0$ fast überall schon bewiesen. Andernfalls erhalten wir nun

$$v_y(x) = f(x) = \frac{2\rho C\gamma_2(x)}{\gamma_1(x)}. \quad (3.92)$$

Gehört diese Funktion nicht zu $H_\phi^0(\mathbf{R})$, so ist die Nichtexistenz der Lösung ebenfalls schon bewiesen. Ist dies nicht der Fall, so ist die einzige Lösung der Laplaceschen Gleichung in $D_{\Delta_\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2) \cap \mathbf{D}_{\Delta_\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_-^2)$ (der v_y genügt) mit dem Randwert $f(x)$ durch

$$v_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x - iy} d\tau \right) \quad (3.93)$$

gegeben. Für $C = 0$ ergibt sich $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Für $C \neq 0$ erhalten wir aus (3.6) und (3.7)

$$v_x(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x - iy} d\tau \right), \quad (3.94)$$

und für diese Funktion gilt

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} v_x(x, y) = f(\infty)\operatorname{sign} y \neq 0, \quad (3.95)$$

und somit ist die Bedingung $v_{\infty x} = 0$ nicht erfüllt. Q.E.D.

Kapitel 4

Der stationäre Fall für den Kreis

4.1 Einführung

Dieses Kapitel betrachtet die ebene Strömung über eine poröse Linie, die in einem Kreis enthalten ist. Dies schließt auch die Fälle ein, wo nur ein Teil des Kreises porös ist. Zunächst wird in diesem Abschnitt das Problem aufgestellt und präzise formuliert. Eng mit dem Problem verbunden sind der Operator H , der der Normalableitung auf dem Einheitskreis einer in der Einheitskreisscheibe harmonischen Funktion ihre Tangentialableitung auf dem Einheitskreis zuordnet, und die Gleichung

$$\sin f(\varphi)u(\varphi) + \cos f(\varphi)Hu(\varphi) = g(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (4.1)$$

die wir hier *Hilbert-Gleichung* nennen. Es werden im zweiten Abschnitt der Operator H und im dritten Abschnitt die Hilbert-Gleichung näher betrachtet. Im vierten Abschnitt wird das Problem für einen ganzen porösen Kreis gelöst. Im fünften Abschnitt wird ein nur teilweise poröser Kreis betrachtet, und am Ende des Kapitels werden einige Beispiele angegeben. Das Ergebnis des dritten Abschnitts (der volle Kreis) ist schon in WOLFERSDORF [22] erhalten. Das hier erreichte Ergebnis unterscheidet sich dadurch, daß es auch die Fälle einschließt, wenn die Permeabilität gegen unendlich strebt, (d.h. die Fläche wird immer durchlässiger), z.B. wenn $\gamma_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ auf einer Menge vom Maß null gilt. Das Ergebnis im vierten Abschnitt (ein Teil des Kreises) ist neu.

Im Problem 1.0.1 ist nun Γ ein Kreis, und es fällt die Abhängigkeit von t

weg. Damit fällt auch die Anfangsbedingung (1.18) als sinnlos weg. Einfachheitshalber legen wir das Koordinatensystem so, daß Γ genau der Einheitskreis und die Geschwindigkeit im Unendlichen in x -Richtung gerichtet ist. Wir führen das polare Koordinatensystem (r, φ) ein. Anstatt $\gamma_1(\mathbf{x}), \gamma_2(\mathbf{x})$ schreiben wir hier $\gamma_1(\varphi)$ und $\gamma_2(\varphi)$. Wie bei der Geraden kann auch hier die Eulersche Gleichung durch die Bernoullische Gleichung

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_{\pm} \quad (4.2)$$

ersetzt werden, und somit wird nun die Gleichung

$$\gamma_1(\mathbf{v} \cdot \nu)_{\pm} = \gamma_2(\mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+) \quad (4.3)$$

zu

$$\gamma_1(\varphi)v_r(\varphi) = \frac{1}{2}\rho\gamma_2(\varphi)\left(2C - \mathbf{v}_+^2 + \mathbf{v}_-^2\right), \quad (4.4)$$

wobei

$$C = \frac{1}{2}(C_- - C_+) \quad (4.5)$$

ist. Wie bei der Geraden taucht der Druck p nur in der Bernoullischen Gleichung auf, die jetzt nur als bestimmende Gleichung für p dient, während die Funktion \mathbf{v} aus allen anderen Gleichungen zu bestimmen ist. Die Grenzwerte der Geschwindigkeit auf dem Kreis $\partial K(0, 1)$ werden im Sinn des Satzes 7.3.3 von der inneren Seite in $D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(K(0, 1))$ und von der äußeren Seite in $D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)})$ genommen, wobei $R > 1$ ist. Den Grenzwert von der inneren Seite des Kreises bezeichnen wir mit $\mathbf{v}_+(\varphi) = (\mathbf{v}_{\mathbf{r}+}(\varphi), \mathbf{v}_{\varphi+}(\varphi))$ und den von der äußeren Seite mit $\mathbf{v}_-(\varphi) = (\mathbf{v}_{\mathbf{r}-}(\varphi), \mathbf{v}_{\varphi-}(\varphi))$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $\text{supp } \gamma_1(\varphi) = [-\pi, \pi]$, d.h. der ganze Kreis ist porös oder undurchlässig.
Hier entfällt die Gleichung (1.17).
2. $\text{supp } \gamma_1 \neq [-\pi, \pi]$. In diesem Fall folgt aus der Stetigkeit der Geschwindigkeit auf dem nicht porösen Teil des Kreises $C = 0$.

Als ein freier Parameter taucht die sogenannte Zirkulation¹

$$Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_{\varphi-}(1, s) ds \quad (4.6)$$

¹Die übliche Definition der Zirkulation ist 2π mal größer.

auf. Da wir z.B. im ersten Fall für jedes Z jeweils eine Lösung erhalten, wird sie im Problem auch vorgegeben. Die Geschwindigkeit des Fluids soll also aus einem von den folgenden zwei Problemen bestimmt werden.

Problem 4.1.1 *Es sind zwei nicht negative stückweise Hölder-stetige Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft $\gamma_1(\varphi) + \gamma_2(\varphi) > 0$ und drei reelle Konstanten $\rho > 0, v_\infty, Z$ gegeben. Es gelte*

$$\text{supp } \gamma_1 = [-\pi, \pi]. \quad (4.7)$$

Gesucht wird das Paar (\mathbf{v}, \mathbf{C}) mit $v_r, v_\varphi \in D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(\partial K(0, 1)) \cap D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(\partial K(0, R) \setminus \overline{\partial K(0, 1)}), \forall R > 1, C \in \mathbf{R}$, das

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \partial \mathbf{K}(0, 1), \quad (4.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \partial \mathbf{K}(0, 1), \quad (4.9)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_\infty \mathbf{e}_1, \quad (4.10)$$

$$v_{r+} = v_{r-}, \quad (4.11)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_{\varphi-}(\varphi) d\varphi = 2\pi Z, \quad (4.12)$$

$$\gamma_1(\varphi)v_{r+}(\varphi) = \frac{1}{2}\rho\gamma_2(\varphi) \left(2C + \mathbf{v}_-(\varphi)^2 - \mathbf{v}_+(\varphi)^2\right), \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \quad (4.13)$$

genügt.

Problem 4.1.2 *Es sind zwei nicht negative stückweise Hölder-stetige Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft $\gamma_1(\varphi) + \gamma_2(\varphi) > 0$ und drei reelle Konstanten $\rho > 0, v_\infty, Z$ gegeben. Es sei*

$$\mathbf{T} = \text{Int} \{ \varphi \in [-\pi, \pi] : \gamma_1(\varphi) = \mathbf{0} \} \neq \emptyset. \quad (4.14)$$

Gesucht wird die Funktion \mathbf{v} mit $v_r, v_\varphi \in D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(\partial K(0, 1)) \cap D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(\partial K(0, R) \setminus \overline{\partial K(0, 1)}), \forall R > 1$, die

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \partial \mathbf{K}(0, 1), \quad (4.15)$$

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \partial \mathbf{K}(0, 1), \quad (4.16)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_\infty \mathbf{e}_1, \quad (4.17)$$

$$v_{r+} = v_{r-}, \quad (4.18)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_{\varphi-}(\varphi) d\varphi = 2\pi Z, \quad (4.19)$$

$$\gamma_1(\varphi)v_{r+}(\varphi) = \frac{1}{2}\rho\gamma_2(\varphi)\left(\mathbf{v}_-(\varphi)^2 - \mathbf{v}_+(\varphi)^2\right), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (4.20)$$

$$\mathbf{v}_-(\varphi) = \mathbf{v}_+(\varphi), \quad \varphi \in \mathbf{T} \quad (4.21)$$

genügt.

In den Gleichungen (4.13) und (4.20) taucht der Ausdruck

$$\mathbf{v}_-(\varphi)^2 - \mathbf{v}_+(\varphi)^2 \quad (4.22)$$

auf. Der Satz 7.3.3 ergibt, daß die Komponenten von $\mathbf{v}_{\pm}(\varphi)$ dem Raum $L^2([-\pi, \pi])$ angehören. Somit ist (4.22) als Differenz zweier Funktionen aus $L^1([-\pi, \pi])$ zu verstehen. Schreiben wir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}_{\infty} + \text{grad } \Phi_+(\mathbf{x}), & |\mathbf{x}| < 1, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}_{\infty} + \mathbf{Zv}_1(\mathbf{x}) + \text{grad } \Phi_-(\mathbf{x}), & |\mathbf{x}| > 1, \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{-\mathbf{y}}{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}, \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2} \right) \quad (4.24)$$

ist, so kann dieser Ausdruck in folgender Form

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_-(\varphi)^2 - \mathbf{v}_+(\varphi)^2 &= (v_{r-}(\varphi))^2 - (v_{r+}(\varphi))^2 + \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi}(\varphi) \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}(\varphi) \right)^2 + \\ &\quad + (2v_{\infty} \sin \varphi - Z) \left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}(\varphi) - \frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi}(\varphi) - \frac{1}{2}Z \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

geschrieben werden. Die Gleichheit der Normalableitungen auf dem Kreis ergibt

$$(v_{r-}(\varphi))^2 - (v_{r+}(\varphi))^2 = 0 \quad (4.26)$$

in $L^1([-\pi, \pi])$, und die lineare Eigenschaft des Kreises (Satz 2.1.6 und Beispiel 2.2.1) ergibt

$$\left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi}(\varphi) \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}(\varphi) \right)^2 = 0 \quad (4.27)$$

in $L^1([-\pi, \pi])$ und

$$\left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}(\varphi) - \frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi}(\varphi) \right) = 2 \frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}(\varphi) \quad (4.28)$$

in $L^2([-\pi, \pi])$. Somit ist

$$\mathbf{v}_-(\varphi)^2 - \mathbf{v}_+(\varphi)^2 = (2v_\infty \sin \varphi - Z) \left(2 \frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}(\varphi) - Z \right). \quad (4.29)$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung dem Raum $L^2([-\pi, \pi])$ angehört, muß auch die linke Seite diesem Raum angehören. Wir setzen

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}(\varphi) = u(\varphi) \in L^2([-\pi, \pi]) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial r}(\varphi) = Hu(\varphi) \in L^2([-\pi, \pi]). \quad (4.31)$$

Der Operator H ist durch

$$Hu(\varphi) = \frac{1}{2\pi} V.P. \int_{-\pi}^{\pi} u(s) \cotan \left(\frac{s - \varphi}{2} \right) ds \quad (4.32)$$

gegeben. Die Gleichung (4.13) lautet nun

$$\begin{aligned} & \gamma_1(\varphi)(Hu(\varphi) + v_\infty \cos \varphi) = \\ & = \rho \gamma_2(\varphi) \left(2C + (2v_\infty \sin \varphi - Z) \left(u(\varphi) - \frac{1}{2}Z \right) \right), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \end{aligned} \quad (4.33)$$

und die Gleichung (4.20) lautet

$$\begin{aligned} & \gamma_1(\varphi)(Hu(\varphi) + v_\infty \cos \varphi) = \rho \gamma_2(\varphi) (2v_\infty \sin \varphi - Z) \left(u(\varphi) - \frac{1}{2}Z \right), \\ & \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

In beiden Fällen erhalten wir mit

$$f(\varphi) = \arctan \left(\frac{\rho \gamma_2(\varphi) (2v_\infty \sin \varphi - Z)}{\gamma_1(\varphi)} \right) \quad (4.35)$$

eine Hilbert-Gleichung (4.1).

4.2 Die Eigenschaften des Operators H

Wie schon erwähnt, betrachten wir in diesem Abschnitt den Operator H von $L^2([-\pi, \pi])$ in $L^2([-\pi, \pi])$ definiert durch

$$Hu(\varphi) = V.P. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(s) \cotan \left(\frac{s - \varphi}{2} \right) ds. \quad (4.36)$$

Zunächst wird im Hilfssatz 4.2.1 gezeigt, wie der reelle und der imaginäre Teil auf dem Einheitskreis einer in der Einheitskreisscheibe analytischen Funktion mit diesem Operator verbunden werden und wie dieser Operator mit dem gewöhnlichen Cauchy-Operator verbunden ist. Aus Hilfssatz 4.2.3 folgt, daß dieser Operator die tangentiale Ableitung auf dem Einheitskreis einer in der Einheitskreisscheibe harmonischen Funktion in ihre Normalableitung abbildet. In der Lösung der Hilbert-Gleichung (4.1) tauchen häufig die Ausdrücke vom Typ

$$\mathbf{H} \left(e^{-\mathbf{H}(\varphi)} g(\varphi) \right) \quad (4.37)$$

auf. In Hilfssätzen 4.2.5 und 4.2.6 werden diese Ausdrücke in einigen Fällen vereinfacht. Die meisten (alle bis auf einige Teile von 4.2.5 und 4.2.6) hier angegebenen Hilfssätze wurden im GACHOV [4], PICHTEEV [16] und HEIER-WOLFERSDORF [5] bewiesen.

Hilfssatz 4.2.1 *Sei $\Psi : \overline{K(0,1)} \longrightarrow \mathbf{C}$ eine analytische Funktion, $u(\varphi) = \operatorname{Re} \Psi(e^{i\varphi})$, $v(\varphi) = \operatorname{Im} \Psi(e^{i\varphi})$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} v(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(s) ds &= v(\varphi) - \operatorname{Im} \Psi(0) = -\mathbf{H}u(\varphi), \\ u(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(s) ds &= u(\varphi) - \operatorname{Re} \Psi(0) = \mathbf{H}v(\varphi). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Für eine Funktion $w : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ gilt

$$\mathbf{H}w(-i \ln t) = \frac{1}{\pi} \int_{\partial K(0,1)} \frac{w(-i \ln \tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(s) ds, \quad t \in \partial K(0,1). \quad (4.39)$$

Bemerkung 4.2.2 Ist $u \in C_s^{0,\alpha}([-\pi, \pi])$, so existiert das Integral $\mathbf{H}u(\varphi)$ in jedem Punkt $\varphi \in \Gamma$, wo u Hölder-stetig ist, und $\mathbf{H}u$ ist in diesen Punkten auch Hölder-stetig. Ist φ_0 ein Punkt, wo u eine Sprungstelle hat, so haben wir in einer Umgebung von φ_0

$$\mathbf{H}u(\varphi) = \frac{u(\varphi_0-) - u(\varphi_0+)}{\pi} \ln |\varphi - \varphi_0| + C_0(\varphi), \quad (4.40)$$

wobei $C_0(\varphi)$ in φ_0 Hölder-stetig ist. Der Operator $u \mapsto \mathbf{H}u$ ist in $L^p([-\pi, \pi])$ für $1 < p < \infty$ beschränkt. Dieser Operator ist in $H^m([-\pi, \pi])$ für $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ auch beschränkt.

Hilfssatz 4.2.3 Es gilt

$$\begin{aligned} H(\cos k\varphi) &= -\sin k\varphi, \\ H(\sin k\varphi) &= \cos k\varphi, \quad k \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Hilfssatz 4.2.4 Es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(s) H v(s) ds = - \int_{-\pi}^{\pi} v(s) H u(s) ds. \quad (4.42)$$

Hilfssatz 4.2.5 Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ eine stückweise glatte beschränkte Funktion. Es gilt

$$H(e^{Hf(\varphi)} \cos f(\varphi)) = -e^{Hf(\varphi)} \sin f(\varphi) + \sin \bar{f}, \quad (4.43)$$

$$H(e^{Hf(\varphi)} \sin f(\varphi)) = e^{Hf(\varphi)} \cos f(\varphi) - \cos \bar{f}, \quad (4.44)$$

$$H(e^{Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) + k\varphi]) = -e^{Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) + k\varphi], \quad (4.45)$$

$$H(e^{Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) + k\varphi]) = e^{Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) + k\varphi], \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} H(e^{Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) - \varphi]) &= -e^{Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) - \varphi] + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Hf(s)} \sin[f(s) - s] ds, \\ &= -e^{Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) - \varphi] + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Hf(s)} \sin[f(s) - s] ds, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} H(e^{Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) - \varphi]) &= e^{Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) - \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(s - \bar{f}) f(s) ds \\ &= e^{Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) - \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Hf(s)} \cos[f(s) - s] ds, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} H(e^{Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) - 2\varphi]) &= -e^{Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) - 2\varphi] + \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} e^{Hf(s)} \sin[f(s) - 2s] ds, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} H(e^{Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) - 2\varphi]) &= e^{Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) - 2\varphi] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Hf(s)} \cos[f(s) - 2s] ds, \end{aligned} \quad (4.50)$$

wobei $k \in \mathbf{N}$ und

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds \quad (4.51)$$

sind.

Beweis. Die Behauptungen (4.43) bis (4.46) erfolgen durch Anwendung von Hilfssatz 4.2.1 auf die Funktionen

$$\Theta_k(\theta) = \theta^k e^{\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{e^{is} + \theta}{e^{is} - \theta} ds} \quad (4.52)$$

für $k \in \mathbf{N} \cup \mathbf{0}$. Die Funktion

$$\Lambda(\theta) = \frac{1}{\theta} (\Theta_0(\theta) - \Theta_0(0)) = \frac{1}{\theta} \left(e^{\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{e^{is} + \theta}{e^{is} - \theta} ds} - e^{i\bar{f}} \right) \quad (4.53)$$

hat eine hebbare Singularität in $\theta = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Lambda(e^{i\varphi}) &= e^{\operatorname{Hf}(\varphi)} \cos(f(\varphi) - \varphi) - \cos(\varphi - \bar{f}), \\ \operatorname{Im} \Lambda(e^{i\varphi}) &= e^{\operatorname{Hf}(\varphi)} \sin(f(\varphi) - \varphi) + \sin(\varphi - \bar{f}), \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\Lambda(0) = \Theta'_0(0) = \frac{ie^{i\bar{f}}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-is} f(s) ds, \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Lambda(0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(s - \bar{f}) f(s) ds, \\ \operatorname{Im} \Lambda(0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s - \bar{f}) f(s) ds. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Nun folgt aus den Hilfssätzen 4.2.1 und 4.2.3 die Richtigkeit der Gleichungen (4.47) und (4.48). Da der letzte Term nur eine Konstante ist und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Hf}(\varphi) d\varphi = 0 \quad (4.57)$$

für jede Funktion f gilt, erhalten wir den zweiten Ausdruck für diese Formel. Die letzten beiden Gleichungen erhält man durch analoge Betrachtung der Funktion

$$\Xi(\theta) = \frac{1}{\theta^2} (\Theta_0(\theta) - \Theta_0(0) - \theta \Theta'_0(0)). \quad (4.58)$$

Q.E.D.

Hilfssatz 4.2.6 Sei $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ eine stückweise glatte beschränkte Funktion. Es gilt

$$H(e^{-Hf(\varphi)} \cos f(\varphi)) = e^{-Hf(\varphi)} \sin f(\varphi) - \sin \bar{f}, \quad (4.59)$$

$$H(e^{-Hf(\varphi)} \sin f(\varphi)) = -e^{-Hf(\varphi)} \cos f(\varphi) + \cos \bar{f}, \quad (4.60)$$

$$H(e^{-Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) - k\varphi]) = e^{-Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) - k\varphi], \quad (4.61)$$

$$H(e^{-Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) - k\varphi]) = -e^{-Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) - k\varphi], \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} H(e^{-Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) + \varphi]) &= e^{Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) + \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(s)} \sin[f(s) + s] ds, \\ &= e^{-Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) + \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Hf(s)} \sin[f(s) + s] ds, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} H(e^{-Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) + \varphi]) &= -e^{-Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) + \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(s + \bar{f}) f(s) ds \\ &= -e^{-Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) + \varphi] + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(s)} \cos[f(s) + s] ds, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} H(e^{-Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) + 2\varphi]) &= e^{-Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) + 2\varphi] \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(s)} \sin[f(s) + 2s] ds, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} H(e^{-Hf(\varphi)} \sin[f(\varphi) + 2\varphi]) &= -e^{-Hf(\varphi)} \cos[f(\varphi) + 2\varphi] + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Hf(s)} \cos[f(s) - 2s] ds, \end{aligned} \quad (4.66)$$

wobei $k \in \mathbf{N}$ und

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds \quad (4.67)$$

sind.

Beweis. Die Behauptung erfolgt direkt durch Einsetzen von $-f$ statt f in Hilfssatz 4.2.5. Q.E.D.

4.3 Die Hilbert-Gleichung

Es seien $f, g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ zwei stückweise Hölder-stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$f(\pi) - f(-\pi) = m\pi, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (4.68)$$

Es gelte auch

$$|f(x+) - f(x-)| < \frac{\pi}{2}, \quad (4.69)$$

für jedes x , wo f nicht stetig ist. Wir betrachten die Gleichung

$$\sin f(\varphi)u(\varphi) + \cos f(\varphi)\mathsf{H}u(\varphi) = g(\varphi) \quad (4.70)$$

in $L^2([-\pi, \pi])$, wenn $m = 0, 1, -1$ ist.

Es sei

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(s)ds \quad (4.71)$$

Die Funktion $u - c_1$ genügt der Gleichung

$$\sin f(\varphi)(u(\varphi) - c_1) + \cos f(\varphi)\mathsf{H}(u(\varphi) - c_1) = g(\varphi) - c_1 \sin f(\varphi). \quad (4.72)$$

Diese Gleichung kann durch die Substitution $v = u - c_1$ auf eine dominante Gleichung (siehe §7.6) reduziert werden. Die Windungszahl dieser Gleichung (siehe Definition 7.6.2) ist gleich

$$\begin{aligned} \sin f(\varphi)(v(\varphi)) + \frac{i \cos f(\varphi)}{i\pi} \int_{K(0,1)} \frac{v(-i \ln \tau)}{\tau - e^{i\varphi}} d\tau &= \\ &= g(\varphi) - c_1 \sin f(\varphi) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Die Lösungen der dominanten Gleichung werden in §7.6 betrachtet. Hier wird mit Hilfe dieser Lösungen die Lösung der Hilbert-Gleichung für $m = 0, m = 1$ und $m = -1$ betrachtet.

Satz 4.3.1 Ist $m = 0$ in (4.68), gilt (4.69) und

$$\bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi \neq 0, \quad (4.75)$$

so ist die einzige Lösung der Gleichung (4.70) in $L^2([-\pi, \pi])$ durch

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \sin f(\varphi)g(\varphi) - \cos f(\varphi)e^{\mathbf{H}f(\varphi)}\mathbf{H}\left(e^{-\mathbf{H}f(\varphi)}g(\varphi)\right) \\ &\quad - \cos f(\varphi)e^{\mathbf{H}f(\varphi)}\frac{\cotan \bar{f}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbf{H}f(s)}g(s)ds \end{aligned} \quad (4.76)$$

gegeben.

Beweis. Laut Satz 7.6.5 ist

$$\begin{aligned} v(\varphi) &= u(\varphi) - c_1 \\ &= \sin f(\varphi)(g(\varphi) - c_1 \sin f(\varphi)) \\ &\quad - \cos f(\varphi)e^{\mathbf{H}f(\varphi)}\mathbf{H}\left[e^{-\mathbf{H}f(\varphi)}(g(\varphi) - c_1 \sin f(\varphi))\right] \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \cos f(\varphi)e^{\mathbf{H}f(\varphi)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbf{H}f(s)}(g(s) - c_1 \sin f(s))ds \end{aligned} \quad (4.77)$$

die einzige (komplexwertige) Lösung der Gleichung (4.73) und somit auch von (4.72) in $L^2([-\pi, \pi])$. Wir erhalten eine reellwertige Lösung nur für

$$c_1 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbf{H}f(s)}g(s)ds}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbf{H}f(s)}\sin f(s)ds}. \quad (4.78)$$

Unter Benutzung von

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbf{H}f(s)}\cos f(s) &= \cos \bar{f}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbf{H}f(s)}\sin f(s) &= \sin \bar{f}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

was aus (4.57), (4.59) und (4.60) folgt, erhalten wir (4.76). Q.E.D.

Satz 4.3.2 Ist $m = 1$ in (4.68), gilt (4.69) und

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}\left(\frac{\varphi}{2} + f(\varphi)\right)} \cos f(\varphi)d\varphi \neq 0, \quad (4.80)$$

so ist die allgemeine reellwertige Lösung der Gleichung (4.70) in $L^2([-\pi, \pi])$ durch

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \sin f(\varphi)g(\varphi) \\ &\quad - \cos f(\varphi)e^{-i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})}\mathbf{H}\left(e^{i\frac{\varphi}{2} - \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})}g(\varphi)\right) \\ &\quad + (b + ic)\cos f(\varphi)e^{-i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \end{aligned} \quad (4.81)$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned}
 b + ic &= \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi} \left\{ 2\pi c_1 \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) d\varphi \\
 &\quad - i \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\frac{\varphi}{2} - \bar{f}) - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) d\varphi \\
 &\quad \left. - c_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos f(\varphi) e^{i(\frac{\varphi}{2} - \bar{f}) + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \right\} \\
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

und c_1 eine reelle Konstante sind. Für die Lösung gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi = 2\pi c_1. \tag{4.83}$$

Beweis. Laut Satz 7.6.5 ist

$$\begin{aligned}
 v(\varphi) &= u(\varphi) - c_1 = \\
 &\sin f(\varphi)(g(\varphi) - c_1 \sin f(\varphi)) \\
 &- \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} H \left[e^{i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) \right] \\
 &- \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{s}{2} - H(f(s) - \frac{s}{2})} g(s) ds \\
 &+ c_1 \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} H \left[e^{i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \sin f(\varphi) \right] \\
 &+ c_1 \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{s}{2} - H(f(s) - \frac{s}{2})} \sin f(s) ds \\
 &+ (b_2 + ic_2) \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})}
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (4.73) bzw. (4.72) in $L^2([-\pi, \pi])$. Sie kann unter Benutzung von Hilfssatz 4.2.5 vereinfacht werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 u(\varphi) - c_1 &= \sin f(\varphi) g(\varphi) \\
 &- \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} H \left[e^{i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) \right] \\
 &- c_1 + (b + ic + c_1 e^{i(\varphi - \bar{f})}) \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})},
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
 u(\varphi) &= \sin f(\varphi) g(\varphi) \\
 &- \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} H \left[e^{i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) \right] \\
 &+ (b + ic + c_1 e^{i(\varphi - \bar{f})}) \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})}.
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Aus

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi = 2\pi c_1 \quad (4.87)$$

folgt

$$\begin{aligned} b + ic &= \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi} \left\{ 2\pi c_1 - \int_{-\pi}^{\pi} \sin f(\varphi) g(\varphi) d\varphi + \right. \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} H \left[e^{i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) \right] d\varphi \quad (4.88) \\ &\quad \left. - c_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos f(\varphi) e^{i(\frac{\varphi}{2} - \bar{f}) + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \right\}. \end{aligned}$$

Die Benutzung von den Hilfssätzen 4.2.5, 4.2.6 und 4.2.4 ergibt

$$\begin{aligned} b + ic &= \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi} \left\{ 2\pi c_1 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) d\varphi \\ &\quad - i \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\frac{\varphi}{2} - \bar{f}) - H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) d\varphi \\ &\quad \left. - c_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos f(\varphi) e^{i(\frac{\varphi}{2} - \bar{f}) + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \right\}. \quad (4.89) \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Lösung reellwertig ist. Die Funktion $\text{Im } u(\varphi)$ erfüllt die Gleichung

$$\sin f(\varphi) \text{Im } u(\varphi) + \cos f(\varphi) H(\text{Im } u(\varphi)) = 0 \quad (4.90)$$

unter der Bedingung

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Im } u(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4.91)$$

Bei den Funktionen, die dieser Bedingung genügen, haben Cauchysche und Hilbert-Operator gleiche Wirkung (Hilfssatz 4.2.1). Somit gilt laut Satz 7.6.5

$$\text{Im } u(\varphi) = (b_3 + ic_3) \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})}, \quad (4.92)$$

wobei b_3 und c_3 zwei reellwertige Konstanten sind. Aus (4.80) und (4.91) folgt $b_3 + ic_3 = 0$. Q.E.D.

Folgerung 4.3.3 Ist $m = 1$ in (4.68), gilt (4.69) und

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \cos f(\varphi) d\varphi \neq 0, \quad (4.93)$$

so ist die einzige reellwertige Lösung der Gleichung (4.70) in $L^2([-\pi, \pi])$, die auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi = 0 \quad (4.94)$$

genügt, mit

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \sin f(\varphi) g(\varphi) \\ &\quad - \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} - \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \mathbf{H} \left(e^{i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(\frac{\varphi}{2} + f(\varphi))} g(\varphi) \right) \\ &\quad + (b + ic) \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(\frac{\varphi}{2} + f(\varphi))} \end{aligned} \quad (4.95)$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned} b + ic &= \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi} \cdot \\ &\cdot \left\{ -i \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\frac{\varphi}{2} - \bar{f}) - \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) d\varphi \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{\varphi}{2} - \mathbf{H}(f(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) d\varphi \right\} \end{aligned} \quad (4.96)$$

ist.

Satz 4.3.4 Ist $m = -1$ in (4.68), gilt (4.69) und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin f(\varphi) e^{i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(f(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} d\varphi \neq 0, \quad (4.97)$$

so kann die Gleichung (4.70) eine Lösung in $L^2([-\pi, \pi])$ nur dann haben, wenn die Größe

$$c = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) e^{i\frac{\varphi}{2} - \mathbf{H}(f(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} d\varphi}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin f(\varphi) e^{i\frac{\varphi}{2} - \mathbf{H}(f(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} d\varphi} \quad (4.98)$$

reell ist. Eine Lösung mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi = 0 \quad (4.99)$$

ist nur bei $c = 0$ möglich. Falls eine reellwertige Lösung der Gleichung (4.70) mit (4.99) existiert, so ist sie durch

$$u(\varphi) = \sin f(\varphi)g(\varphi) - \cos f(\varphi)e^{i\frac{\varphi}{2} + H(f(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} H \left[e^{-i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) \right] \quad (4.100)$$

gegeben.

Beweis. Laut Satz 7.6.5 hat die Gleichung (4.73) eine Lösung nur dann, wenn gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} [g(\varphi) - c_1 \sin f(\varphi)] e^{i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} d\varphi = 0. \quad (4.101)$$

Daraus folgt

$$c_1 = c = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} d\varphi}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin f(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} - H(f(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} d\varphi}. \quad (4.102)$$

Ist diese Größe nicht reellwertig, so ist die erhaltene Lösung wegen (4.71) auch nicht reellwertig. Daraus folgt auch, daß es keine Lösung mit (4.99) im Fall $c \neq 0$ gibt. Der Satz 7.6.5 liefert ebenfalls (4.100) als einzige mögliche (komplexwertige) Lösung im Fall $c = 0$. Q.E.D.

4.4 Fall I (Der volle Kreis)

In diesem Abschnitt wird das Problem 4.1.1 betrachtet. Es wird eine explizite Lösung angegeben und ihre Eindeutigkeit bewiesen. Dieses Problem wird nur vollständigkeitshalber betrachtet, weil das Wesentliche schon in WOLFERSDORF [22] gezeigt wurde. Dort wurde eine Quelle und ein Wirbel innerhalb des Kreises, eine beliebige für Innen- und Außenbereich gleiche Zirkulation und beliebig zugehörige Massen und Geschwindigkeitsverteilung im Innengebiet angenommen. Eine durch eine Formel angegebene Lösung wurde für

$$K(\varphi) = \frac{\gamma_2(\varphi)}{\gamma_1(\varphi)} \quad (4.103)$$

beschränkte Hölder-stetige Funktion angegeben und die Eindeutigkeit bewiesen. Die hier gegebene Lösung setzt nur $\text{supp } \gamma_1 = [-\pi, \pi]$ und die stückweise Hölder-Stetigkeit von γ_1 und γ_2 voraus, d.h. γ_1 kann auch in einzelnen Punkten null sein. Hier ist die Strömung innerhalb der Kreisscheibe

quellen- und wirbelfrei, und die Zirkulation außerhalb der Kreisscheibe ist frei wählbar. Für jede Zirkulation $Z \in \mathbf{R}$ erhält man eine Lösung, außer für $Z = 2v_\infty \sin \varphi_0$, wenn $\gamma_1(\varphi_0) = 0$ gilt. Für solche Zirkulationen sind im sechsten Abschnitt zwei Beispiele gegeben. In WOLFERSDORF [22] wurde für den Fall ohne Massen- und Geschwindigkeitsverteilung die komplexe Geschwindigkeit in der Form

$$q(z) = \begin{cases} q_\infty \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{z}w(z) & \text{außerhalb } \Gamma \\ \frac{1}{z}w(z) & \text{innerhalb } \Gamma \end{cases} \quad (4.104)$$

dargestellt. Man erhielt ein Riemann-Hilbertsches Problem, das explizit gelöst werden konnte. Bei uns wurde die Geschwindigkeit in der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_\infty \mathbf{e}_1 + \operatorname{grad} \Phi_+(\mathbf{x}) & \text{innerhalb } \Gamma \\ v_\infty \mathbf{e}_1 + \operatorname{grad} \Phi_-(\mathbf{x}) & \text{außerhalb } \Gamma \end{cases} \quad (4.105)$$

betrachtet. Man erhielt dann eine Hilbert-Gleichung für $\frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}$, und sie wurde gelöst. Dadurch ergeben sich in beiden Fällen auf den ersten Blick zwei verschiedene Formeln für $v_{\varphi+}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, die eigentlich gleich sind. Wie bei der Geraden wird hier nicht der Lösungsvorgang aufgestellt, sondern lediglich die Formel angegeben. Dann wird bewiesen, daß die Formel das Problem löst und die Lösung eindeutig ist.

Satz 4.4.1 *Das Problem 4.1.1 hat höchstens eine Lösung.*

Beweis. Es seien (\mathbf{v}_1, C_1) , (\mathbf{v}_2, C_2) zwei Lösungen von Problem 4.1.1 mit denselben Z , v_∞ und sei $(\mathbf{v}, C) = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, C_1 - C_2)$ ihre Differenz. Für das Paar (\mathbf{v}, C) gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 0, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 0, \\ v_{r+} &= v_{r-}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} v_{\varphi-}(\varphi) d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \operatorname{grad} \Phi_+(x), \quad x \in K(0, 1), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \operatorname{grad} \Phi_-(x), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(0, 1)}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Wegen v_r, v_φ in $D_\Delta^{\frac{1}{2}}(K(0, 1)) \cap D_\Delta^{\frac{1}{2}}(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)})$ gilt $v_{r+} = v_{r-}, v_{\varphi+}, v_{\varphi-} \in L^2([-\pi, \pi])$. Die Gleichheit der Normalableitungen auf dem Einheitskreis und die lineare Eigenschaft des Kreises ergeben

$$u(\varphi) = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_+ \right|_{r=1} = - \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_- \right|_{r=1}. \quad (4.108)$$

Nun lautet das Filtergesetz für (\mathbf{v}, C)

$$\begin{aligned} \gamma_1(\varphi)v_r(\varphi) &= \frac{1}{2}\rho\gamma_2(\varphi)(2C - \mathbf{v}_{1+}(\varphi)^2 + \mathbf{v}_{1-}(\varphi)^2 - \\ &\quad + \mathbf{v}_{2+}(\varphi)^2 - \mathbf{v}_{2-}(\varphi)^2) \\ &= \rho\gamma_2(\varphi)(C - (Z - 2v_\infty \sin \varphi)v_{\varphi+}), \end{aligned} \quad (4.109)$$

d.h.

$$\sin f(\varphi)u(\varphi) + \cos f(\varphi)\mathbf{H}\mathbf{u}(\varphi) = -C \frac{\sin f(\varphi)}{Z - 2v_\infty \sin \varphi}, \quad (4.110)$$

wobei

$$f(s) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\rho\gamma_2(s)(2v_\infty \sin s - Z)}{\gamma_1(s)}\right), & \gamma_1(s) \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}\text{sign}(2v_\infty \sin s - Z) & \gamma_1(s) = 0. \end{cases} \quad (4.111)$$

und $u(\varphi) = v_{\varphi+}(\varphi)$ sind. Dies ist eine Hilbert-Gleichung. Die Windungszahl dieser Gleichung ist gleich

$$k = \text{Ind} \frac{\sin f(\varphi) - i \cos f(\varphi)}{\sin f(\varphi) + i \cos f(\varphi)} = \text{Ind}(-e^{2if(\varphi)}) = 0, \quad (4.112)$$

denn wir haben

$$f(\varphi) \in \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] & 2v_\infty \sin \varphi - Z > 0, \\ [-\frac{\pi}{2}, 0] & 2v_\infty \sin \varphi - Z < 0, \\ \{0\} & 2v_\infty \sin \varphi - Z = 0. \end{cases} \quad (4.113)$$

Somit hat diese Hilbert-Gleichung nur eine Lösung, und die lautet:

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= C \left[e^{\mathbf{H}f(\varphi)} \cos f(\varphi) \mathbf{H} \left(e^{-\mathbf{H}f(\varphi)} \frac{\sin f(\varphi)}{2v_\infty \sin \varphi - Z} \right) - \frac{\sin^2 f(\varphi)}{2v_\infty \sin \varphi - Z} \right. \\ &\quad \left. - e^{\mathbf{H}f(\varphi)} \cos f(\varphi) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbf{H}f(s)} \frac{\sin f(s)}{2v_\infty \sin s - Z} ds \right]. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Aus (4.107) folgt unmittelbar

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4.115)$$

Wir haben aber

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi &= -C \int_{-\pi}^{\pi} \left[\mathbf{H} \left(e^{\mathbf{Hf}(\varphi)} \cos f(\varphi) \right) e^{-\mathbf{Hf}(\varphi)} \frac{\sin f(\varphi)}{2v_\infty \sin \varphi - Z} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin^2 f(\varphi)}{2v_\infty \sin \varphi - Z} \right. \\
&\quad \left. + e^{-\mathbf{Hf}(\varphi)} \cos f(\varphi) \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{Hf}(s)} \frac{\sin f(s)}{2v_\infty \sin s - Z} ds \right] d\varphi \quad (4.116) \\
&= -2C \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{Hf}(\varphi)} \cos f(\varphi) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbf{Hf}(s)} \frac{\sin f(s)}{2v_\infty \sin s - Z} ds d\varphi \\
&= -2C \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho \gamma_1(\varphi) \gamma_2(s) e^{\mathbf{Hf}(\varphi)} e^{-\mathbf{Hf}(s)}}{\sqrt{\gamma_1(\varphi)^2 + 4\rho^2 \gamma_2(\varphi)^2 (Z - 2v_\infty \sin \varphi)^2}} d\varphi ds,
\end{aligned}$$

und dies verschwindet nur für $C = 0$. Somit ist $u = 0$. Daraus und aus der Bedingung im Unendlichen folgt $v_\varphi = 0$ in ganz \mathbf{R}^2 . Die Bedingung im Unendlichen und die Divergenz- und Rotationsfreiheit von v ergeben weiter $v_r = 0$ in ganz \mathbf{R}^2 Q.E.D.

Satz 4.4.2 Gilt $\gamma_1(\varphi) \neq 0$ für die Punkte φ mit $2v_\infty \sin \varphi = Z$ und gibt es keinen scharfen Punkt in $[-\pi, \pi]$, so ist die Lösung von Problem 4.1.1 durch

$$\begin{aligned}
v_r(r, \varphi) &= v_\infty \cos \varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s) \sin(\varphi-s)}{1-2r \cos(\varphi-s)+r^2} ds, \\
v_\varphi(r, \varphi) &= -v_\infty \sin \varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)(\cos(\varphi-s)-r)}{1-2r \cos(\varphi-s)+r^2} ds
\end{aligned} \quad (4.117)$$

innerhalb der Kreisscheibe und durch

$$\begin{aligned}
v_r(r, \varphi) &= v_\infty \cos \varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s) \sin(\varphi-s)}{1-2r \cos(\varphi-s)+r^2} ds, \\
v_\varphi(r, \varphi) &= -v_\infty \sin \varphi + \frac{Z}{r} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)(\cos(\varphi-s)-r)}{1-2r \cos(\varphi-s)+r^2} ds
\end{aligned} \quad (4.118)$$

aufßerhalb der Kreisscheibe gegeben, wobei

$$u(s) = \sin f(s)g(s) - \cos f(s)e^{\mathbf{Hf}(s)}\mathbf{H} \left(e^{-\mathbf{Hf}(s)}g(s) \right), \quad (4.119)$$

$$f(s) = \begin{cases} \arctan \left(\frac{\rho \gamma_2(s)(2v_\infty \sin s - Z)}{\gamma_1(s)} \right), & \gamma_1(s) \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(2v_\infty \sin s - Z) & \gamma_1(s) = 0. \end{cases} \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned}
g(s) &= \frac{v_\infty \gamma_1(s) \cos s + \frac{1}{2} Z \rho \gamma_2(s)(2v_\infty \sin s - Z) - \rho C \gamma_2(s)}{\sqrt{\gamma_1(s)^2 + \rho^2 \gamma_2(s)^2 (2v_\infty \sin s - Z)^2}} \\
&= v_\infty \cos f(s) \cos s + \frac{1}{2} Z \sin f(s) - C \frac{\sin f(s)}{2v_\infty \sin s - Z},
\end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(s)} [v_\infty \cos f(s) \cos s + \frac{1}{2} Z \sin f(s)] ds}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(s)} \frac{\sin f(s)}{2v_\infty \sin(\varphi) - Z} ds} \\
&= - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(s)} \frac{\rho \gamma_2(s) (2v_\infty \sin s - Z)^2 ds}{\sqrt{\gamma_1(s)^2 + \rho^2 \gamma_2(s)^2 (2v_\infty \sin s - Z)^2}}}{2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(s)} \frac{\rho \gamma_2(s) ds}{\sqrt{\gamma_1(s)^2 + \rho^2 \gamma_2(s)^2 (2v_\infty \sin s - Z)^2}}} < 0,
\end{aligned} \tag{4.122}$$

und H aus (4.36) sind. Die Lösung gehört zu $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \partial K(\mathbf{0}, 1))$. Ihre Einschränkungen auf $K(0, 1)$ und $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{K(\mathbf{0}, 1)}$ sind auf $K(0, 1) \cup \mathcal{K}$, bzw. $(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{K(\mathbf{0}, 1)}) \cup \mathcal{K}$, Hölder-stetig fortsetzbar, wobei \mathcal{K} , die Menge aller Punkte $(1, \varphi)$ ist, wo $\gamma_1(\varphi)$ und $\gamma_2(\varphi)$ beide Hölder-stetig sind. In den Punkten $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{1}, \varphi_0)$, wo $\gamma_1(\varphi_0)$ oder $\gamma_2(\varphi_0)$ Sprungstellen haben, ist die Lösung in der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_\pm(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-|\alpha|} + \mathbf{b}_\pm(\mathbf{x}) \tag{4.123}$$

darstellbar, wobei

$$\frac{1}{2} > \alpha = \frac{1}{\pi} (f(x_0-) - f(x_0+)) > -\frac{1}{2} \tag{4.124}$$

und \mathbf{a}_+ , \mathbf{a}_- , \mathbf{b}_+ , \mathbf{b}_- vier in $\overline{K(0, 1)}$ bzw. in $\mathbf{R}^2 \setminus K(\mathbf{0}, 1)$ definierte beschränkte und in einer punktierten Umgebung von \mathbf{x}_0 stetige Funktionen sind.

Beweis. Aus der stückweise Hölder-Stetigkeit von γ_1 und γ_2 folgt, daß die Funktion f auch stückweise Hölder-stetig ist, und daraus ergibt sich, daß u überall außer in endlich vielen Punkten Hölder-stetig ist. Das Cauchy-sche Integral $Hf(\varphi)$ ist in der Nähe eines Unstetigkeitspunktes φ_0 von γ_1 oder γ_2 in der Form

$$Hf(\varphi) = \alpha \ln |\varphi - \varphi_0| + Q(\varphi) \tag{4.125}$$

darstellbar, wobei

$$\alpha = \frac{1}{\pi} (f(\varphi_0-) - f(\varphi_0+)) \tag{4.126}$$

und Q eine in φ_0 Hölder-stetige Funktion sind. Für die Funktion f gilt

$$f(s) \in \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] & 2v_\infty \sin s - Z > 0 \\ [-\frac{\pi}{2}, 0] & 2v_\infty \sin s - Z < 0 \\ \{0\} & 2v_\infty \sin s - Z = 0 \end{cases} \tag{4.127}$$

Daraus folgt $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ und die Abwesenheit von scharfen Punkten ergibt $|\alpha| < \frac{1}{2}$. Die Funktion

$$e^{-Hf(\varphi)} g(\varphi) \tag{4.128}$$

ist bei $\alpha > 0$ in einer Umgebung vom Punkt φ_0 in der Form

$$e^{-Hf(\varphi)}g(\varphi) = B(\varphi)|\varphi - \varphi_0|^{-\alpha} \quad (4.129)$$

darstellbar, wobei B eine stückweise Hölder-stetige Funktion ist. Laut GACHOV [4], §8.4, ist nun die Funktion u bei $\alpha > 0$ auch in der Form

$$u(\varphi) = C(\varphi)|\varphi - \varphi_0|^{-\alpha} + D(\varphi) \quad C, D \text{ stückweise Hölder-stetig} \quad (4.130)$$

darstellbar. Bei $\alpha < 0$ ist die Funktion (4.128) Hölder-stetig, und für die Funktion e^{Hf} gilt

$$e^{Hf(\varphi)} = E(\varphi)|\varphi - \varphi_0|^{\alpha} \quad E \text{ stückweise Hölder-stetig}, \quad (4.131)$$

und somit ist die Funktion u in der Form

$$u(\varphi) = C(\varphi)|\varphi - \varphi_0|^{\alpha} + D(\varphi) \quad C, D \text{ stückweise Hölder-stetig} \quad (4.132)$$

darstellbar. Daraus folgt $u \in L^2([-\pi, \pi])$. Hieraus folgt auch, daß Hu überall außer in endlich vielen Punkten Hölder-stetig ist und $Hu \in L^2([-\pi, \pi])$.

Die Konstante C ist so gewählt, daß gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(\varphi)}g(\varphi)d\varphi = 0. \quad (4.133)$$

Für die Funktion

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{e^{is}-\theta}{e^{is}+\theta} ds} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-Hf(s)}g(s) \frac{e^{is}-\theta}{e^{is}+\theta} ds, \quad \theta \in \mathbf{C} \setminus \partial \mathbf{K}(0, 1) \quad (4.134)$$

gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Psi_+(e^{i\varphi}) &= u(\varphi) \\ \operatorname{Im} \Psi_+(e^{i\varphi}) &= -\cos f(\varphi)g(\varphi) - \sin f(\varphi)e^{Hf(\varphi)}H(e^{-Hf(\varphi)}g(\varphi)). \end{aligned} \quad (4.135)$$

Daraus folgt

$$Hu(\varphi) = \cos f(\varphi)g(\varphi) + \sin f(\varphi)e^{Hf(\varphi)}H(e^{-Hf(\varphi)}g(\varphi)) \quad (4.136)$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)d\varphi = 0. \quad (4.137)$$

Sei nun

$$\Xi(x + iy) = v_x(x, y) - iv_y(x, y) - v_\infty, \quad (4.138)$$

d.h.

$$\Xi(re^{i\varphi}) = (v_r(r, \varphi) - iv_\varphi(r, \varphi))e^{-i\varphi} - v_\infty \quad (4.139)$$

innerhalb der Einheitskreisscheibe bzw.

$$\Xi(x + iy) = v_x(x, y) - iv_y(x, y) - v_\infty + \frac{iZ}{x + iy}, \quad (4.140)$$

d.h.

$$\Xi(re^{i\varphi}) = (v_r(r, \varphi) - iv_\varphi(r, \varphi))e^{-i\varphi} - v_\infty + \frac{iZ}{r}e^{-i\varphi} \quad (4.141)$$

außerhalb der Einheitskreisscheibe. Aus (4.117) und (4.118) folgt

$$\Xi(\theta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial K(0,1)} \frac{\tau u(-i \ln \tau)}{\tau - \theta} d\tau. \quad (4.142)$$

Dies ist eine in $\mathbf{C} \setminus \partial \mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)$ analytische Funktion, die im Unendlichen gegen null strebt, und damit ist (4.8), (4.9) und (4.10) erfüllt. Die Plemeljschen Formeln ergeben

$$v_{r+}(\varphi) = v_{r-}(\varphi) = v_\infty \cos \varphi + \operatorname{Re} \left(e^{i\varphi} \Xi_\pm(e^{i\varphi}) \right) = v_\infty \cos \varphi - \mathsf{H}u(\varphi) \quad (4.143)$$

(siehe Hilfssatz 4.2.1),

$$v_{\varphi+}(\varphi) = -\operatorname{Im} \left(e^{i\varphi} \Xi_+(e^{i\varphi}) \right) - v_\infty \sin \varphi = u(\varphi) - v_\infty \sin \varphi, \quad (4.144)$$

und

$$v_{\varphi-}(\varphi) = -\operatorname{Im} \left(e^{i\varphi} \Xi_-(e^{i\varphi}) \right) - v_\infty \sin \varphi + Z = -u(\varphi) - v_\infty \sin \varphi + Z. \quad (4.145)$$

Der Satz 7.3.3 und die Tatsache $u \in L^2([-\pi, \pi])$ ergeben nun v_r, v_φ in $D_\Delta^\frac{1}{2}(K(0, 1)) \cap D_\Delta^\frac{1}{2}(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)})$ für jedes $R > 1$. Die Gleichung (4.11)

ist auch schon bewiesen. Aus (4.137) folgt (4.12). Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{1}{2}\rho\gamma_2(\varphi)(2C+\mathbf{v}_-(\varphi)^2-\mathbf{v}_+(\varphi)^2)-\gamma_1(\varphi)v_\infty \cos \varphi}{\sqrt{\rho^2\gamma_2(\varphi)^2(Z-2v_\infty \sin \varphi)^2+\gamma_1(\varphi)^2}} = \\
& \frac{\frac{1}{2}\rho\gamma_2(\varphi)[2C+(Z-2u(\varphi))(Z-2v_\infty \sin \varphi)]-\gamma_1(\varphi)v_\infty \cos \varphi}{\sqrt{\rho^2\gamma_2(\varphi)^2(Z-2v_\infty \sin \varphi)^2+\gamma_1(\varphi)^2}} = \\
& = \frac{C \sin f(\varphi)}{2v_\infty \sin \varphi - Z} - \frac{1}{2}(Z-2u(\varphi)) \sin f(\varphi) - v_\infty \cos \varphi \cos f(\varphi) = \\
& = -g(\varphi) + \sin f(\varphi)u(\varphi) = \\
& = -g(\varphi) + \sin^2 f(\varphi)g(\varphi) \\
& - \sin f(\varphi) \cos f(\varphi) e^{\mathbf{Hf}(\varphi)} \mathbf{H} \left(e^{-\mathbf{Hf}(\varphi)} g(\varphi) \right) = \\
& = \cos f(\varphi) \left[-\cos f(\varphi)g(\varphi) - \sin f(\varphi) e^{\mathbf{Hf}(\varphi)} \mathbf{H} \left(e^{-\mathbf{Hf}(\varphi)} g(\varphi) \right) \right] = \\
& = -\cos f(\varphi) \mathbf{H} u(\varphi) = \\
& = \frac{\gamma_1(\varphi)(v_r(\varphi)-v_\infty \cos \varphi)}{\sqrt{\rho^2\gamma_2(\varphi)^2(Z-2v_\infty \sin \varphi)^2+\gamma_1(\varphi)^2}},
\end{aligned} \tag{4.146}$$

und damit ist (4.13) bewiesen. Q.E.D.

Bemerkung 4.4.3 Wenn es scharfe Punkte auf Γ gibt, erhalten wir durch (4.117) und (4.118) ebenfalls eine Lösung von Problem 4.1.1 ohne $v_r, v_\varphi \in D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(\partial K(0, 1)) \cap D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(\partial K(0, R) \setminus \overline{\partial K(0, 1)})$. Diese Lösung gehört auch zu $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)})$. Ihre Einschränkungen auf $K(0, 1)$ und $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)}$ sind auf $K(0, 1) \cup \mathcal{K}$, bzw. $(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)}) \cup \mathcal{K}$, Hölder-stetig fortsetzbar, wobei \mathcal{K} , die Menge aller Punkte $(1, \varphi)$ ist, wo $\gamma_1(\varphi)$ und $\gamma_2(\varphi)$ beide Hölder-stetig sind. In den Punkten $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{1}, \varphi_0)$, wo $\gamma_1(\varphi_0)$ oder $\gamma_2(\varphi_0)$ Sprungstellen haben, ist die Lösung in der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_\pm(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-|\alpha|} + \mathbf{b}_\pm(\mathbf{x}) \tag{4.147}$$

darstellbar, wobei

$$\alpha = \frac{1}{\pi} (f(x_0+) - f(x_0-)), \quad |\alpha| \leq \frac{1}{2} \tag{4.148}$$

und \mathbf{a}_+ , \mathbf{a}_- , \mathbf{b}_+ , \mathbf{b}_- vier in $\overline{K(0, 1)}$ bzw. in $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)}$ definierte beschränkte und in einer punktierten Umgebung von \mathbf{x}_0 stetige Funktionen sind.

Bemerkung 4.4.4 Durch Benutzung von Hilfssatz 4.2.6 kann die Formel für u in (4.119) vereinfacht werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
u(s) &= v_\infty \cos f(s) \sin(f(s) - s) + \frac{1}{2}Z \\
&+ \left(\cos \bar{f} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\zeta - \bar{f}) f(\zeta) d\zeta \right) e^{-\mathbf{Hf}(s)} \cos f(s) \\
&+ C \left[e^{\mathbf{Hf}(s)} \cos f(s) \mathbf{H} \left(e^{-\mathbf{Hf}(s)} \frac{\sin \mathbf{f}(s)}{2v_\infty \sin s - Z} \right) - \frac{\sin^2 \mathbf{f}(s)}{2v_\infty \sin s - Z} \right].
\end{aligned} \tag{4.149}$$

Bemerkung 4.4.5 Die Funktion u ist die Lösung der Gleichung

$$\sin f(\varphi)u(\varphi) + \cos f(\varphi)\mathbf{H}u(\varphi) = \mathbf{g}(\varphi). \quad (4.150)$$

Im Beweis von Satz 4.1.1 ist gezeigt, daß die Windungszahl dieser Gleichung Null ist. Somit hat diese Gleichung genau eine Lösung für jedes C , und C wird aus

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(s)ds = 0 \quad (4.151)$$

bestimmt.

Bemerkung 4.4.6 Ist $\gamma_2 = 0$, so erhalten wir $g(s) = v_\infty \cos s$, $u(s) = -v_\infty \sin s$, $v_{r\pm}(s) = 0$, $v_{\varphi-}(s) = -2v_\infty \sin s$, $s \in [-\pi, \pi]$, d.h. die klassische Lösung für das Umfließen eines Kreises.

Bemerkung 4.4.7 In WOLFERSDORF [22] ist die Formel

$$\begin{aligned} \Psi &= D \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e^{-\mathbf{H}\nu} - q_\infty \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \sin s - \frac{q_\infty}{\sqrt{1+\lambda^2}} e^{-\mathbf{H}\nu} \mathbf{H} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sin s e^{\mathbf{H}\nu} \right] \\ &\quad - \frac{c}{1+\lambda^2} \mathbf{H}[K] + \frac{c}{\sqrt{1+\lambda^2}} e^{-\mathbf{H}\nu} \mathbf{H} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \mathbf{H}[K] e^{\mathbf{H}\nu} \right], \end{aligned} \quad (4.152)$$

wobei $\Psi(s) = v_{\varphi-}(s) - 2v_\infty \sin s$, $\nu(s) = \arctan \lambda(s)$, $q_\infty = v_\infty$, $K(s) = \frac{\gamma_2(s)}{\gamma_1(s)}$, $\lambda(s) = 2\rho q_\infty K(s)$,

$$D = \tan \bar{\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} (q_\infty \sin s - cH[K]) e^{H\nu} ds, \quad (4.153)$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu ds \quad (4.154)$$

und

$$c = -\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \lambda(q_\infty \sin s + \Psi) ds}{\int_{-\pi}^{\pi} K ds} \quad (4.155)$$

ist, angegeben. Unter Benutzung der Hilfssätze 4.2.5, 4.2.6 und von Satz 4.3.1 kann man zeigen, daß

$$u(s) + \Psi(s) = -v_\infty \sin \varphi \quad (4.156)$$

gilt, wobei u aus (4.119) ist.

4.5 Fall II (Ein Teil des Kreises)

In diesem Abschnitt wird das Problem 4.1.2 betrachtet. Hier wird nicht für alle möglichen Zirkulationen eine Lösung existieren. Wir definieren zunächst die Funktion f durch

$$f(\varphi) = \arctan\left(\frac{2\rho v_\infty \gamma_2(\varphi)}{\gamma_1(\varphi)}\right) \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (4.157)$$

und die vier Mengen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 durch

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{ 2v_\infty \sin \varphi : \varphi \in \mathbf{T}, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \pi - \varphi, -\pi - \varphi \notin \mathbf{T} \right\} \\ Q_2 &= \left\{ 2v_\infty \sin \varphi : \varphi \in \mathbf{T}, |\varphi| > \frac{\pi}{2}, \pi - \varphi \text{ oder } -\pi - \varphi \in \mathbf{T} \right\} \\ Q_3 &= \{2v_\infty \sin \varphi : \varphi \in \mathbf{T}\} \setminus (Q_1 \cup Q_2), \\ Q_4 &= \mathbf{R} \setminus (\mathbf{Q}_1 \cup \mathbf{Q}_2 \cup \mathbf{Q}_3), \end{aligned} \quad (4.158)$$

wobei \mathbf{T} aus (4.14) ist. Es wird gezeigt, daß eine Lösung nur für $Z \in Q_1$ existiert. Man merke, daß die Menge Q_1 auch leer sein kann. Andernfalls kann es eine Lösung nur in bestimmten Ausnahmefällen geben. Zunächst betrachten wir den Fall $Z \in Q_1$:

Satz 4.5.1 *Ist $Z \in Q_1$, so hat das Problem 4.1.2 höchstens eine Lösung.*

Beweis. Es seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ zwei Lösungen von Problem 4.1.2 mit denselben Z, v_∞ und sei $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ihre Differenz. Für die Funktion \mathbf{v} gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 0, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 0, \\ v_{r+} &= v_{r-}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} v_{\varphi-}(\varphi) d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \operatorname{grad} \Phi_+(x), \quad x \in K(0, 1), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \operatorname{grad} \Phi_-(x), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(0, 1)}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

Wegen v_r, v_φ in $D_\Delta^{\frac{1}{2}}(K(0, 1)) \cap D_\Delta^{\frac{1}{2}}(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)})$ ist $v_{r+} = v_{r-}, v_{\varphi+}, v_{\varphi-} \in L^2([-\pi, \pi])$. Die Gleichheit der Normalableitungen auf dem Einheitskreis und die lineare Eigenschaft des Kreises ergeben

$$u(\varphi) = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_+ \right|_{r=1} = - \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_- \right|_{r=1}. \quad (4.161)$$

Nun lautet das Filtergesetz für \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \gamma_1(\varphi)v_r(\varphi) &= \frac{1}{2}\rho\gamma_2(\varphi)(\mathbf{v}_{1+}(\varphi)^2 - \mathbf{v}_{1-}(\varphi)^2 - \\ &\quad - \mathbf{v}_{2+}(\varphi)^2 + \mathbf{v}_{2-}(\varphi)^2) \\ &= -\rho\gamma_2(\varphi)((Z - 2v_\infty \sin \varphi)v_{\varphi+}), \end{aligned} \quad (4.162)$$

d.h.

$$\sin \tilde{f}(\varphi)u(\varphi) + \cos \tilde{f}(\varphi)\mathbf{H}\mathbf{u}(\varphi) = 0, \quad (4.163)$$

wobei

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\rho\gamma_2(s)(2v_\infty \sin s - Z)}{\gamma_1(s)}\right), & \gamma_1(s) \neq 0, s < \varphi_0, \\ \arctan\left(\frac{\rho\gamma_2(s)(2v_\infty \sin s - Z)}{\gamma_1(s)}\right) + \pi, & \gamma_1(s) \neq 0, s > \varphi_0, \\ \frac{\pi}{2}\text{sign}(2v_\infty \sin s - Z) & \gamma_1(s) = 0, s < \varphi_0, \\ \frac{\pi}{2}\text{sign}(2v_\infty \sin s - Z) + \pi & \gamma_1(s) = 0, s > \varphi_0, \\ \frac{\pi}{2} & s = \varphi_0, \end{cases} \quad (4.164)$$

ist. Dies ist eine Hilbert-Gleichung. Laut Folgerung 4.3.3 ist die einzige Lösung dieser Gleichung mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)d\varphi = 0 \quad (4.165)$$

durch

$$u(\varphi) = (b + ic)\cos \tilde{f}(\varphi)e^{-i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(\tilde{f}(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} \quad (4.166)$$

gegeben, wobei

$$b + ic = 0, \quad (4.167)$$

da $g(\varphi) = 0$, ist. Somit ist $u = 0$. Daraus und aus der Bedingung im Unendlichen folgt $v_\varphi = 0$ in ganz \mathbf{R}^2 . Die Bedingung im Unendlichen und die Divergenz- und Rotationsfreiheit von v ergeben weiter $v_r = 0$ in ganz \mathbf{R}^2 . Q.E.D.

Satz 4.5.2 Ist $Z \in Q_1$, gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \tilde{f}(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(\tilde{f}(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi \neq 0, \quad (4.168)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= h(s) + \frac{s}{2} \\ &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{\rho\gamma_2(s)(2v_\infty \sin s - Z)}{\gamma_1(s)}\right), & \gamma_1(s) \neq 0, s < \varphi_0, \\ \arctan\left(\frac{\rho\gamma_2(s)(2v_\infty \sin s - Z)}{\gamma_1(s)}\right) + \pi, & \gamma_1(s) \neq 0, s > \varphi_0, \\ \frac{\pi}{2}\text{sign}(2v_\infty \sin s - Z) & \gamma_1(s) = 0, s < \varphi_0, \\ \frac{\pi}{2}\text{sign}(2v_\infty \sin s - Z) + \pi & \gamma_1(s) = 0, s > \varphi_0, \\ \frac{\pi}{2} & s = \varphi_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.169)$$

ist, und gibt es keinen scharfen Punkt, so ist die Lösung von Problem 4.1.2 gegeben durch

$$\begin{aligned} v_r(r, \varphi) &= v_\infty \cos \varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s) \sin(\varphi-s)}{1-2r \cos(\varphi-s)+r^2} ds, \\ v_\varphi(r, \varphi) &= -v_\infty \sin \varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)(\cos(\varphi-s)-r)}{1-2r \cos(\varphi-s)+r^2} ds \end{aligned} \quad (4.170)$$

innerhalb der Kreisscheibe und mit

$$\begin{aligned} v_r(r, \varphi) &= v_\infty \cos \varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s) \sin(\varphi-s)}{1-2r \cos(\varphi-s)+r^2} ds, \\ v_\varphi(r, \varphi) &= -v_\infty \sin \varphi + \frac{Z}{2\pi r} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)(\cos(\varphi-s)-r)}{1-2r \cos(\varphi-s)+r^2} ds \end{aligned} \quad (4.171)$$

aufserhalb der Kreisscheibe, wobei

$$\begin{aligned} u(s) &= \sin \tilde{f}(s)g(s) - \cos \tilde{f}(s) \cos \frac{s}{2} e^{Hh(s)} H \left(\cos \frac{s}{2} e^{-Hh(s)} g(s) \right) \\ &\quad + \cos \tilde{f}(s) \sin \frac{s}{2} e^{Hh(s)} H \left(\sin \frac{s}{2} e^{-Hh(s)} g(s) \right) \\ &\quad + \left(b \cos \frac{s}{2} + c \sin \frac{s}{2} \right) \cos \tilde{f}(s) e^{Hh(s)}, \end{aligned} \quad (4.172)$$

$$\begin{aligned} b + ic &= \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos \tilde{f}(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(\tilde{f}(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ -i \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\frac{\varphi}{2} - \bar{f}) - H(\tilde{f}(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \tilde{f}(\varphi) e^{-i\frac{\varphi}{2} + H(\tilde{f}(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{\varphi}{2} - H(\tilde{f}(\varphi) - \frac{\varphi}{2})} g(\varphi) d\varphi \right\} \end{aligned} \quad (4.173)$$

$$g(s) = v_\infty \cos \tilde{f}(s) \cos s + \frac{1}{2} Z \sin \tilde{f}(s), \quad (4.174)$$

und \mathbf{H} aus (4.36) sind. Die Lösung gehört zu $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \partial\mathbf{K}(\mathbf{0}, 1))$. Ihre Einschränkungen auf $K(0, 1)$ und $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)}$ sind auf $K(0, 1) \cup \mathcal{K}$, bzw. $(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)}) \cup \mathcal{K}$, Hölder-stetig fortsetzbar, wobei \mathcal{K} , die Menge aller Punkte $(1, \varphi)$ ist, wo $\gamma_1(\varphi)$ und $\gamma_2(\varphi)$ beide Hölder-stetig sind. In den Punkten $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{1}, \varphi_0)$, wo $\gamma_1(\varphi_0)$ oder $\gamma_2(\varphi_0)$ Sprungstellen haben, ist die Lösung in der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_\pm(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-\alpha} + \mathbf{b}_\pm(\mathbf{x}) \quad (4.175)$$

darstellbar, wobei

$$\frac{1}{2} > \alpha = \frac{1}{\pi} (\tilde{f}(x_0-) - \tilde{f}(x_0+)) > -\frac{1}{2} \quad (4.176)$$

und \mathbf{a}_+ , \mathbf{a}_- , \mathbf{b}_+ , \mathbf{b}_- vier in $\overline{K(0, 1)}$ bzw. in $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)$ definierte beschränkte und in einer punktierten Umgebung von \mathbf{x}_0 stetige Funktionen sind.

Beweis. Genauso wie im Beweis von Satz 4.4.2 kann man sehen, daß u und $\mathbf{H}u$ überall außer in Unstetigkeitspunkten von γ_1 und γ_2 Hölder-stetig sind und dem Raum $L^2([-\pi, \pi])$ angehören. Es sei

$$\Xi(x + iy) = v_x(x, y) - iv_y(x, y) - v_\infty, \quad (4.177)$$

d.h.

$$\Xi(re^{i\varphi}) = (v_r(r, \varphi) - iv_\varphi(r, \varphi))e^{-i\varphi} - v_\infty \quad (4.178)$$

innerhalb der Einheitskreisscheibe bzw.

$$\Xi(x + iy) = v_x(x, y) - iv_y(x, y) - v_\infty + \frac{iZ}{2\pi(x + iy)}, \quad (4.179)$$

d.h.

$$\Xi(re^{i\varphi}) = (v_r(r, \varphi) - iv_\varphi(r, \varphi))e^{-i\varphi} - v_\infty + \frac{iZ}{2\pi r} e^{-i\varphi} \quad (4.180)$$

außerhalb der Einheitskreisscheibe. Aus (4.170) und (4.171) folgt

$$\Xi(\theta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial K(0, 1)} \frac{\tau u(-i \ln \tau)}{\tau - \theta} d\tau. \quad (4.181)$$

Dies ist eine in $\mathbf{C} \setminus \partial\mathbf{K}(\mathbf{0}, 1)$ analytische Funktion, die im Unendlichen gegen null strebt, und damit ist (4.15), (4.16) und (4.17) erfüllt. Die Sokhotski-Plemelj Formeln ergeben

$$v_{r+}(\varphi) = v_{r-}(\varphi) = v_\infty \cos \varphi + \operatorname{Re} \left(e^{i\varphi} \Xi_\pm(e^{i\varphi}) \right) = v_\infty \cos \varphi - \mathbf{H}u(\varphi), \quad (4.182)$$

$$v_{\varphi+}(\varphi) = -\operatorname{Im} \left(e^{i\varphi} \Xi_+(e^{i\varphi}) \right) - v_\infty \sin \varphi = u(\varphi) - v_\infty \sin \varphi, \quad (4.183)$$

und

$$v_{\varphi-} = -\operatorname{Im} \left(e^{i\varphi} \Xi_-(e^{i\varphi}) \right) - v_\infty \sin \varphi + Z = -u(\varphi) - v_\infty \sin \varphi + Z. \quad (4.184)$$

Der Satz 7.3.3 und die Tatsache $u \in L^2([-\pi, \pi])$ ergeben nun v_r, v_φ in $D_\Delta^{\frac{1}{2}}(K(0, 1)) \cap D_\Delta^{\frac{1}{2}}(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)})$ für jedes $R > 1$. Die Gleichung (4.18) ist auch schon bewiesen. Die Gleichung (4.20) lautet nun

$$\begin{aligned} \gamma_1(\varphi) v_\infty \cos \varphi - \mathbf{H}u(\varphi) = \\ = \rho \gamma_2(\varphi) (2v_\infty u(\varphi) \sin \varphi - Z(u(\varphi) + v_\infty \sin \varphi)), \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (4.185)$$

Das Dividieren durch

$$h(\varphi) = \sqrt{\rho^2 \gamma_2(\varphi)^2 (Z - 2v_\infty \sin \varphi)^2 + \gamma_1(\varphi)^2} \quad (4.186)$$

ergibt

$$\sin \tilde{f}(\varphi) u(\varphi) + \cos \tilde{f}(\varphi) \mathbf{H}u(\varphi) = g(\varphi). \quad (4.187)$$

Es gilt

$$\operatorname{Ind} \frac{\sin \tilde{f}(\varphi) + i \cos \tilde{f}(\varphi)}{\sin \tilde{f}(\varphi) - i \cos \tilde{f}(\varphi)} = \operatorname{Ind} \left(-e^{2i\tilde{f}(s)} \right) = 1. \quad (4.188)$$

Satz 4.3.2 ergibt, daß u genau die Lösung der Gleichung (4.187) ist, wobei die Konstanten b und c so gewählt wurden, daß

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(s) ds = 0 \quad (4.189)$$

gilt. Daraus folgt nun (4.19) und (4.20). Auf \mathbf{T} gilt $\cos \tilde{f}(s) = 0, \sin \tilde{f}(s) = \pm 1$. Wir erhalten

$$u(\varphi) = \frac{1}{2} Z \sin^2 \tilde{f}(\varphi) = \frac{1}{2} Z, \quad (4.190)$$

und damit ist (4.21) erfüllt. Q.E.D.

Bemerkung 4.5.3 Wenn wir $\gamma_2(s) = 0, s \in [-\pi, \pi] \setminus \mathbf{T}$ setzen, erhalten wir auch eine Lösung für das Umfliessen eines Kreisbogens.

Nun betrachten wir die anderen drei Fälle: $Z \in Q_2, Q_3$ und Q_4 :

Satz 4.5.4 Das Problem 4.1.2 hat für $Z \in Q_4$ keine Lösung.

Beweis. Problem 4.5.2 kann auch als Problem 4.4.2 mit zusätzlicher Bedingung (4.21) verstanden werden. Laut Satz 4.4.2 hat das Problem 4.1.1 genau eine Lösung, und diese Lösung ist mit (4.117) bis (4.122) gegeben. Auf \mathbf{T} erhalten wir

$$u(\varphi) = \frac{1}{2}Z + C(2 \sin \varphi - Z). \quad (4.191)$$

Somit ist die Bedingung (4.21) nur dann erfüllt, wenn $C = 0$ gilt. Aus (4.122) ist aber sichtbar, daß immer $C < 0$ gilt. Q.E.D.

Satz 4.5.5 Sei $Z \in Q_3$, $\varphi_0 \in \mathbf{T}$ mit $2v_\infty \sin \varphi_0 = Z$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varphi) &= f(\varphi) & \varphi < \varphi_0, \\ \tilde{f}(\varphi_0) &= -\frac{\pi}{2}, \\ \tilde{f}(\varphi) &= f(\varphi) - \pi & \varphi > \varphi_0 \end{aligned} \quad (4.192)$$

und

$$\tilde{g}(\varphi) = v_\infty \cos \tilde{f}(\varphi) \cos \varphi - \frac{1}{2}Z \sin \tilde{f}(\varphi). \quad (4.193)$$

Gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin \tilde{f}(\varphi) e^{i\frac{\varphi}{2} + \mathbf{H}(\tilde{f}(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} d\varphi \neq 0 \quad (4.194)$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\varphi) e^{i\frac{\varphi}{2} - \mathbf{H}(\tilde{f}(\varphi) + \frac{\varphi}{2})} d\varphi \neq 0, \quad (4.195)$$

so hat das Problem 4.1.2 keine Lösung.

Beweis. Die Funktion

$$u(\varphi) = \mathbf{v}_{\varphi+} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{1}} + \mathbf{v}_\infty \sin \varphi \quad (4.196)$$

genügt der Gleichung (4.20), die unter Benutzung der linearen Eigenschaft des Kreises und der Gleichheit der normalen Komponenten der Geschwindigkeit in der Form

$$\sin f(\varphi) u(\varphi) + \cos f(\varphi) \mathbf{H} u(\varphi) = \mathbf{g}(\varphi), \quad (4.197)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$g(\varphi) = v_\infty \cos f(\varphi) \cos \varphi - \frac{1}{2}Z \sin f(\varphi) \quad (4.198)$$

ist. Aus (4.15), (4.16) und, weil die Einheitskreisscheibe einfach zusammenhängend ist, folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4.199)$$

In einer Umgebung von φ_0 gilt $\sin f(\varphi) > 0$ für $\varphi < \varphi_0$ und $\sin f(\varphi) > 0$ für $\varphi > 0$. Sind γ_1 und γ_2 im Punkt φ_0 Hölder-stetig, so ist γ_2 in einer Umgebung von φ_0 positiv, und wir erhalten

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0 \pm 0} \sin f(\varphi) = \mp 1. \quad (4.200)$$

Die einzige Möglichkeit, den Sprung von f im Punkt φ_0 kleiner als $\frac{\pi}{2}$ zu machen ist die Funktion f durch die Funktion \tilde{f} und g durch \tilde{g} in der Gleichung (4.197) zu ersetzen. Nun haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varphi) &\in [-\frac{\pi}{2}, 0] & \varphi < \varphi_0, \\ \tilde{f}(\varphi_0) &= -\frac{\pi}{2}, \\ \tilde{f}(\varphi) &\in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) & \varphi > \varphi_0, \end{aligned} \quad (4.201)$$

und die Funktion \tilde{f} erfüllt die Bedingung (4.68) im Punkt φ_0 . Die Gleichung (4.197) und

$$\sin \tilde{f}(\varphi) + \cos \tilde{f}(\varphi) \mathbf{H}u(\varphi) = \tilde{g}(\varphi) \quad (4.202)$$

sind äquivalent, und es gilt

$$|\tilde{f}(\varphi_0+) - \tilde{f}(\varphi_0-)| = 0 \quad (4.203)$$

(siehe (4.69)). Wir haben

$$\text{Ind} \frac{\sin \tilde{f}(\varphi) + i \cos \tilde{f}(\varphi)}{\sin \tilde{f}(\varphi) - i \cos \tilde{f}(\varphi)} = \text{Ind} \left(-e^{-2i\tilde{f}(\varphi)} \right) = -1. \quad (4.204)$$

Laut Satz 4.3.2 gibt es keine Lösung dieser Gleichung in $L^2([-\pi, \pi])$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(s) ds = 0. \quad (4.205)$$

Q.E.D.

Es bleibt noch der Fall $Z \in Q_2$. Im Fall $|Z| \neq 2v_\infty$ gibt es zwei φ aus \mathbf{T} mit der Eigenschaft $2v_\infty \sin \varphi = Z$. Wir bezeichnen mit φ_0 das $\varphi \in \mathbf{T}$ mit $2v_\infty \sin \varphi = Z$, für das auch $|\varphi_0| < \frac{\pi}{2}$ gilt. Wenn $\varphi_0 < 0$ gilt, setzen wir

$$\tilde{f}(\varphi) = \begin{cases} f(\varphi) & \varphi < -\pi - \varphi_0 \\ \frac{\pi}{2} & \varphi = -\pi - \varphi_0 \\ f(\varphi) + \pi & -\pi - \varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \\ -\frac{\pi}{2} & \varphi = \varphi_0 \\ f(\varphi) & \varphi > \varphi_0, \end{cases} \quad (4.206)$$

und andernfalls setzen wir

$$\tilde{f}(\varphi) = \begin{cases} f(\varphi) & \varphi < \varphi_0 \\ -\frac{\pi}{2} & \varphi = \varphi_0 \\ f(\varphi) - \pi & \varphi_0 < \varphi < \pi - \varphi_0 \\ \frac{\pi}{2} & \varphi = \pi - \varphi_0 \\ f(\varphi) & \varphi > \pi - \varphi_0. \end{cases} \quad (4.207)$$

Dazu kommt noch

$$\tilde{g}(\varphi) = v_\infty \cos \tilde{f}(\varphi) \cos \varphi - \frac{1}{2} Z \sin \tilde{f}(\varphi). \quad (4.208)$$

Satz 4.5.6 Gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin \tilde{f}(\varphi) e^{-H_f(\varphi)} d\varphi \neq 0 \quad (4.209)$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\varphi) e^{-H_f(\varphi)} d\varphi \neq 0, \quad (4.210)$$

so hat das Problem 4.1.2 keine Lösung.

Beweis. Die Funktion

$$u(\varphi) = \mathbf{v}_{\varphi+} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{1}} + \mathbf{v}_\infty \sin \varphi \quad (4.211)$$

genügt der Gleichung (4.20), die unter Benutzung der linearen Eigenschaft des Kreises und der Gleichheit der normalen Komponenten der Geschwindigkeit in der Form

$$\sin f(\varphi) u(\varphi) + \cos f(\varphi) H \mathbf{u}(\varphi) = \mathbf{g}(\varphi), \quad (4.212)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$g(\varphi) = v_\infty \cos f(\varphi) \cos \varphi - \frac{1}{2} Z \sin f(\varphi) \quad (4.213)$$

ist. Diese Gleichung ist bis auf die Punkte $\varphi_0, \text{sign } (\varphi_0)\pi - \varphi_0$ äquivalent mit der Gleichung

$$\sin \tilde{f}(\varphi) + \cos \tilde{f}(\varphi) \mathbf{H}u(\varphi) = \tilde{g}(\varphi). \quad (4.214)$$

Die Funktion \tilde{f} erfüllt die Bedingung 4.68 in allen Punkten aus $[-\pi, \pi]$. Es gilt

$$\text{Ind} \frac{\sin \tilde{f}(\varphi) + i \cos \tilde{f}(\varphi)}{\sin \tilde{f}(\varphi) - i \cos \tilde{f}(\varphi)} = \text{Ind} (-e^{-2i\tilde{f}(\varphi)}) = 0. \quad (4.215)$$

Aus (4.15), (4.16) und aus der Tatsache, daß die Einheitskreisscheibe einfach zusammenhängend ist, folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4.216)$$

Laut Satz 4.3.1 gibt es nur eine Lösung dieser Gleichung in $L^2([-\pi, \pi])$, und für diese Lösung gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(s) ds = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin \tilde{f}(\varphi) e^{-\mathbf{H}f(\varphi)} d\varphi}{\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\varphi) e^{-\mathbf{H}f(\varphi)} d\varphi} \neq 0. \quad (4.217)$$

Q.E.D.

Damit ist das Problem bis auf die Fälle, wenn eine der Bedingungen (4.168), (4.194), (4.195) (4.209) und (4.210) nicht erfüllt ist, vollständig gelöst. Für jeden dieser Fälle können wir durch die Betrachtung der Hilbert-Gleichung wie in §4.3 in jedem einzelnen Fall erfahren, ob eine Lösung existiert oder nicht, und eine explizite Lösung berechnen.

4.6 Beispiele

Beispiel 4.6.1 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = K = Konst., Z = 0.$

Sei $M = 2\rho v_\infty K$. Wir erhalten

$$f(s) = \arctan(M \sin s). \quad (4.218)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \cos f(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+M^2 \sin^2 s}}, \\ \sin f(s) &= \frac{M \sin s}{\sqrt{1+M^2 \sin^2 s}}. \end{aligned} \quad (4.219)$$

Unter Benutzung der Ergebnisse von HEIER-WOLFERSDORF [6] ergibt sich nach etwas längerer Berechnung

$$\begin{aligned} e^{Hf(s)} &= \frac{\sqrt{1+M^2} + M \cos s}{\sqrt{1+M^2 \sin^2 s}}, \\ e^{-Hf(s)} &= \frac{\sqrt{1+M^2} - M \cos s}{\sqrt{1+M^2 \sin^2 s}}, \\ C &= -\frac{2v_\infty^2}{1+\sqrt{1+M^2}}, \\ g(s) &= \frac{v_\infty}{\sqrt{1+M^2 \sin^2 s}} \cdot \left(\cos s + \frac{M}{1+\sqrt{1+M^2}} \right), \\ H(g(s)e^{-Hf(s)}) &= \frac{v_\infty \sin s}{\sqrt{1+M^2} + M \cos s}, \\ u(s) &= \frac{v_\infty \sin s}{\sqrt{1+M^2} - M \cos s} \end{aligned} \quad (4.220)$$

(Abbildung 4.1).

Beispiel 4.6.2 $\gamma_1(\varphi) = c(1 + \cos \varphi), 2\rho v_\infty \gamma_2(\varphi) = 1, Z = 0.$

Hier ist der ganze Kreis porös bis auf eine Lücke bei $\varphi = \pm\pi$. Satz 4.4.2 gibt keine Antwort, ob in diesem Fall eine Lösung existiert oder nicht, und wie sie aussieht. Anstatt die Funktion u durch die Formel (4.119) zu berechnen, stellen wir u in der Form

$$u(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \quad (4.221)$$

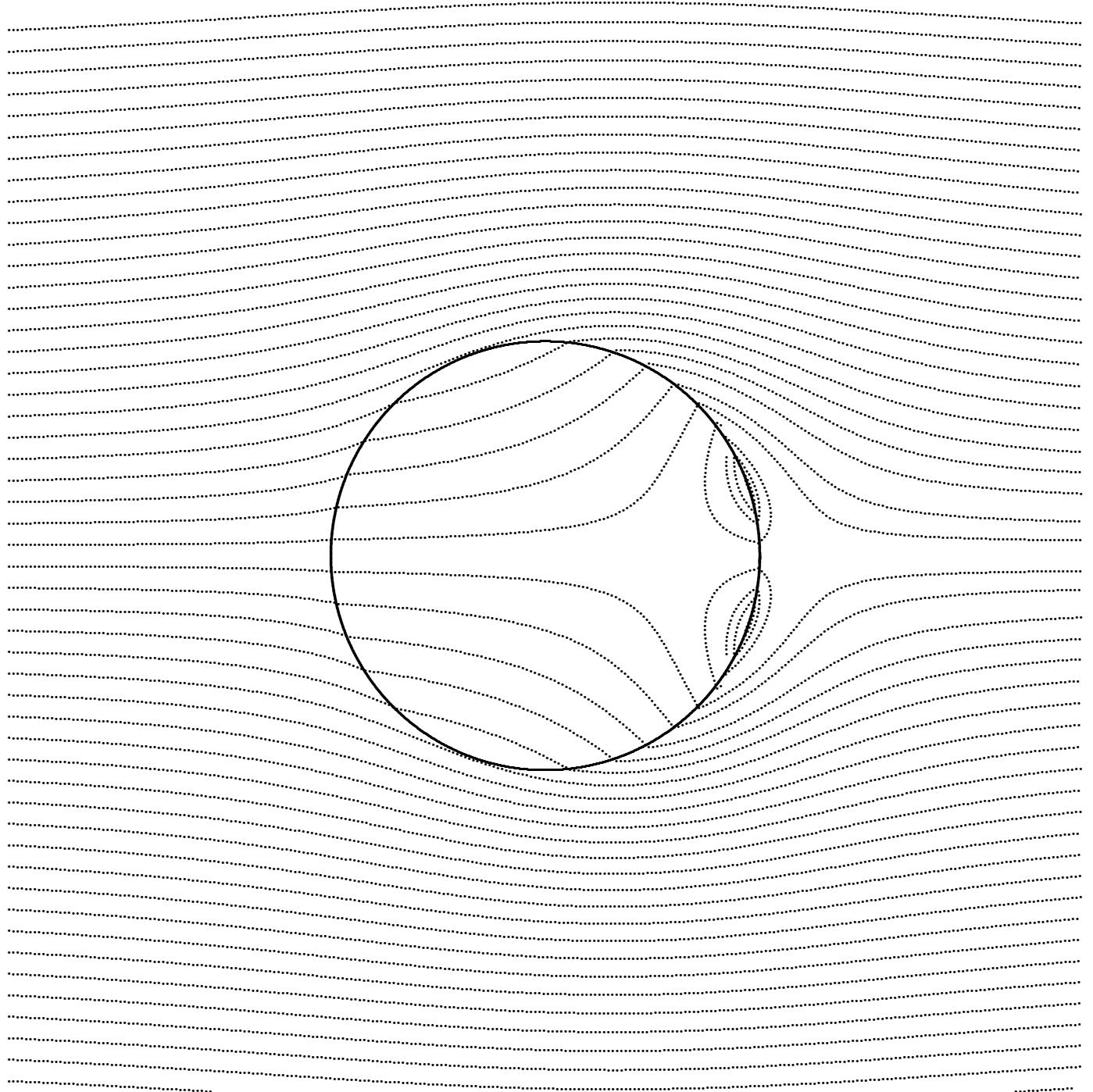


Abbildung 4.1: Die Strömung durch einen porösen Kreis mit konstanten γ_1, γ_2

dar. Die Gleichung (4.150) führt zu den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned}
 (c+1)b_1 &= v_\infty c - \frac{C}{v_\infty}, \\
 2ca_1 + (c+1)a_2 &= 0, \\
 2cb_1 + (c+1)b_2 &= 2v_\infty c, \\
 (c+1)a_{k+1} + 2ca_k + (c-1)a_{k-1} &= 0, \quad k \geq 2, \\
 (c+1)b_3 + 2cb_2 + (c-1)b_1 &= v_\infty c, \\
 (c+1)b_{k+1} + 2cb_k + (c-1)b_{k-1} &= 0, \quad k > 2.
 \end{aligned} \tag{4.222}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(c+1)a_{k+1} + 2ca_k + (c-1)a_{k-1} = 0 \tag{4.223}$$

ist

$$a_k = \alpha z_1^k + \beta z_2^k, \tag{4.224}$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $z_1 = -1$ und $z_2 = \frac{1-c}{1+c}$ ist. Ist $\alpha \neq 0$, so erhalten wir eine Lösung u , die nicht zu $L^2([-\pi, \pi])$ gehört. Wir setzen $\alpha = 0$ sowohl bei a_k als auch bei b_k . Die Anfangsbedingungen liefern

$$\begin{aligned}
 a_k &= 0, \quad k \geq 1, \\
 b_1 &= \frac{v_\infty c}{c+1}, \\
 b_k &= \frac{2v_\infty c(1-c)^{k-2}}{(c+1)^k}, \quad k \geq 2, \\
 C &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.225}$$

Dies ergibt

$$u(\varphi) = \frac{v_\infty c \sin \varphi}{c+1} \left(1 + \frac{2(1+c) \cos \varphi - 1 + c}{1 + c^2 + (c^2 - 1) \cos \varphi} \right) \tag{4.226}$$

und

$$\mathbf{H}u(\varphi) = \frac{v_\infty c}{c+1} \left(\cos \varphi + \frac{(c+1) \cos 2\varphi - (c-1) \cos \varphi}{1 + c^2 + (c^2 - 1) \cos \varphi} \right). \tag{4.227}$$

Die Strömung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 v_r(r, \varphi) &= v_\infty \cos \varphi - \frac{v_\infty c}{1+c} \left(\cos \varphi + 2r \cdot \frac{(c+1) \cos 2\varphi + (c-1)r \cos \varphi}{(1+c)^2 + (1-c)^2 r^2 + 2(c^2-1)r \cos \varphi} \right), \\
 v_\varphi(r, \varphi) &= -v_\infty \sin \varphi + \frac{v_\infty c \sin \varphi}{1+c} \left(1 + 2r \cdot \frac{2(1+c) \cos \varphi + r(c-1)}{(1+c)^2 + (1-c)^2 r^2 + 2(c^2-1)r \cos \varphi} \right)
 \end{aligned} \tag{4.228}$$

innerhalb der Kreisscheibe und durch

$$\begin{aligned} v_r(r, \varphi) &= v_\infty \cos \varphi - \frac{v_\infty c}{r^2(c+1)} \left(\cos \varphi + 2 \frac{(c+1)r \cos 2\varphi + (c-1) \cos \varphi}{(1+c)^2 r^2 + (1-c)^2 + 2(c^2-1)r \cos \varphi} \right), \\ v_\varphi(r, \varphi) &= -v_\infty \sin \varphi - \frac{v_\infty c \sin \varphi}{r^2(c+1)} \left(1 + \frac{2r(1+c) \cos \varphi - 1 + c}{(1+c)^2 r^2 + (1-c)^2 + 2(c^2-1)r \cos \varphi} \right) \end{aligned} \quad (4.229)$$

außerhalb der Kreisscheibe (Abbildung 4.2).

Beispiel 4.6.3 $\gamma_1(\varphi) = c(1 - \cos \varphi)$, $2\rho v_\infty \gamma_2(\varphi) = 1$, $Z = 0$.

Dieser Fall ist auch nicht in Satz 4.4.2 enthalten. Wir betrachten dieses Problem wie im vorherigen Beispiel. Die Funktion u wird in der Form

$$u(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \quad (4.230)$$

dargestellt. Die Gleichung (4.150) führt zu den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} (c-1)b_1 &= v_\infty c + \frac{C}{v_\infty}, \\ 2ca_1 - (c-1)a_2 &= 0, \\ 2cb_1 - (c-1)b_2 &= 2v_\infty c, \\ (c-1)a_{k+1} - 2ca_k + (c+1)a_{k-1} &= 0, \quad k \geq 2, \\ (c-1)b_3 - 2cb_2 + (c+1)b_1 &= v_\infty c, \\ (c-1)b_{k+1} - 2cb_k + (c+1)b_{k-1} &= 0, \quad k > 2. \end{aligned} \quad (4.231)$$

Für $c = 1$ hat dieses System offensichtlich keine Lösung (siehe die erste Gleichung). Sei nun $c \neq 1$. Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(c-1)a_{k+1} - 2ca_k + (c+1)a_{k-1} = 0 \quad (4.232)$$

ist

$$a_k = \alpha z_1^k + \beta z_2^k, \quad (4.233)$$

wobei

$$z_1 = 1 \text{ und } z_2 = \frac{c+1}{c-1} \quad (4.234)$$

ist. Es gilt $|z_2| > 1$, und $\beta \neq 0$ würde zu physikalisch unvertretbaren Lösungen führen. Wir setzen $\beta = 0$ sowohl bei a_k , als auch bei b_k . Die Anfangsbedingungen liefern

$$\begin{aligned} a_k &= 0, \quad k \geq 1, \\ b_1 &= \frac{v_\infty c(c+3)}{(c+1)^2}, \\ b_k &= \frac{2v_\infty c}{(c+1)^2}, \quad k \geq 2, \\ C &= -4 \frac{v_\infty^2 c}{(c+1)^2}. \end{aligned} \quad (4.235)$$

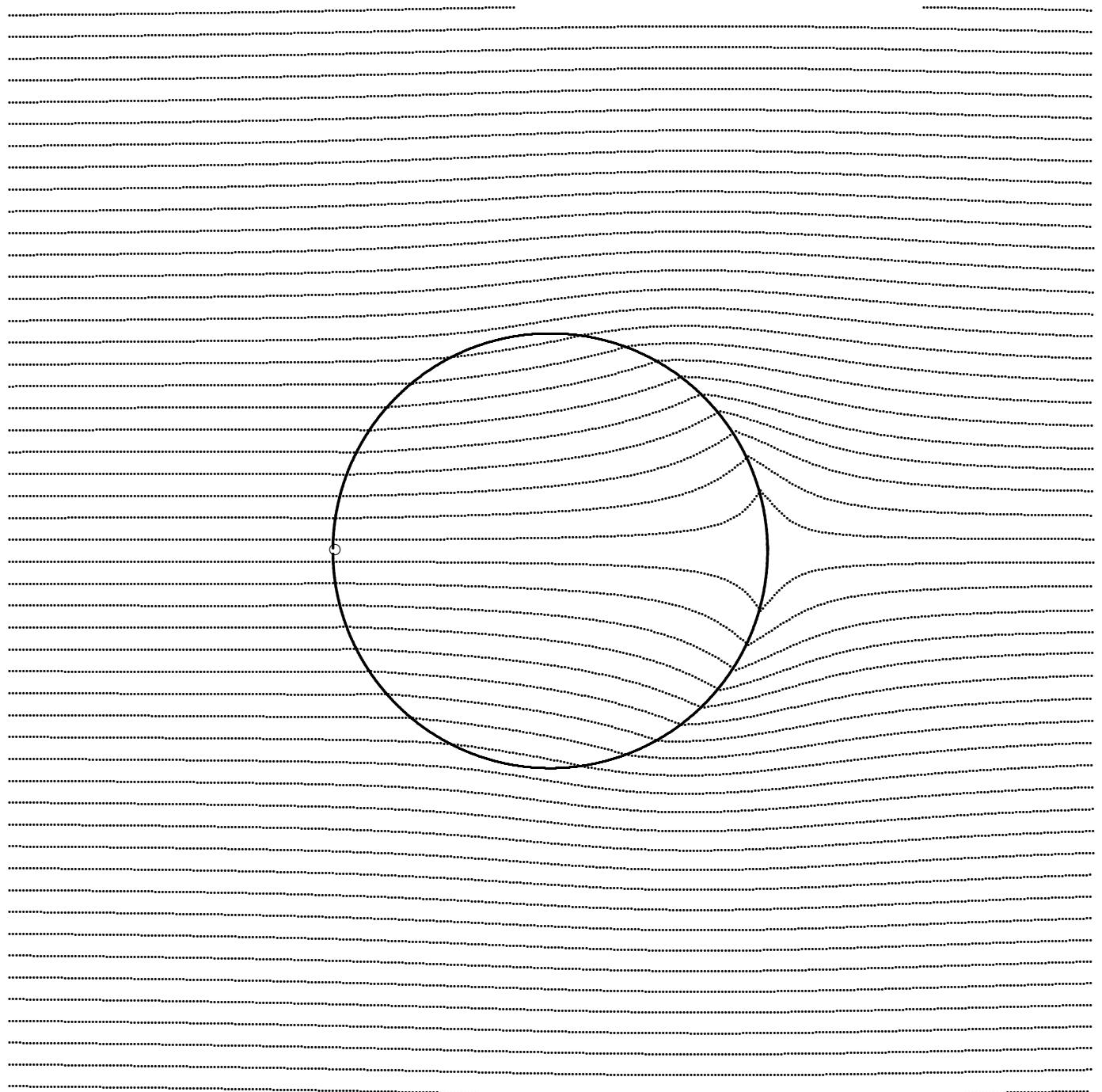


Abbildung 4.2: Die Strömung bei einer Lücke auf der vorderen Seite des Kreises

Dies ergibt

$$u(\varphi) = \frac{v_\infty c \sin \varphi}{(c+1)^2} \left(c + 1 + \frac{1}{1 - \cos \varphi} \right) \quad (4.236)$$

und

$$\mathsf{H}u(\varphi) = \frac{v_\infty c}{(c+1)^2} (2\pi\delta(0) - 1 - (c+1)\cos \varphi). \quad (4.237)$$

Die Geschwindigkeit hat eine Singularität vom Typ der Diracschen Delta-Distribution im Punkt $\varphi = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} v_r(r, \varphi) &= v_\infty \cos \varphi - \frac{v_\infty c}{(c+1)^2} \left((c+3) \cos \varphi + 2r \cdot \frac{\cos 2\varphi - r \cos \varphi}{1+r^2-2r \cos \varphi} \right), \\ v_\varphi(r, \varphi) &= -v_\infty \sin \varphi + \frac{v_\infty c \sin \varphi}{(c+1)^2} \left((c+3) + 2r \cdot \frac{2 \cos \varphi - r}{1+r^2-2r \cos \varphi} \right) \end{aligned} \quad (4.238)$$

innerhalb der Kreisscheibe und

$$\begin{aligned} v_r(r, \varphi) &= v_\infty \cos \varphi - \frac{v_\infty c}{r^2(c+1)^2} \left((c+3) \cos \varphi + 2 \cdot \frac{r \cos 2\varphi - \cos \varphi}{1+r^2-2r \cos \varphi} \right), \\ v_\varphi(r, \varphi) &= -v_\infty \sin \varphi - \frac{v_\infty c \sin \varphi}{r^2(c+1)^2} \left(c + 3 + 2 \cdot \frac{2r \cos \varphi - 1}{1+r^2-2r \cos \varphi} \right) \end{aligned} \quad (4.239)$$

außerhalb der Kreisscheibe (Abbildung 4.3).

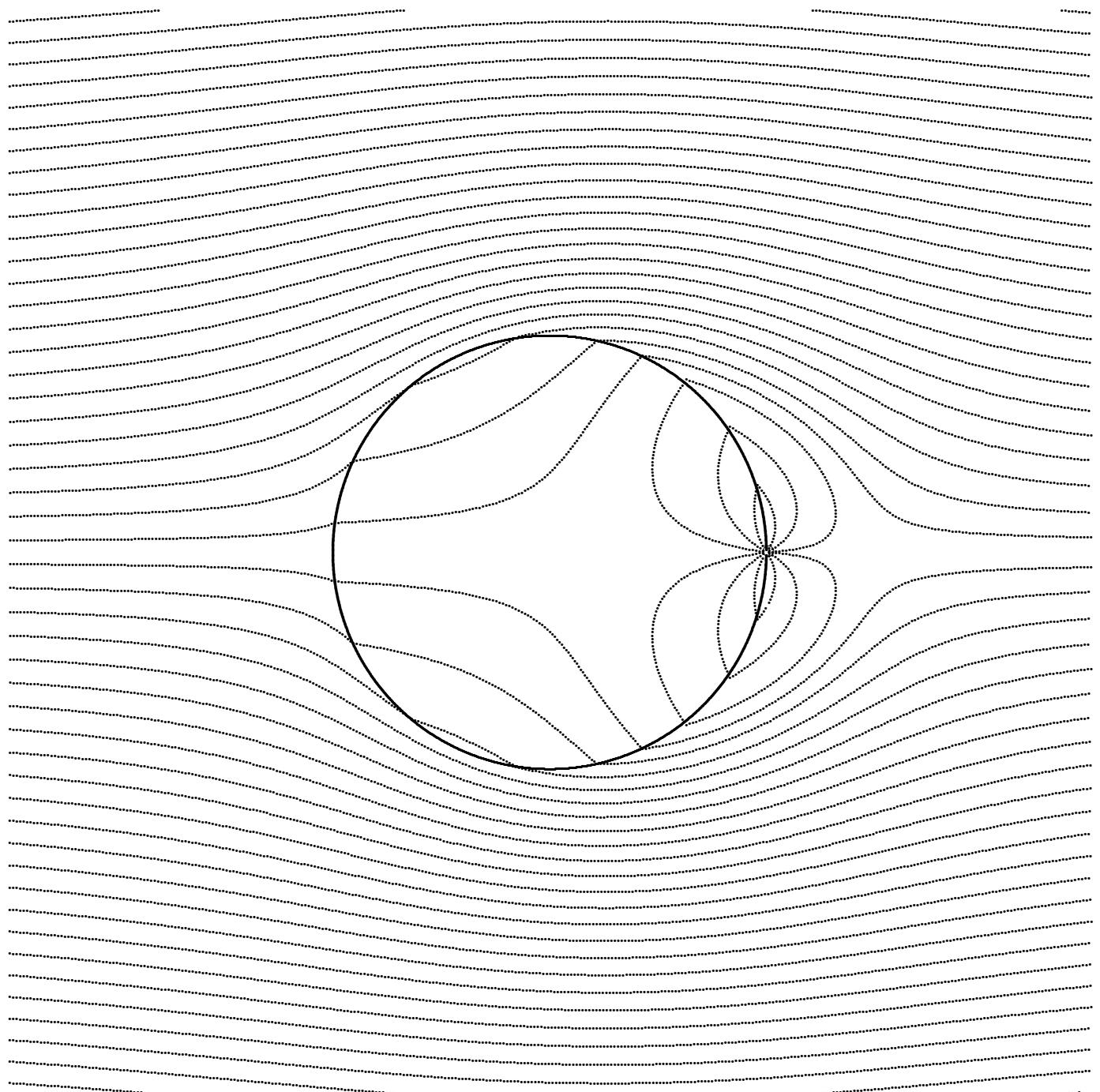


Abbildung 4.3: Die Strömung bei einer Lücke auf der hinteren Seite des Kreises

Kapitel 5

Der instationäre Fall für den Kreis

5.1 Einführung

In diesem Kapitel wird das ursprüngliche instationäre Problem für den Fall betrachtet, daß Γ ein Kreis oder ein Teil davon ist. Wir beschränken uns auf die Fälle, wenn alle Rand- und Unendlichkeitsbedingungen von t unabhängig sind, d.h. $\mathbf{v}_\infty, p(\infty), Z$ sind drei willkürliche Konstanten, und γ_1, γ_2 hängen nur von \mathbf{x} ab. Im Fall, daß einer dieser Parameter von t abhängt, würden solche Probleme auf die Operator-Differentialgleichungen vom Typ

$$\frac{du}{dt} = A(t)u(t) \quad (5.1)$$

zurückführen, die in der Theorie der Halbgruppen von Operatoren von KATO [7] und YOSIDA [24] nicht betrachtet wurden.

Das instationäre Problem für den Fall, daß Γ ein Kreis ist, ist schon in WOLFERSDORF [23] betrachtet worden. Dort wurde mit Hilfe der Riccati-schen Differentialgleichung die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung für den Fall $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \text{Konst.}$ bewiesen. In REISSIG [17] ist der allgemeine Fall

$$\mathbf{v} \cdot \nu = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-) \quad (5.2)$$

betrachtet worden. Das Problem ist auf ein nichtlineares Cauchysches Problem auf $\Gamma \times \{t \geq 0\}$ reduziert worden und dort ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in einer Skala von 2π -periodischen Hölder-Gevrey Funktionen der Ordnung 1 für hinreichend kleine Zeiten t bewiesen.

In dieser Arbeit sind γ_1 und γ_2 beliebige stückweise Hölder-stetige Funktionen unter der Einschränkung $\gamma_2(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, d.h. die poröse Linie ist nirgendwo vollkommen undurchlässig. Das Problem wird auf eine Operator-Gleichung reduziert, und mit Hilfe der schon erwähnten Theorie über Halbgruppen von Operatoren in KATO [7] und YOSIDA [24] wird die Existenz einer auf dem Intervall $[0, \infty)$ beschränkten Lösung des Problems bewiesen. Die Lösung ist eindeutig im Sinne, daß es keine andere in einer Umgebung von $t = \infty$ beschränkte Lösung gibt.

Im Problem 1.0.1 sei nun Γ ein Kreis. Einfachheitshalber legen wir das Koordinatensystem so, daß dieser Kreis genau der Einheitskreis ist und die Geschwindigkeit im Unendlichen in x -Richtung gerichtet wird. Wir führen auch die Polarkoordinaten (r, φ) ein. Anstatt $\gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, $\gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, $(\mathbf{v} \cdot \nu)_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, $(\mathbf{v} \cdot \sigma)_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ setzen wir $\gamma_1(\varphi, t)$, $\gamma_2(\varphi, t)$, $v_{r\pm}(\varphi, t)$, $v_{\varphi\pm}(\varphi, t)$. Da γ_2 nirgendwo Null ist, führen wir die Funktion ϑ

$$\vartheta(\varphi) = \frac{\gamma_1(\varphi)}{\rho\gamma_2(\varphi)} \quad (5.3)$$

ein. Wir setzen

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{v}_\infty + \text{grad } \Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}), & x^2 + y^2 < 1, \\ \mathbf{v}_\infty + \mathbf{Z}\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \text{grad } \Phi_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}), & x^2 + y^2 > 1, \end{cases} \quad (5.4)$$

wobei \mathbf{v}_1 aus (1.25) ist. Jetzt kann die Eulersche Gleichung durch die Bernoullische Gleichung

$$\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + p = \mathbf{C}_\pm(\mathbf{t}) \quad (5.5)$$

ersetzt werden. Hier sind $C_\pm(t)$ zwei reellwertige Funktionen. Aus der Zeitunabhängigkeit von \mathbf{v}_∞ und $p(\infty)$ folgt $C_-(t) = C_- = \text{Konst}$. Die Darstellung (5.4) und die Bernoullische Gleichung reduzieren das Filtergesetz (1.16) auf

$$\begin{aligned} \vartheta(\varphi)\left(\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial r}(1, \varphi, t) + v_\infty \cos \varphi\right) &= C(t) - v_\infty \sin \varphi \frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \varphi}(1, \varphi, t) - \\ &- (2v_\infty \sin \varphi - Z)\left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi}(1, \varphi, t) - \frac{1}{2}Z\right) + \left(\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \varphi}\right)^2(1, \varphi, t) - \\ &- \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi}\right)^2(1, \varphi, t) + \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_-(1, \varphi, t) - \Phi_+(1, \varphi, t)), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei

$$C(t) = C_- - C_+(t) \quad (5.7)$$

ist. Nun taucht der Druck p nur in der Bernoullischen Gleichung auf und wird durch diese Gleichung bestimmt. Aus den anderen Gleichungen sollen Φ_+ , Φ_-

und $C(t)$ bestimmt werden. Die Grenzwerte von \mathbf{v} auf dem Kreis werden im Sinne des Satzes 7.3.3 in $D_\Delta^0(K(0, 1))$ bzw. $D_\Delta^0(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)})$ für jedes $R > 1$ genommen. Somit gilt $\Phi_+ \in D_\Delta^1(K(0, 1))$, $\Phi_- \in D_\Delta^1(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)})$. Unter Stetigkeit der Lösung in der Variable t wird $\Phi_+ \in \mathcal{B}(0, \infty; D_\Delta^1(K(0, 1)))$ und $\Phi_- \in \mathcal{B}(0, \infty; D_\Delta^1(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)}))$ verstanden. Das Problem 1.0.1 lautet nun:

Problem 5.1.1 Es sind eine nicht negative beschränkte stückweise stetige Funktion $\vartheta : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, die nur auf einer Menge vom Maß null den Wert null annimmt, eine Funktion g_0 aus $L^2([-\pi, \pi])$ und drei reelle Konstanten $\rho > 0$, v_∞ , Z gegeben. Gesucht werden die Funktionen Φ_+ aus $\mathcal{B}(0, \infty; D_\Delta^1(K(0, 1)))$ und Φ_- aus $\mathcal{B}(0, \infty; D_\Delta^1(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)}))$ für jedes $R > 1$, die

$$\Delta\Phi_+(r, \varphi, t) = 0, \quad r < 1, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad t \geq 0, \quad (5.8)$$

$$\Delta\Phi_-(r, \varphi, t) = 0, \quad r > 1, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad t \geq 0, \quad (5.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_-(r, \varphi, t) = 0, \quad \forall \varphi, \quad \forall t \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial r}(1, \varphi, t) = \frac{\partial \Phi_-}{\partial r}(1, \varphi, t) \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(\varphi) \left(\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial r}(1, \varphi, t) + v_\infty \cos \varphi \right) &= C + v_\infty \sin \varphi \frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \varphi}(1, \varphi, t) - \\ &- (2v_\infty \sin \varphi + Z) \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi}(1, \varphi, t) - \frac{1}{2}Z \right) + \left(\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \varphi} \right)^2(1, \varphi, t) - \\ &\left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi} \right)^2(1, \varphi, t) + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_-(1, \varphi, t) - \Phi_+(1, \varphi, t)), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

und

$$\Phi_-(1, \varphi, 0) = -g_0(\varphi) \quad (5.13)$$

genügen.

Da der Kreis eine Kurve mit der linearen Eigenschaft ist, gilt

$$\left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi} \right)(1, \varphi, t) + \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi} \right)(1, \varphi, t) = 0. \quad (5.14)$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi} \right)^2(1, \varphi, t) - \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial \varphi} \right)^2(1, \varphi, t) = 0. \quad (5.15)$$

Die Funktion Φ_+ kommt in den Gleichungen nur in Ableitungen vor. So ist sie nur bis auf eine Konstante bestimmt, und die wählen wir so, daß

$$\Phi_+(1, \varphi, t) = -\Phi_-(1, \varphi, t) \quad (5.16)$$

gilt (siehe (5.14)). Die Funktionen $u = \frac{\partial \Phi_+}{\partial \varphi}$ und $w = \frac{\partial \Phi_+}{\partial r}$ sind miteinander mit dem Hilbert-Operator H verbunden:

$$u(\varphi, t) = -Hw(\varphi, t), \quad (5.17)$$

wobei

$$Hw(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(\psi, t) \cot\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) d\psi \quad (5.18)$$

ist (siehe §4.2). Sei

$$g(\varphi, t) = \Phi_+(1, \varphi, t) = -\Phi_-(1, \varphi, t). \quad (5.19)$$

Aus $\Phi_+ \in B(0, \infty; D_\Delta^1(K(0, 1)))$ und $\Phi_- \in B(0, \infty; D_\Delta^1(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)}))$ für jedes $R > 1$ und Satz 7.3.3 folgt $g \in B(0, \infty; H^{\frac{1}{2}}([- \pi, \pi]))$. Ist die Funktion g schon bekannt, so erhalten wir Φ_+ und Φ_- als Lösung des Dirichletschen Problems innerhalb bzw. außerhalb der Einheitskreisscheibe. Danach erhalten wir \mathbf{v} aus (5.4) und p aus

$$p(r, \varphi, t) = \begin{cases} \rho \left(C_+ - C - \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{r}, \varphi, t)^2 - \frac{\partial}{\partial t} \Phi_-(\mathbf{r}, \varphi, t) \right), & r > 1, \\ \rho \left(C_+ - \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{r}, \varphi, t)^2 - \frac{\partial}{\partial t} \Phi_+(\mathbf{r}, \varphi, t) \right), & r < 1. \end{cases} \quad (5.20)$$

Damit ist bei Kenntnis von g Problem 5.1.1 gelöst. Die Funktion g genügt der Gleichung

$$\begin{aligned} \vartheta(\varphi) \left(-H \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) (\varphi, t) + v_\infty \cos \varphi \right) &= C - \\ -(2v_\infty \sin \varphi - Z) \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi} (\varphi, t) - \frac{1}{2} Z \right) - 2 \frac{\partial g}{\partial t} (\varphi, t), &\varphi \in [-\pi, \pi], t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

und der Anfangsbedingung

$$g(\varphi, 0) = g_0(\varphi). \quad (5.22)$$

Von der Funktion g subtrahieren wir die Lösung des zugehörigen stationären Problems g_s :

$$\begin{aligned} \vartheta(\varphi) H \left(\frac{\partial g_s}{\partial \varphi} \right) + (2v_\infty \sin \varphi - Z) \frac{\partial g_s}{\partial \varphi} &= \\ = -\vartheta(\varphi) v_\infty \cos \varphi + C - \frac{1}{2} Z^2 + v_\infty \sin \varphi Z & \end{aligned} \quad (5.23)$$

und erhalten

$$2\frac{\partial h}{\partial t}(\varphi, t) - \vartheta(\varphi) H\left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)(\varphi, t) - (2v_\infty \sin \varphi - Z)\frac{\partial h}{\partial \varphi}(\varphi, t) = 0, \quad (5.24)$$

$$\varphi \in [-\pi, \pi], \quad t \geq 0,$$

wobei

$$h(\varphi, t) = g(\varphi, t) - g_s(\varphi) \quad (5.25)$$

ist. Die Funktion g_s ist durch

$$g_s(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} u(\psi) d\psi \quad (5.26)$$

gegeben, wobei u aus (4.119) ist. Aus $u \in L^2([-\pi, \pi])$ folgt $g_s \in H^1[-\pi, \pi]$.

Es werden zunächst die Sobolew-Räume \mathcal{H}_r^σ der Funktionen von $[-\pi, \pi]$ in \mathbf{R} mit der Eigenschaft

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\psi) d\psi = 0 \quad (5.27)$$

eingeführt. Dann wird Gleichung (5.24) in eine Operator-Gleichung in \mathcal{H}_r^σ umgewandelt. Mit Hilfe des Satzes von PHILLIPS und LUMMER wird die Existenz, Eindeutigkeit und Beschränktheit der Lösung dieser Gleichung für $t \in [0, \infty)$ bewiesen.

5.2 Die Räume \mathcal{H}_r^σ , $\sigma \geq 0$

Definition 5.2.1 Der Raum \mathcal{H} , ist der Raum aller Funktionen u aus $L^2([-\pi, \pi])$, die

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\psi) d\psi = 0. \quad (5.28)$$

genügen. Der Raum wird mit der Norm

$$\|u\|_0 = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\psi)^2 d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.29)$$

sowie mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\psi)v(\psi) d\psi \quad (5.30)$$

versehen. Dieser Raum ist ein Hilbertraum.

Bemerkung 5.2.2 Die Folge der Funktionen

$$\sin \varphi, \cos \varphi, \sin 2\varphi, \cos 2\varphi, \sin 3\varphi \dots \quad (5.31)$$

bildet eine orthonormale Basis für \mathcal{H}_r . Die Funktion

$$u(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \quad (5.32)$$

gehört zu \mathcal{H}_r genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < \infty. \quad (5.33)$$

gilt.

Wir definieren im Raum \mathcal{H} , die folgenden Operatoren (u aus (5.32)):

$$\begin{aligned} \mathbf{W}u(\varphi) &= \vartheta(\varphi)u(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\psi)u(\psi)d\psi \\ \mathbf{H}u(\varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} -a_k \sin k\varphi + b_k \cos k\varphi, \\ \mathbf{S}u(\varphi) &= \sin \varphi u(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi u(\psi)d\psi, \\ \mathbf{P}u(\varphi) &= \mathbf{SH}(\varphi), \\ \mathbf{D}^\sigma u(\varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^\sigma (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad \sigma \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Definitionsbereiche dieser Operatoren seien maximal. Der Operator \mathbf{H} aus (5.18) stimmt mit demjenigen aus (5.34) überein (Hilfssatz 4.2.3). Der Operator $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ ist \mathbf{DH} . Es gilt $\mathbf{H}^2 = -\mathbf{I}$. Damit nimmt die Gleichung (5.24) die Form

$$2\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{WDh} - (2v_\infty \mathbf{S} - Z\mathbf{I})\mathbf{HDh} = 0 \quad (5.35)$$

an.

Bemerkung 5.2.3 Die Operatoren \mathbf{D}^σ sind alle selbstadjungiert. Für $\sigma \geq 0$ sind sie alle positiv definit mit Definitionsbereichen dicht in \mathcal{H}_r , und der Wertebereich ist \mathcal{H}_r . Für $\sigma \leq 0$ sind alle beschränkt positiv semidefinit und injektiv. Ihr Definitionsbereich ist ganz \mathcal{H}_r , und ihre Wertebereiche sind dicht in \mathcal{H}_r .

Definition 5.2.4 Der Raum \mathcal{H}_r^σ , $\sigma \geq 0$ ist der Raum aller Funktionen aus \mathcal{H}_r , die dem Definitionsbereich von D^σ angehören. Der Raum wird mit der Norm

$$\|u\|_\sigma = \|D^\sigma u\|_0 \quad (5.36)$$

sowie mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_\sigma = (D^\sigma u, D^\sigma v)_0 \quad (5.37)$$

versehen. Dieser Raum ist ein Hilbertraum.

Für jedes $\sigma, \eta \geq 0$ werden durch (5.34) fünf Operatoren von \mathcal{H}_r^σ in \mathcal{H}_r^η als Einschränkungen der gleich genannten Operatoren in \mathcal{H}_r definiert. Ihre Definitionsbereiche D seien auch maximal, d.h. z.B. $\mathcal{H}_r^\sigma \ni u \in D(W) \Leftrightarrow W(u) \in \mathcal{H}_r^\eta$, wobei $W(u)$ durch (5.34) definiert ist. Alle Operatoren, die sich nur in Start- und Zielräumen sowie in Definitionsbereichen unterscheiden, bezeichnen wir aus Bezeichnungssparsamkeitsgründen gleich. Wenn in diesem Kapitel Start- und Zielraum eines Operators nicht besonders angegeben sind, handelt es sich um einen Operator von \mathcal{H}_r in \mathcal{H}_r . Für $\sigma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist \mathcal{H}_r^σ ein abgeschlossener Unterraum von $W_{2,\sigma}$ in WEIDMANN [21] (eigentlich der Raum aller Funktionen aus $W_{2,\sigma}$, die zusätzlich (5.28) genügen). Für jedes $\sigma \geq 0$ ist \mathcal{H}_r^σ ein abgeschlossener Unterraum von $H^\sigma([0, 2\pi])$ in LIONS-MAGENES [10]. (Es gilt die gleiche Bemerkung wie für $W_{2,\sigma}$.)

Bemerkung 5.2.5 Für $\sigma_1 < \sigma_2$ ist $\mathcal{H}_r^{\sigma_1}$ als Unterraum von $\mathcal{H}_r^{\sigma_2}$ in der Norm von $\mathcal{H}_r^{\sigma_2}$ dicht in $\mathcal{H}_r^{\sigma_2}$.

Bemerkung 5.2.6 Die Funktion

$$u(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \quad (5.38)$$

gehört zu \mathcal{H}_r^σ , $\sigma \geq 1$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma} (a_k^2 + b_k^2) < \infty. \quad (5.39)$$

Bemerkung 5.2.7 Der Operator $D^\sigma : \mathcal{H}_r^{\eta_\infty} \longrightarrow \mathcal{H}_r^{\eta_\infty}$ ist

a) für $\sigma < \eta_2 - \eta_1$ beschränkt und injektiv,

$D(D^\sigma) = \mathcal{H}_r^{\eta_\infty}$, $R(D^\sigma) = \mathcal{H}_r^{\eta_\infty + \sigma}$ dicht in $\mathcal{H}_r^{\eta_\infty}$ und $\|D^\sigma\| = 1$.

b) für $\sigma = \eta_2 - \eta_1$ ein Isomorphismus, und $\|D^\sigma\| = 1$.

c) für $\sigma > \eta_2 - \eta_1$ unbeschränkt und injektiv mit $D(D^\sigma) = \mathcal{H}_r^{\eta_2 - \sigma}$ dicht in $\mathcal{H}_r^{\sigma_\infty}$, $R(D^\sigma) = \mathcal{H}_r^{\sigma_\infty}$.

Für $\eta_1 = \eta_2$ ist D^σ in jedem Fall selbstadjungiert. Dann gilt auch in

Fall a) D^σ ist positiv semidefinit,

Fall b) $D^\sigma = I$,

Fall c) $(D^\sigma u, u)_{\eta_1} \geq \|u\|_{\eta_1}^2$.

Bemerkung 5.2.8 Für $\sigma_1, \sigma_2, \eta \in \mathbf{R}$, $D^{\sigma_1}, D^{\sigma_2}, D^{\sigma_1 + \sigma_2} : \mathcal{H}_r^\eta \rightarrow \mathcal{H}_r^\eta$ gilt

$$D^{\sigma_1} D^{\sigma_2} u = D^{\sigma_1 + \sigma_2} u \quad (5.40)$$

für jedes $u \in \mathcal{H}_r^{\eta - \sigma}$, wobei

$$\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2, 0\}. \quad (5.41)$$

Bemerkung 5.2.9 Für jedes $\sigma \geq 0$ ist $H : \mathcal{H}_r^\sigma \rightarrow \mathcal{H}_r^\sigma$ ein beschränkter und injektiver Operator mit $D(H) = \mathcal{H}_r^\sigma$, $\|H\|_\sigma = 1$, $H^2 = -I$. Der Operator iH ist selbstadjungiert.

Bemerkung 5.2.10 Für $\sigma \in \mathbf{R}$, $D^\sigma, H : \mathcal{H}_r^\sigma \rightarrow \mathcal{H}_r^\sigma$ gilt

$$D^\sigma H u = H D^\sigma u$$

für jedes u im Definitionsbereich von D^σ .

Bemerkung 5.2.11 Der Operator $S : \mathcal{H}_r^\sigma \rightarrow \mathcal{H}_r^\sigma$, $\sigma \in \mathbf{R}$ ist beschränkt und injektiv. Es gilt $D(S) = \mathcal{H}_r^\sigma$, $SH = HS$, wobei $H : \mathcal{H}_r^\sigma \rightarrow \mathcal{H}_r^\sigma$.

Beweis. Für u aus (5.32) gilt

$$\begin{aligned} Su(\varphi) &= \frac{1}{2}(b_2 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (b_{k+1} - b_{k-1}) \cos k\varphi - (a_{k+1} - a_{k-1}) \sin k\varphi \\ Hu(\varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \varphi - a_k \sin \varphi \\ HSu(\varphi) &= -\frac{1}{2}(a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) + \quad (5.42) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} - a_{k+1}) \cos k\varphi + (b_{k-1} - b_{k+1}) \sin k\varphi \\ SHu(\varphi) &= -\frac{1}{2}(a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} - a_{k+1}) \cos k\varphi + (b_{k-1} - b_{k+1}) \sin k\varphi \end{aligned}$$

Damit ist

$$S\mathbf{H}\mathbf{u} = H\mathbf{S}\mathbf{u} \quad (5.43)$$

bewiesen. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \|S\mathbf{u}\|_{\sigma}^2 &= b_2^2 + a_2^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|k|^{2\sigma}}{2} ((a_{k+1} - a_{k-1})^2 + (b_{k+1} - b_{k-1})^2) \\ &\leq 2^{|2\sigma|} \|u\|_{\sigma}^2. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Q.E.D.

Bemerkung 5.2.12 Der Operator $P : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ ist beschränkt und injektiv. Es gilt $D(P) = \mathcal{H}'$, $\|P\|_0 = 1$. $R(P)$ ist dicht in \mathcal{H}' . Der Operator iP ist selbstadjungiert.

Beweis. $\|\mathbf{H}\|_0 = 1$, $\|S\|_0 = 1$, damit ist $\|P\|_0 \leq 1$. Dazu gilt $P(e^{2i\varphi}) = \frac{1}{2}(e^{3i\varphi} - e^{i\varphi})$, $\|e^{2i\varphi}\|_0 = 1$, $\|P(e^{2i\varphi})\|_0 = 1$. Also ist $\|P\|_0 = 1$. S und iH sind in \mathcal{H}' selbstadjungiert, damit ist $iP = iSH = iHS$ selbstadjungiert. P ist injektiv, weil S und H injektiv sind. Aus $u \perp R(P)$ folgt $(u, P^2 u)_0 = 0$, weiter $Pu = 0$ und schließlich $u = 0$. Deswegen muß $R(P)$ dicht in \mathcal{H}' sein. Q.E.D.

Bemerkung 5.2.13 Der Operator $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist beschränkt selbstadjungiert und positiv semidefinit.

Beweis. Die Beschränktheit folgt direkt aus Beschränktheit von ϑ . Es gilt

$$\begin{aligned} (W\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\varphi) u(\varphi) v(\varphi) d\varphi - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} v(\varphi) d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\psi) u(\psi) d\psi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\varphi) u(\varphi) v(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\varphi) v(\varphi) u(\varphi) d\varphi - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\psi) v(\psi) d\psi \\ &= (W\mathbf{v}, \mathbf{u}), \\ (W\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\varphi) u(\varphi)^2 d\varphi \geq 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Q.E.D.

5.3 Die Lösung in $B(0, \infty; \mathcal{H}_r^{\frac{\infty}{\epsilon}})$

In diesem Abschnitt wird zunächst die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung

$$2 \frac{\partial h}{\partial t} + W Dh - (2S - ZI)H Dh = 0, \quad h : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}_r^{\frac{\infty}{\epsilon}}. \quad (5.46)$$

mit der Anfangsbedingung

$$h(0) = h_0(\varphi) \quad (5.47)$$

betrachtet. Dies wird alsdann auf das Problem 5.1.1 angewendet. Sei

$$T_{\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_r^{\infty} \longrightarrow \mathcal{H}_r^{\infty}, \quad T_{\frac{1}{2}} = (W + (ZI - 2S)H)D. \quad (5.48)$$

Satz 5.3.1 Ist $h_0 \in \mathcal{H}_r^{\infty}$, so gibt es genau eine stetige Lösung $h : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{H}_r^{\infty}$ der Gleichung (5.46) mit der Eigenschaft

$$\|h(t)\|_{\frac{1}{2}} \leq 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.49)$$

Beweis. Wir beweisen zuerst, daß der Wertebereich des Operators $T_{\frac{1}{2}} + I : \mathcal{H}_r^{\infty} \longrightarrow \mathcal{H}_r^{\infty}$ dicht in \mathcal{H}_r^{∞} ist. Diesen Operator schreiben wir in der Form

$$T_{\frac{1}{2}} + I = D^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} (W + ZH - 2SH + D^{-1}) D, \quad (5.50)$$

wobei

$$\begin{aligned} D : \mathcal{H}_r^{\infty} &\longrightarrow \mathcal{H}_r, \\ D^{-\frac{1}{2}}(W + ZH - 2SH + D^{-1}) : \mathcal{H}_r &\longrightarrow \mathcal{H}_r \text{ und} \\ D^{\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_r &\longrightarrow \mathcal{H}_r^{\infty} \end{aligned} \quad (5.51)$$

ist. Der Definitionsbereich dieser Verknüpfung von Operatoren ist \mathcal{H}_r^{∞} , was eine Teilmenge des Definitionsbereiches des ursprünglichen Operators $T_{\frac{1}{2}} + I$ ist. Der Wertebereich von D ist offensichtlich ganz \mathcal{H}_r . Der Wertebereich des Operators $D^{-\frac{1}{2}}(W + ZH - 2SH + D^{-1})$ ist dicht in \mathcal{H}_r , denn aus $y \perp R(D^{-\frac{1}{2}}(W + ZH - 2SH + D^{-1}))$ folgt

$$\begin{aligned} (D^{-\frac{1}{2}}(W + ZH - 2SH + D^{-1})D^{-\frac{1}{2}}y, y)_0 &= \\ &= (WD^{-\frac{1}{2}}y, D^{-\frac{1}{2}}y)_0 + (D^{-2}y, y)_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

und daraus folgt $y = 0$. Schließlich ist der Operator $D^{\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_r \longrightarrow \mathcal{H}_r^{\infty}$ ein Isomorphismus. Damit ist die Dichtheit des Wertebereiches von $T_{\frac{1}{2}} + I$ bewiesen. Für jedes u aus dem Definitionsbereich von $T_{\frac{1}{2}}$ gilt

$$(T_{\frac{1}{2}}u, u)_{\frac{1}{2}} = (WDu, Du)_0 \geq 0. \quad (5.53)$$

Nun folgt aus Satz 7.7.3 die Behauptung des Satzes. Q.E.D.

Satz 5.3.2 Ist $h_0 \in \mathcal{H}_r^{\frac{\infty}{\epsilon}}$ und $\vartheta(\varphi) \geq c > 0$ für jedes $\varphi \in [-\pi, \pi]$, so gibt es genau eine stetige Lösung $h : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}_r^{\frac{\infty}{\epsilon}}$ der Gleichung (5.46) mit der Eigenschaft

$$\|h(t)\|_0 \leq e^{-ct}, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.54)$$

Beweis. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt direkt aus Satz 5.3.1. Aus dem Beweis dieses Satzes kann man auch direkt entnehmen, daß der Wertebereich von $T_{\frac{1}{2}} + I$ dicht in $\mathcal{H}_r^{\frac{\infty}{\epsilon}}$ ist. Für jedes u aus dem Definitionsbereich von $T_{\frac{1}{2}}$ gilt

$$(T_{\frac{1}{2}}u, u)_{\frac{1}{2}} = (WDu, Du)_0 \geq c\|u\|^2 > 0. \quad (5.55)$$

Dann erfüllt der Operator $-\frac{1}{2}T_{\frac{1}{2}} + cl$ die Voraussetzungen des Satzes 7.7.3. Daraus folgt

$$\|e^{(-T_{\frac{1}{2}}+cl)t}\| \leq 1 \quad (5.56)$$

und schließlich

$$\|e^{-T_{\frac{1}{2}}t}\| \leq e^{-ct}. \quad (5.57)$$

Q.E.D.

Satz 5.3.3 Das Problem 5.1.1 hat genau eine Lösung (Φ_+, Φ_-) , wobei Φ_+ nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.

Beweis. Die Lösung ist gegeben als die Lösung der Dirichletschen Probleme

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_+(r, \varphi, t) &= 0, & r < 1, \varphi \in [-\pi, \pi], t \geq 0, \\ \Phi_+(1, \varphi, t) &= g(\varphi, t), & \varphi \in [-\pi, \pi], t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_-(r, \varphi, t) &= 0, & r > 1, \varphi \in [-\pi, \pi], t \geq 0, \\ \Phi_-(1, \varphi, t) &= -g(\varphi, t), & \varphi \in [-\pi, \pi], t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.59)$$

wobei $g(\varphi, t)$ aus

$$g(\varphi, t) = h(\varphi, t) + g_s(\varphi), \quad (5.60)$$

$g_s(\varphi)$ aus (5.26) und $h(\varphi, t)$ als einzige beschränkte Lösung von (5.46) zu bestimmen sind. Es gilt $h \in B(0, \infty; \mathcal{H}_r^{\frac{\infty}{\epsilon}})$ und $g_s \in H^1([-\pi, \pi])$. Da die Funktion ϑ stückweise Hölder-stetig ist, ist $\frac{\partial g_s}{\partial \varphi}$ aus (5.23) auch stückweise Hölder-stetig, und g_s ist stückweise Hölder-stetig differenzierbar. Damit gehört g_s zu

$H^1([-\pi, \pi])$. Aus Satz 5.3.1 und $g_0 \in H^{\frac{1}{2}}([-\pi, \pi])$ folgt $h(t) \in \mathcal{H}_r^{\frac{\infty}{\epsilon}}([-\pi, \pi])$, so gehört g aus (5.19) bzw. (5.25) zu $\mathbb{B}(0, \infty; H^{\frac{1}{2}}([-\pi, \pi]))$. Satz 7.3.2 ergibt $\Phi_+ \in \mathbb{B}(0, \infty; D_{\Delta}^1(K(0, 1)))$ und $\Phi_- \in \mathbb{B}(0, \infty; D_{\Delta}^1(K(0, R) \setminus \overline{K(0, 1)}))$ für jedes $R > 1$. Die Behauptung für \mathbf{v} folgt nun direkt aus (5.4). Q.E.D.

Satz 5.3.4 Ist ϑ eine stückweise Hölder-stetige Funktion, gehören ϑ, g_0 zu $H^{\frac{1}{2}}([-\pi, \pi])$ und gilt $\vartheta(\varphi) \geq c > 0$, so ist die Lösung von Problem 5.1.1 als $\Phi_+ : [0, \infty) \rightarrow H^1(K(0, 1))$ und $\Phi_+ : [0, \infty) \rightarrow H_{loc}^1(\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{1}))$ bzw. $\mathbf{v} : [0, \infty) \rightarrow L_{loc}^2(\mathbf{R}^2)$ asymptotisch stabil.

Beweis. Aus Satz 5.3.2 folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0. \quad (5.61)$$

Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(., t) = g_s \quad (5.62)$$

in der Topologie von $H^{\frac{1}{2}}$. Der Satz 7.3.2 liefert nun die Behauptung. Q.E.D.

5.4 Die Lösung in $\mathbb{B}(0, \infty; \mathcal{H}_r^\sigma)$ für $\sigma \geq 1.5$

Es ist schon bewiesen, daß die Lösung der Gleichung (5.46) für $t \in [0, \infty)$ existiert, eindeutig und beschränkt ist. Wenn die Funktion ϑ ausreichend glatt ist, kann auch die Existenz der Lösung für $t \in [0, \infty)$ in höheren Sobolev-Räumen bewiesen werden.

Hilfssatz 5.4.1 Für $\sigma \geq 1$ und $x \geq 0$ gilt

$$(1 + x)^\sigma - 1 \leq \sigma x (1 + x)^{\sigma-1}. \quad (5.63)$$

Beweis. Sei

$$f(x) = (1 + x)^\sigma - 1 - \sigma x (1 + x)^{\sigma-1}. \quad (5.64)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(x) &= -\sigma(\sigma - 1)x(1 + x)^{\sigma-2} \leq 0 \text{ für } x \geq 0, \sigma \geq 1. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Daraus folgt

$$f(x) \leq 0 \text{ für } x \geq 0, \sigma \geq 1. \quad (5.66)$$

Q.E.D.

Hilfssatz 5.4.2 Für $0 \leq x \leq 1$, $a > 0$, $\sigma \geq 1$ gilt

$$(x+a)^\sigma - x^\sigma \leq (1+a)^\sigma - 1. \quad (5.67)$$

Beweis. Sei

$$f(x) = (x+a)^\sigma - x^\sigma - (1+a)^\sigma + 1. \quad (5.68)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ f'(x) &= \sigma(x+a)^{\sigma-1} - \sigma x^{\sigma-1} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.69}$$

für $0 \leq x \leq 1$, $a > 0$, $\sigma \geq 1$. Daraus folgt

$$f(x) \leq 0 \quad (5.70)$$

für $0 \leq x \leq 1$, $a > 0$, $\sigma \geq 1$. Q.E.D.

Hilfssatz 5.4.3 Der Operator $D^{\sigma+\frac{1}{2}}PD^{-\sigma+\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}PD^{\frac{1}{2}} : \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}'$ ist für $\sigma > 1$ beschränkt.

Beweis. In der orthonormalen Basis

$$(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots) \quad (5.71)$$

lauten die Elementen der unendlichen Matrix $[\alpha_{i,j}]$ des o.g. Operators wie folgt:

$$\alpha_{2i-1,2i+1} = \alpha_{2i,2i+2} = [i(i+1)]^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{i}{i+1} \right)^\sigma - 1 \right], \quad (5.72)$$

$$\alpha_{2i+1,2i-1} = \alpha_{2i+2,2i} = [i(i+1)]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{i+1}{i} \right)^\sigma \right], i \in \mathbf{N} \quad (5.73)$$

und die anderen $\alpha_{i,j}$ sind Null:

Aus Hilfssatz 5.4.1 folgt

$$\begin{aligned} \left|1 - \left(\frac{i+1}{i}\right)^\sigma\right| &= \left|\left(1 + \frac{1}{i}\right)^\sigma - 1\right| \\ &\leq \frac{\sigma}{i^\sigma} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{\sigma-1} \\ &\leq \frac{\sigma}{i^\sigma} 2^{\sigma-1}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Nun haben wir

$$|\alpha_{2i-1,2i+1}| = |\alpha_{2i,2i+2}| \leq |\alpha_{2i+1,2i-1}| = |\alpha_{2i+2,2i}| \leq \sigma 2^{\sigma-\frac{1}{2}}. \quad (5.76)$$

Daraus folgt

$$\|\mathbf{D}^{\sigma+\frac{1}{2}} \mathbf{P} \mathbf{D}^{-\sigma+\frac{1}{2}} - \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\|_0 \leq \sigma 2^{\sigma+\frac{1}{2}}. \quad (5.77)$$

Q.E.D.

Hilfssatz 5.4.4 Wenn für $\sigma \geq 1$ und $\varepsilon > 0$ gilt $\vartheta \in H^{\sigma+1+\varepsilon}(-\pi, \pi)$, so ist der Operator $\mathbf{D}^{\sigma+\frac{1}{2}} \mathbf{W} \mathbf{D}^{-\sigma+\frac{1}{2}} - \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, beschränkt.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} \vartheta(\varphi) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \varphi + s_k \sin \varphi, \\ d_k &= k^{\sigma+1+\varepsilon} c_k, \\ e_k &= k^{\sigma+1+\varepsilon} s_k. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Aus $\vartheta \in H^{\sigma+1+\varepsilon}(-\pi, \pi)$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 + e_k^2 < \infty. \quad (5.79)$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} C_k u(\varphi) &= c_k \cos \varphi u(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_k \cos \psi u(\psi) d\psi, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}, \\ S_k u(\varphi) &= s_k \sin \varphi u(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_k \sin \psi u(\psi) d\psi. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Sei zunächst $k > 0$. Die Elemente der unendlichen Matrix $[\beta_{i,j}]$ des Operators $\mathbf{D}^{\sigma+\frac{1}{2}} C_k \mathbf{D}^{-\sigma+\frac{1}{2}} - \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} C_k \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ in der Basis (5.71) lauten

$$\begin{aligned} \beta_{2i-1,2i-2k-1} &= c_k |i(i-k)|^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{i}{i-k} \right)^\sigma - 1 \right], \quad i > k, \quad i \in \mathbf{N}, \\ \beta_{2i,2i-2k} &= c_k |i(i-k)|^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{i}{i-k} \right)^\sigma - 1 \right], \quad i > k, \quad i \in \mathbf{N}, \\ \beta_{2i-1,2k-2i-1} &= c_k |i(k+i)|^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{i}{i+k} \right)^\sigma - 1 \right], \quad 0 < i \leq k, \quad i \in \mathbf{N}, \\ \beta_{2i,2i+2k} &= -c_k |i(i+k)|^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{i}{i+k} \right)^\sigma - 1 \right], \quad 0 < i \leq k, \quad i \in \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

und die anderen $\beta_{i,j}$ sind Null:

$$[\beta_{i,j}] = \begin{pmatrix} & * & & & \\ & * & * & & \\ & * & & * & \\ & * & & * & \\ * & & & & * \\ & * & & & * \\ & * & & & \\ & * & \ddots & & * \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.82)$$

Aus den Hilfssätzen 5.4.1 und 5.4.2 folgt

$$\begin{aligned} |\beta_{2i-1, 2i-2k-1}| &= |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} |i|^{\frac{1}{2}} |i-k|^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{i}{i-k} \right)^\sigma \frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{k^\sigma} \right] \\ &= |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} |i|^{\frac{1}{2}} |i-k|^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{i}{k} + \frac{1}{i-k} \right)^\sigma - \frac{1}{k^\sigma} \right] \\ &\leq |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} |i|^{\frac{1}{2}} |i-k|^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{i-k} \right)^\sigma - 1 \right] \\ &\leq |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} |i|^{\frac{1}{2}} |i-k|^{\frac{1}{2}} \sigma \frac{i}{i-k} \left(1 + \frac{1}{i-k} \right)^{\sigma-1} \\ &\leq |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \left| \frac{i}{i-k} \right|^{\frac{1}{2}} \sigma 2^{\sigma-1} \\ &\leq |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \left| \frac{1}{k} + \frac{1}{i-k} \right|^{\frac{1}{2}} \sigma 2^{\sigma-1} \\ &\leq |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sigma 2^{\sigma-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Analog beweist man

$$|\beta_{2i, 2i-2k}|, |\beta_{2i, 2k-2i}|, |\beta_{2i-1, 2k-2i-1}| \leq |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sigma 2^{\sigma-\frac{1}{2}}. \quad (5.84)$$

Daraus folgt

$$\|C_k\|_0 \leq |d_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sigma 2^{\sigma+\frac{1}{2}}. \quad (5.85)$$

Analog beweist man

$$\|S_k\|_0 \leq |e_k| \frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sigma 2^{\sigma+\frac{1}{2}}. \quad (5.86)$$

Es gilt auch $C_0 = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|D^{\sigma+\frac{1}{2}} WD^{-\sigma+\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} WD^{\frac{1}{2}}\|_0 &\leq \sigma 2^{\sigma+\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} (|d_k| + |e_k|) \\ &\leq \sigma 2^{\sigma+\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+2\varepsilon}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 + e_k^2 \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Q.E.D.

Folgerung 5.4.5 Wenn für $\sigma \geq 1$ und $\varepsilon > 0$ gilt $\vartheta \in H^{\sigma+1+\varepsilon}([-\pi, \pi])$, dann ist der Operator

$$Q = D^{\sigma+\frac{1}{2}}(W - 2v_\infty P + ZH)D^{-\sigma+\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}(W - 2v_\infty P + ZH)D^{\frac{1}{2}} \quad (5.88)$$

von \mathcal{H} , in \mathcal{H} , beschränkt.

Beweis. Dies folgt direkt aus Bemerkung 5.2.10 und den Hilfssätzen 5.4.3 und 5.4.4. Q.E.D.

Satz 5.4.6 Gilt $\vartheta \in H^{\sigma+1+\varepsilon}([-\pi, \pi])$, wobei $\sigma \geq 1$, $\varepsilon > 0$ ist, und $h_0 \in \mathcal{H}_t^{\sigma+\frac{\infty}{\varepsilon}}$, so hat die Gleichung (5.46) eine Lösung $h : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}_t^{\sigma+\frac{\infty}{\varepsilon}}$, die

$$\|h(t)\|_{\sigma+\frac{1}{2}} \leq e^{\|\mathbf{Q}\|_0 t} \quad (5.89)$$

genügt. Gilt zusätzlich $\vartheta(\varphi) \geq c > 0$, so erhalten wir

$$\|h(t)\|_{\sigma+\frac{1}{2}} \leq e^{(\|\mathbf{Q}\|_0 - c)t}. \quad (5.90)$$

Beweis. Den Operator $T_{\sigma+\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_\sigma \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ schreiben wir in der Form

$$T_{\sigma+\frac{1}{2}} = D^{-\sigma-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} D^{\sigma+\frac{1}{2}} (W - 2v_\infty P + ZH) D^{-\sigma+\frac{1}{2}} \right) D^{\sigma+\frac{1}{2}}, \quad (5.91)$$

wobei $D^{-\sigma-\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_t^{\sigma+\frac{\infty}{\varepsilon}} \rightarrow \mathcal{H}_t$, $\frac{1}{2} D^{\sigma+\frac{1}{2}} (W - 2v_\infty P + ZH) D^{-\sigma+\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{H}_t$, $D^{\sigma+\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{H}_t^{\sigma+\frac{\infty}{\varepsilon}}$ ist. Man beachte, daß $D^{-\sigma-\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_t^{\sigma+\frac{\infty}{\varepsilon}} \rightarrow \mathcal{H}_t$, $D^{\sigma+\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{H}_t^{\sigma+\frac{\infty}{\varepsilon}}$ unitäre Isomorphen sind. Nun schreiben wir den Operator

$$U = \lambda I + \frac{1}{2} D^{\sigma+\frac{1}{2}} (W - 2v_\infty P + ZH) D^{-\sigma+\frac{1}{2}} \quad (5.92)$$

in der Form

$$U = V_\lambda + Q, \quad (5.93)$$

wobei

$$V_\lambda = \lambda I + \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} (W - 2v_\infty P + ZH) D^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{H}_t, \quad (5.94)$$

ist. Es gilt

$$(V_\lambda u, u)_0 = \lambda(u, u)_0 + \frac{1}{2} (WD^{\frac{1}{2}} u, D^{\frac{1}{2}} u) \geq \lambda \|u\|_0^2, \quad (5.95)$$

und der Wertebereich des Operators V_λ ist dicht in \mathcal{H}_t . Daraus folgt

$$\left\| \left(\lambda I + \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} (W - 2v_\infty P + ZH) D^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \right\|_0 \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (5.96)$$

Damit gehört V_0 zu $\mathcal{G}(\infty, \mathbf{I})$ (siehe KATO [7], IX-1.4). Gilt $\vartheta(\varphi) \geq c > 0$, so erhalten wir

$$(V_\lambda u, u)_0 = \lambda(u, u)_0 + \frac{1}{2}(WD^{\frac{1}{2}}u, D^{\frac{1}{2}}u) \geq (\lambda + c)\|u\|_0^2 \quad (5.97)$$

und damit gehört V_0 zu $\mathcal{G}(\infty, \mathbf{J})$. Die Behauptung des Satzes folgt nun direkt aus Satz 7.7.5. Q.E.D.

Satz 5.4.7 Ist $\sigma \geq 1$, ϑ eine stückweise Hölder-stetige Funktion und gehören ϑ zu $H^{\sigma+1+\varepsilon}(-\pi, \pi)$ und g_0 zu $H^{\sigma+\frac{1}{2}}(-\pi, \pi)$, so erfüllt die Lösung Φ_+ , Φ_- vom Problem 5.1.1 $\Phi_+(., t) \in H^{\sigma+1}(K(0, 1))$, $\Phi_-(., t) \in H^{\sigma+1}(K(0, R) \setminus K(0, 1))$ für jedes $R > 1$ und jedes $t \geq 0$. Die Abbildungen $t \mapsto \Phi_+(., t)$ von $[0, \infty)$ in $H^{\sigma+1}(K(0, 1))$ und $t \mapsto \Phi_-(., t)$ von $[0, \infty)$ in $H^{\sigma+1}(K(0, R) \setminus K(0, 1))$ sind stetig.

Beweis. Die Funktion g_s gehört zu $H^{\sigma+\frac{1}{2}}(-\pi, \pi)$. Aus Satz 5.3.1 und $g_0 \in H^{\sigma+\frac{1}{2}}(-\pi, \pi)$ folgt $h(t) \in \mathcal{H}_r^{\sigma+\frac{1}{2}}(-\pi, \pi)$, so gehört $g(., t)$ aus (5.19) bzw. (5.25) zu $H^{\sigma+\frac{1}{2}}(-\pi, \pi)$. Satz 7.3.1 ergibt $\Phi_+(., t) \in H^{\sigma+1}(K(0, 1))$, $\Phi_- \in H^{\sigma+1}(K(0, R) \setminus K(0, 1))$ für jedes $R > 1$ und jedes $t \geq 0$ und die Stetigkeit von Φ_+ , Φ_- in t (in dem in unserem Satz beschriebenen Sinn) folgt aus der Stetigkeit von g in t . Q.E.D.

Kapitel 6

Der instationäre Fall für die Gerade

6.1 Einführung

Dieser Fall wird ähnlich wie der instationäre Fall für den Kreis behandelt. Das Ergebnis erhalten wir hier nur unter den Einschränkungen, daß die Eingangsdaten \mathbf{v}_∞ , γ_1 und γ_2 von t unabhängig sind und daß $\gamma_2 \neq 0$ überall und $\gamma_1 \neq 0$ fast überall gilt. Die letzte Eigenschaft impliziert, daß nur die ganze poröse Gerade, die nirgendwo vollkommen undurchlässig ist, behandelt wird und daß der vollkommen durchlässige Teil der Geraden eine Menge der Länge null ist. Wie beim Kreis beweisen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer im Unendlichen beschränkten Lösung unseres Problems.

Im Problem 1.0.1 ist nun Γ die Gerade $y = 0$. An Stelle von $\gamma_1(\mathbf{x})$, $\gamma_2(\mathbf{x})$, $(\mathbf{v} \cdot \nu)_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, $(\mathbf{v} \cdot \sigma)_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ schreiben wir hier $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, $v_{y\pm}(x, t)$, $v_{x\pm}(x, t)$. Wir führen die Funktion ϑ ein:

$$\vartheta(x) = \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)}. \quad (6.1)$$

Anstatt mit \mathbf{v} stellen wir nun das Problem in Φ_+ , Φ_- , wobei

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{v}_\infty + \text{grad } \Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}), & y > 0, \\ \mathbf{v}_\infty + \text{grad } \Phi_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}), & y < 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

ist. Die Eulersche Gleichung kann hier durch die Bernoullische Gleichung

$$\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_\infty + \text{grad } \Phi_\pm)^2 + \frac{\mathbf{p}}{\rho} = \mathbf{C}_\pm(\mathbf{t}). \quad (6.3)$$

ersetzt werden. Da im Unendlichen alle Glieder dieser Gleichung außer $C_{\pm}(t)$ konstant in t sind, sind auch C_+ und C_- zwei reelle Konstanten. Das Filtergesetz (1.16) wird nun zu

$$\begin{aligned} & 2\rho\vartheta(x) \left(\frac{\partial\Phi_{\pm}}{\partial y} + v_{\infty y} \right) = \\ & = 2C + \left(v_{\infty x} + \frac{\partial\Phi_+}{\partial x} \right)^2 - \left(v_{\infty x} + \frac{\partial\Phi_-}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_+ - \Phi_-), \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei

$$C = \frac{1}{2}(C_- - C_+) \quad (6.5)$$

ist. Die lineare Eigenschaft der Geraden und Gleichheit der Normalableitungen von Φ_+ und Φ_- liefern

$$\frac{\partial\Phi_+}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_-}{\partial x} = 0 \quad (6.6)$$

auf der Geraden $y = 0$. Da Φ_+ und Φ_- nur in den Ableitungen vorkommen, wählen wir sie so, daß gilt

$$\Phi_+(x, 0, t) = -\Phi_-(x, 0, t). \quad (6.7)$$

Dies vereinfacht das Filtergesetz. Wir erhalten

$$\rho\vartheta(x) \left(\frac{\partial\Phi_{\pm}}{\partial y} + v_{\infty y} \right) = C + 2v_{\infty x} \frac{\partial\Phi_+}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_+}{\partial t}. \quad (6.8)$$

Dies alles fassen wir in ein Problem zusammen:

Problem 6.1.1 Gegeben sind eine nicht negative beschränkte stückweise Hölderstetige Funktion ϑ mit $\text{supp } \vartheta = \mathbf{R}$, $\rho > 0$, $\mathbf{v}_{\infty} \in \mathbf{R}^2$ und eine Funktion $g_0 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ aus $H_{\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$. Gesucht werden die harmonischen Funktionen $\Phi_+ : \mathbf{R}_+^2 \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ aus $B(0, \infty; D_{\Delta\phi}^1(\mathbf{R}_+^2))$, $\Phi_- : \mathbf{R}_-^2 \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ aus $B(0, \infty; D_{\Delta\phi}^1(\mathbf{R}_-^2))$ und eine reelle Konstante C , die

$$\Delta\Psi_+(x, y, t) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{y} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \quad (6.9)$$

$$\Delta\Psi_-(x, y, t) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{y} < \mathbf{0}, \quad \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \quad (6.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_+(x, 0, t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_-(x, 0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (6.11)$$

$$\rho\vartheta(x) \left(\frac{\partial\Phi_{\pm}}{\partial y} + v_{\infty y} \right) = C + 2v_{\infty x} \frac{\partial\Phi_+}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_+}{\partial t}. \quad (6.12)$$

und

$$\Phi_+(x, 0, 0) = g_0(x) \quad (6.13)$$

genügen.

Sei

$$g(x, t) = \Phi_+(x, 0, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0. \quad (6.14)$$

Die Funktionen $\frac{\partial \Phi_+}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi_+}{\partial y}$ sind durch den sog. Hilbert-Operator verbunden:

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial y}(x, t) = J \frac{\partial \Phi_+}{\partial x}(x, t), \quad (6.15)$$

wobei

$$Jw(x, t) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(\xi, t)}{\xi - x} d\xi. \quad (6.16)$$

ist. Ist die Funktion $g(x, t)$, $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$ schon bekannt, so erhalten wir

$$\Phi_{\pm}(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{\infty} \frac{yg(\xi, t) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \text{grad}_x \Phi_{\pm}(x, y, t) + \mathbf{v}_{\infty}, \quad (6.18)$$

$$p_{\pm}(x, y, t) = \rho \left(C \pm -\frac{1}{2} \mathbf{v}(x, y, t)^2 - \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\pm}(x, y, t) \right), \quad (6.19)$$

und g genügt

$$\rho \vartheta(x) \left(J \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)(x, t) + v_{\infty x} \right) = C + 2v_{\infty x} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial g}{\partial t}(x, t), \quad (6.20)$$

$$x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0,$$

$$g(x, 0) = g_0. \quad (6.21)$$

Es sei

$$h(x, t) = g(x, t) - g_s(x), \quad (6.22)$$

wobei g_s der stationären Gleichung

$$\rho \vartheta(x) \left(J \left(\frac{\partial g_s}{\partial x} \right)(x, t) + v_{\infty x} \right) = C + 2v_{\infty x} \frac{\partial g_s}{\partial x}(x, t) \quad (6.23)$$

genügt. Wir erhalten

$$\rho \vartheta(x) J \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right) = v_{\infty x} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) + 2 \frac{\partial h}{\partial t}(x, t), \quad (6.24)$$

$$x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(x, t) = h_0 = g_0 - g_s \quad (\text{gegeben}). \quad (6.25)$$

6.2 Die Lösung in $B(0, \infty; H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}))$

Hilfssatz 6.2.1 Der Operator J aus (6.16) ist als $J : L^2(\mathbf{R}) \longrightarrow L^2(\mathbf{R})$ beschränkt. Es gilt $J^2 = -I$ und

$$(Ju, v)_{L^2} = -(u, Jv)_{L^2} \quad (6.26)$$

für alle u aus $L^2(\mathbf{R})$.

Beweis. Die Beschränktheit folgt aus Bemerkung 7.4.5. Sei u eine Hölderstetige Funktion mit einem kompakten Träger in \mathbf{R} . Die Sokhotski-Plemeljschen Formeln auf die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (6.27)$$

angewendet ergeben $\operatorname{Re} f_+|_{\mathbf{R}} = u$ und $\operatorname{Im} f_+|_{\mathbf{R}} = -Ju$. Da die Menge aller Hölder-stetigen Funktionen mit einem kompakten Träger in \mathbf{R} dicht in $L^2(\mathbf{R})$ ist und Operator J beschränkt ist, gilt (6.27) auch für jede Funktion u aus $L^2(\mathbf{R})$. Betrachten wir nun die Funktion if , so erhalten wir $\operatorname{Re} if_+|_{\mathbf{R}} = Ju$ und $\operatorname{Im} if_+|_{\mathbf{R}} = u = -J^2u$. Daraus folgt $J^2 = -I$. Die Wechsel der Integrationsordnung (MICHLIN-PRÖSSDORF [13], Kap. II, §4.3, Satz 4.4) liefert

$$\begin{aligned} (Ju, v)_{L^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi) d\xi}{\xi - \eta} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\eta) d\eta}{\eta - \xi} \\ &= -(u, Jv)_{L^2}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Q.E.D.

Hilfssatz 6.2.2 Für den Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ in $L^2(\mathbf{R})$ gilt $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = H^1(\mathbf{R})$, $R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = L^2(\mathbf{R})$ und

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u, v \right)_{L^2} = - \left(u, \frac{\partial}{\partial x} v \right)_{L^2} \quad (6.29)$$

für alle u, v aus $H^1(\mathbf{R})$.

Der Beweis ist trivial.

Hilfssatz 6.2.3 Die Operatoren J und $\frac{\partial}{\partial x}$ kommutieren, d.h. für jedes u aus $H^1(\mathbf{R})$ gilt

$$J \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) = \frac{\partial}{\partial x} (Ju). \quad (6.30)$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (Ju) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\xi - x} d\xi \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi - x} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi) \cdot \frac{1}{\xi - x} d\xi \\ &= J \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Q.E.D.

Hilfssatz 6.2.4 Der Operator $D = J \circ \frac{\partial}{\partial x}$ ist in $L^2(\mathbf{R})$ selbstadjungiert. Es gilt $D(D) = H^1(\mathbf{R})$ und $R(D) = L^2(\mathbf{R})$.

Beweis. Für alle u, v aus $H^1(\mathbf{R})$ haben wir

$$\begin{aligned} (Du, v)_{L^2} &= \left(J \circ \frac{\partial}{\partial x} u, v \right)_{L^2} \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial x} u, Jv \right)_{L^2} \\ &= \left(u, \frac{\partial}{\partial x} \circ Jv \right)_{L^2} \\ &= \left(u, J \circ \frac{\partial}{\partial x} v \right)_{L^2} \\ &= (u, Dv)_{L^2}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

d.h. D ist symmetrisch. Definitions- und Wertebereich von D sind wegen $J^2 = -I$ gleich dem Definitions- und Wertebereich von $\frac{\partial}{\partial x}$. Weil sie maximal sind, ist D auch selbstadjungiert. Q.E.D.

Hilfssatz 6.2.5 Der Operator $D = J \circ \frac{\partial}{\partial x}$ ist in $L^2(\mathbf{R})$ negativ semidefinit.

Beweis. Sei $u \in H^1(\mathbf{R})$. Die Funktion u schreiben wir in der Form:

$$u(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nz(\xi)) + b_n \sin(nz(\xi)), \quad (6.33)$$

wobei $z(x) = 2 \arctan x$. Die Menge aller Funktionen u , für die die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \quad (6.34)$$

konvergiert, ist die Menge aller reellwertigen Funktionen, für die die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} u \quad (6.35)$$

der Menge $L^2(\mathbf{R})$ angehört. Natürlich sind alle Funktionen aus $L^2(\mathbf{R})$ auch in dieser Menge enthalten. Wir haben weiter

$$\begin{aligned} J(\sin(nz(x))) &= \cos(nz(x)), \\ J(\cos(nz(x))) &= -\sin(nz(x)). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}u, u)_{L^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} \sin^2(nz(\xi)) d\xi + \\ &\quad + b_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} \cos^2(nz(\xi)) d\xi \\ &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Q.E.D.

Nun sind wir in der Lage, den Raum $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$ als $\mathcal{D}(\mathcal{D}^{\frac{1}{2}})$ zu definieren. Wir versehen diesen Raum mit der Norm

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \|\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2} \quad (6.38)$$

und mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^{\frac{1}{2}}} = ((-\mathcal{D})^{\frac{1}{2}}u, (-\mathcal{D})^{\frac{1}{2}}v)_{L^2}. \quad (6.39)$$

Völlig analog können auch die Räume $H^\sigma(\mathbf{R})$ für $\sigma > 0$ definiert werden.

Satz 6.2.6 Ist $\vartheta : (-a, a) \rightarrow \mathbf{R}$ eine stückweise Hölder-stetige Funktion und $h_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$, so hat die Gleichung (6.24) genau eine stetige Lösung $h : [0, \infty) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$ mit der Eigenschaft

$$\|h(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq 1. \quad (6.40)$$

Beweis. Für den Operator

$$T = 2v_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} - 2\rho\vartheta(x)J \circ \frac{\partial}{\partial x} : H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}) \quad (6.41)$$

gilt

$$\begin{aligned} (Tu, u)_{H^{\frac{1}{2}}} &= \left(u, \frac{\partial}{\partial x} u\right)_{H^{\frac{1}{2}}} - (2\rho\vartheta(x)Du, u)_{H^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x} u\right), \frac{\partial}{\partial x} u\right)_{L^2} + (2\rho\vartheta(x)Du, Du)_{H^{\frac{1}{2}}} \\ &= (2\rho\vartheta(x)Du, Du)_{L^2} \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Den Operator $T + I$ schreiben wir in der Form

$$T + I = D^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} (-2v_{\infty} J - 2\rho\vartheta(x) + D^{-1}) D, \quad (6.43)$$

wobei

$$\begin{aligned} D : H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbf{R}), \\ D^{-\frac{1}{2}} (-2v_{\infty} J - 2\rho\vartheta(x) + D^{-1}) : L^2(\mathbf{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbf{R}), \\ D^{\frac{1}{2}} : L^2(\mathbf{R}) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (6.44)$$

ist. Der Definitionsbereich dieser Verknüpfung von Operatoren ist $H^1(\mathbf{R})$ und ist eine Teilmenge des Definitionsbereiches des ursprünglichen Operators $T + I$. Der Wertebereich von D ist offensichtlich ganz $L^2(\mathbf{R})$. Der Wertebereich des Operators $D^{-\frac{1}{2}} (-2v_{\infty} J - 2\rho\vartheta(x) + D^{-1})$ ist dicht in $L^2(\mathbf{R})$, denn aus

$$y \perp R(D^{-\frac{1}{2}} (-2v_{\infty} J - 2\rho\vartheta(x) + D^{-1})) \quad (6.45)$$

folgt

$$\begin{aligned} (D^{-\frac{1}{2}} (-2v_{\infty} J - 2\rho\vartheta(x) + D^{-1}) D^{-\frac{1}{2}} y, y)_0 &= \\ = -(2\rho\vartheta(x) D^{-\frac{1}{2}} y, D^{-\frac{1}{2}} y)_0 + (D^{-2} y, y)_0 &= 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

und daraus folgt $y = 0$. Schließlich ist der Operator $D^{\frac{1}{2}} : L^2(\mathbf{R}) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$ ein Isomorphismus. Damit ist auch die Dichtheit des Wertebereiches von $T + I$ bewiesen. Nun folgt aus dem Satz 7.7.3 die Behauptung des Satzes. Q.E.D.

Satz 6.2.7 Existiert eine stationäre Lösung des Problems 3.1.1 für ein Paar (γ_1, γ_2) mit (6.1), und gehört h_0 aus 6.25 zu $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$, so hat das Problem 6.1.1 genau eine Lösung.

Beweis. Da die Funktion ϑ stückweise Hölder-stetig ist, ist $\frac{\partial g_s}{\partial \varphi}$ aus (6.23) auch stückweise Hölder-stetig, und g_s ist stückweise Hölder-stetig differenzierbar. Damit gehört g_s zu $H_\phi^1(\mathbf{R})$. Aus Satz 6.2.6 und $h_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$ folgt $h \in \mathcal{B}(\iota, \infty; \mathcal{H}_\epsilon^{\frac{\infty}{\epsilon}}(\mathbf{R}))$, also gehört $g(., t)$ aus (6.14) bzw. (6.20) zu $H_\phi^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$. Die Funktionen Φ_+ und Φ_- sind durch (6.17) gegeben. Satz 7.3.5 ergibt $\Phi_+ \in \mathcal{B}(0, \infty; D_{\Delta\phi}^1(\mathbf{R}_+^2))$ und $\Phi_- \in \mathcal{B}(0, \infty; D_{\Delta\phi}^1(\mathbf{R}_-^2))$. Q.E.D.

Kapitel 7

Anhang

7.1 Stückweise glatte Flächen und stückweise Hölder-stetige Funktionen

Definition 7.1.1 Eine Funktion $f : \mathbf{R}^m \supseteq \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, wobei Ω ein Gebiet ist, ist stückweise glatt, wenn sie stetig ist, die Menge \mathcal{K} aller $x \in \Omega$, wo sie nicht unendlich oft stetig differenzierbar ist, eine Vereinigung endlich vieler $m - 1$ -dimensionaler beschränkter Mannigfaltigkeiten ist und alle Ableitungen stetig fortsetzbar auf der abgeschlossenen Hülle jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus \mathcal{K}$ sind. Im Fall $m = 1$ besteht die Menge \mathcal{K} aus endlich vielen Punkten.

Definition 7.1.2 Eine Fläche Γ ist stückweise glatt, wenn sie mindestens eine stückweise glatte Parametrisierungsfamilie besitzt.

Definition 7.1.3 Es sei x_0 ein Punkt im \mathbf{R}^n , $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet, das x_0 enthält und α eine reelle Zahl aus $(0, 1)$. Eine Funktion $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ist Hölder-stetig in x_0 mit dem Koeffizienten α , wenn

$$[\gamma]_{\alpha; x_0} = \sup_{x \in \Omega} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad (7.1)$$

endlich ist. Die Funktion γ ist Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α auf Ω , wenn sie in jedem Punkt von Ω Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α ist. Die Menge aller auf Ω mit dem Koeffizienten α Hölder-stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Die Funktion γ ist Hölder-stetig auf Ω , wenn sie Hölder-stetig mit mindestens einem Koeffizienten α aus $(0, 1)$ ist.

Definition 7.1.4 Es sei x_0 ein Punkt in $[a, b]$, wobei $-\infty < a < b < \infty$ gilt. Eine Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ist Hölder-stetig von rechts bzw. von links in x_0 mit dem Koeffizienten α , $0 < \alpha < 1$, wenn sie einen reellen Grenzwert $f(x_0+)$ von rechts bzw. $f(x_0-)$ von links besitzt und

$$[\gamma]_{\alpha; x_0+0} = \sup_{x_0 < x \leq b} \frac{|f(x) - f(x_0+)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad (7.2)$$

bzw.

$$[\gamma]_{\alpha; x_0-0} = \sup_{a \leq x < x_0} \frac{|f(x) - f(x_0-)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad (7.3)$$

endlich ist.

Definition 7.1.5 Die Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ist stückweise Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α auf $[a, b]$, wenn die Menge \mathcal{K} aller Punkte aus (a, b) , wo sie nicht Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α ist, endlich ist, und sie Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α in a von rechts, in b von links und in jedem Punkt aus \mathcal{K} von rechts und von links ist. Die Menge aller auf $[a, b]$ mit dem Koeffizienten α stückweise Hölder-stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $C_s^{0,\alpha}([a, b])$.

Definition 7.1.6 Eine Funktion $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ heißt Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α im Unendlichen, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) := \gamma(\infty) \in \mathbf{R} \quad (7.4)$$

gilt und es eine Konstante $A > 0$ mit

$$|\gamma(x) - \gamma(\infty)| < \frac{A}{|x|^\alpha} \quad (7.5)$$

gibt.

Definition 7.1.7 Die Funktion $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ist stückweise Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α auf \mathbf{R} , wenn sie Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α im Unendlichen ist, die Menge K aller Punkte aus \mathbf{R} , wo sie nicht Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α ist, endlich ist, und sie in jedem Punkt aus K Hölder-stetig mit dem Koeffizienten α von rechts und von links ist.

Definition 7.1.8 Es sei $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ eine stückweise glatte Kurve, $\alpha_j : \mathbf{R} \supseteq \mathcal{M}_j \rightarrow -, | = \infty, \in, \dots, \|$ eine stückweise glatte Parametrisierungsfamilie von Γ und $\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion. Γ heißt stückweise Hölder-stetig, wenn alle Funktionen $\gamma \circ \alpha_j : \mathcal{M}_j \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, k$ stückweise Hölder-stetig sind. Eine Funktion $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ ist stückweise Hölder-stetig, wenn die Funktionen $\operatorname{Re} \varphi$ und $\operatorname{Im} \varphi$ stückweise Hölder-stetig sind.

7.2 Verschiedene Sobolevräume; der Spurensatz

Die meisten hier angegebenen Definitionen und Sätze sind von LIONS-MAGENES [10] übernommen. Die Sätze werden deshalb nicht bewiesen. Die Beweise können im oben genannten Buch gefunden werden.

7.2.1 Die Räume $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}$

Es sei Ω ein Gebiet im \mathbf{R}^n und $m \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}$. Wir definieren den Raum $H^m(\Omega)$ durch

$$H^m(\Omega) = \{u | D^{[\alpha]} u \in L^2(\Omega) \ \forall [\alpha], |\alpha| \leq m\}, \quad (7.6)$$

wobei

$$D^{[\alpha]} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad (7.7)$$

ist. Diesen Raum versehen wir mit der Norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{[\alpha]} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.8)$$

und dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{[\alpha]} u, D^{[\alpha]} v)_{L^2(\Omega)}. \quad (7.9)$$

Dieser Raum ist ein Hilbertraum.

7.2.2 Die Interpolation

Es seien X und Y zwei Hilberträume, die

$$X \subset Y, \quad X \text{ dicht in } Y \text{ mit stetiger Einbettung} \quad (7.10)$$

genügen, und $\Lambda : Y \rightarrow Y$ ein selbstadjungierter, positiv definiter, unbeschränkter Operator, der $D(\Lambda) = X$ und $R(\Lambda) = Y$ genügt. Die Existenz eines solchen Operators ist in LIONS-MAGENES [10], I-2.1 bewiesen. Der Raum $[X, Y]_\theta$ wird durch

$$[X, Y]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (7.11)$$

definiert und mit der Norm

$$\|u\|_{[X, Y]_\theta} = \|u\|_Y + \|\Lambda^{1-\theta} u\|_Y \quad (7.12)$$

versehen. Der Raum $[X, Y]_\theta$ hängt nicht von der Wahl des Operators Λ ab: Sind Λ_1, Λ_2 zwei selbstadjungierte positiv definite Operatoren, die $D(\Lambda_i) = X$, $R(\Lambda_i) = Y$, $i = 1, 2$, genügen, so gilt

$$D(\Lambda_1^{1-\theta}) = D(\Lambda_2^{1-\theta}), \quad (7.13)$$

und die entsprechenden Normen sind äquivalent (Bemerkung I-2.3 in LIONS-MAGENES [10]). Es gilt

$$\begin{aligned} [X, Y]_0 &= X, \\ [X, Y]_1 &= Y. \end{aligned} \quad (7.14)$$

7.2.3 Die Räume $H^s(\mathbf{R}^n)$, $s \in \mathbf{R}$

Es sei $F : u \mapsto \hat{u}$ die Fouriersche Transformation einer Funktion $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Wir definieren den Raum

$$H^s(\mathbf{R}^n) = \left\{ \mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), (1 + |\mathbf{y}|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n) \right\} \quad (7.15)$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} = \|(1 + |y|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \quad (7.16)$$

Mit

$$\hat{\Lambda}v = (1 + |y|^2)^{\frac{m}{2}} v \quad (7.17)$$

und

$$\Lambda u = F^{-1} \Lambda F u \quad (7.18)$$

erhalten wir

$$[H^m(\mathbf{R}^n), \mathbf{H}^0(\mathbf{R}^n)]_\theta = \mathbf{H}^{(1-\theta)\mathbf{m}}(\mathbf{R}^n). \quad (7.19)$$

Es gilt

$$H^s(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{H}^0(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{H}^\sigma(\mathbf{R}^n) \quad (7.20)$$

für $\sigma < 0 < s$,

$$(H^s(\mathbf{R}^n))' = \mathbf{H}^{-s}(\mathbf{R}^n), \quad (7.21)$$

$$[H^{s_1}(\mathbf{R}^n), \mathbf{H}^{s_2}(\mathbf{R}^n)]_\theta = \mathbf{H}^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\mathbf{R}^n), \quad (7.22)$$

und die Abbildung

$$u \longmapsto \varphi D^{[\alpha]} u \quad (7.23)$$

für ein $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ist eine stetige lineare Abbildung von $H^s(\mathbf{R}^n)$ in $H^{s-|\alpha|}(\mathbf{R}^n)$. Die Menge $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ist dicht in $H^s(\mathbf{R}^n)$ für jedes $s \in \mathbf{R}$.

7.2.4 Die Räume $H^s(\Gamma)$

Im Rest dieses Kapitels sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, dessen Rand Γ eine unendlich oft stetig differenzierbare $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ω sei lokal auf einer Seite von Γ .

Sei $\Omega_j \subset \mathbf{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, \nu$ eine offene Überdeckung von Γ , so daß für jedes j eine unendlich oft stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \Omega_j \longrightarrow \mathbb{Q} = \{y | y = \{y', y_n\}, |y'| = 1\} \quad x \longmapsto \varphi_j(x) = y \quad (7.24)$$

mit folgenden Eigenschaften existiert:

1. Es gibt jeweils eine unendlich oft stetig differenzierbare Inverse

$$y \longmapsto \varphi_j^{-1}(y) = x. \quad (7.25)$$

2. Wenn $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ ist, dann hat die Abbildung $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \Omega_i \cap \Omega_j \longrightarrow \Omega_i \cap \Omega_j$ überall eine positiv definite Jacobi-Matrix J_{ij} .

Sei weiterhin $\{\alpha_j\}$ die Zerlegung der Eins auf Γ mit den Eigenschaften

1. $\alpha_j \in \mathcal{D}(-)$,

2. $\text{supp } \alpha_j \subseteq \Omega_j \cap \Gamma$ ist kompakt,

3. $\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j = 1$ auf Γ .

Eine auf Γ integrierbare Funktion u zerlegen wir in

$$u = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j u \quad (7.26)$$

und setzen

$$\varphi_j^*(\alpha_j u)(y') = (\alpha_j u)(\varphi_j^{-1}(y', 0)). \quad (7.27)$$

Nun definieren wir

$$H^s(\Gamma) = \left\{ u \mid \varphi_j^*(\alpha_j u) \in H^s(\mathbf{R}^{n-1}), j = 1, 2, \dots, \nu \right\}. \quad (7.28)$$

Diesen Raum versehen wir mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{\nu} \|\varphi_j^*(\alpha_j u)\|_{H^s(\mathbf{R}^{n-1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.29)$$

Es kann gezeigt werden, daß $H^s(\Gamma)$ von der Wahl von $\{\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j\}$ unabhängig ist. $H^s(\Gamma)$ ist ein Hilbertraum, und die mit verschiedenen $\{\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j\}$ erhaltenen Normen sind äquivalent. Die Menge $\mathcal{D}(-)$ ist dicht in $H^s(\Gamma)$ für $s \geq 0$. Es gilt

$$(H^s(\Gamma))' = H^{-s}(\Gamma) \quad (7.30)$$

und

$$[H^{s_1}(\Gamma), H^{s_2}(\Gamma)]_{\theta} = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Gamma). \quad (7.31)$$

7.2.5 Die Räume $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$. Der Spurensatz

Wir definieren

$$H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), H^0(\Omega)]_{1-\frac{s}{m}} \quad (7.32)$$

für $0 < s < m$. Es kann gezeigt werden, daß die Wahl von verschiedenen m dieselben Räume mit äquivalenten Normen ergibt. $H^s(\Omega)$ ist auch gleich dem Raum aller Einschränkungen auf Ω der Elemente von $H^s(\mathbf{R}^n)$. Die Menge $\mathcal{D}(\overline{\otimes})$ ist dicht in $H^s(\Omega)$ für jedes $s \geq 0$. Die Menge $C^\infty(\Omega)$ ist dicht in $H^s(\Omega)$ nur für $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$.

Satz 7.2.1 Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, dessen Rand Γ das eine unendlich oft stetig differenzierbare $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ω sei lokal auf einer Seite von Γ . Die Abbildung

$$u \longmapsto \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \quad j \in \{0, 1, \dots, \mu\} \quad (7.33)$$

$(\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j})$ ist die Ableitung der Ordnung j nach der Außennormalen auf Γ), wobei μ die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft

$$\mu < s - \frac{1}{2} \quad (7.34)$$

ist, von $\mathcal{D}(\overline{\otimes})$ in $\mathcal{D}(-)$ kann stetig auf eine stetige lineare Abbildung von $H^m(\Omega)$ in $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ fortgesetzt werden. Diese Abbildung ist surjektiv und hat eine stetige rechte Inverse.

7.2.6 Die Räume $H_0^s(\Omega)$, $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$, $s < 0$

Der Raum $H_0^s(\Omega)$ ist die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{D}(\otimes)$ in $H^s(\Omega)$ für $s \geq 0$.

Für $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ gilt $H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$. Sonst ist $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$. Der Raum $H^{-s}(\Omega)$ ($s < 0$) ist definiert durch

$$H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))', \quad (7.35)$$

d.h. $H^{-s}(\Omega)$ ist der Dualraum von $H_0^s(\Omega)$. Die Abbildung von $H_0^s(\Omega)$ in $H^s(\mathbf{R}^n)$

$$u \longmapsto \tilde{u}, \quad (7.36)$$

wobei \tilde{u} die Fortsetzung von u durch 0 außerhalb Ω ist, ist für $s \geq 0$, $s \notin \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$ stetig.

7.2.7 Die Räume $\Xi^s(\Omega)$ und $D_\Delta^s(\Omega)$

Es sei $\varrho(x)$ eine Funktion aus $\mathcal{D}(\overline{\otimes})$, die auf $\partial\Omega = \Gamma$ verschwindet und die von derselben Größenordnung wie die Abstandsfunktion $d(x, \Gamma)$ von x zu Γ ist, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in \Gamma} \frac{\varrho(x)}{d(x, \Gamma)} = d \neq 0 \quad \forall x_0 \in \Gamma. \quad (7.37)$$

Da Γ eine unendlich oft stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, existiert eine solche Funktion. Für $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ definieren wir den Raum

$$\Xi^s(\Omega) = \left\{ u | \varrho^{|\alpha|} D^{[\alpha]} u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq s \right\} \quad (7.38)$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|u\|_{\Xi^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\varrho^{|\alpha|} D^{[\alpha]} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.39)$$

$\Xi^s(\Omega)$ ist ein Hilbertraum, und wir haben

$$\Xi^0(\Omega) = L^2(\Omega), \quad H^s(\Omega) \subset \Xi^s(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad (7.40)$$

mit jeweils stetiger Einbettung. Der Raum $\mathcal{D}(\otimes)$ ist dicht in $\Xi^s(\Omega)$. Für $s = k + \theta$, $k \in \mathbf{N} \cup \mathbf{0}$, $0 < \theta < 1$ definieren wir

$$\Xi^s(\Omega) = [\Xi^{k+1}(\Omega), \Xi^k(\Omega)]_{1-\theta}. \quad (7.41)$$

Auch für jedes $s \geq 0$ ist $\mathcal{D}(\otimes)$ dicht in $\Xi^s(\Omega)$. Wir definieren weiter ($s > 0$)

$$\Xi^{-s}(\Omega) = (\Xi^s(\Omega))'. \quad (7.42)$$

Für $r \geq 0$ definieren wir den Raum

$$D_{\Delta}^{-r}(\Omega) = \left\{ u \mid u \in H^{-r}(\Omega), \Delta u \in \Xi^{-2-r}(\Omega) \right\}. \quad (7.43)$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|u\|_{D_{\Delta}^{-r}(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^{-r}(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{\Xi^{-2-r}(\Omega)}^2. \quad (7.44)$$

Der Raum $\mathcal{D}(\overline{\otimes})$ ist für $r \geq 0$, $r + \frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$ dicht in $D_{\Delta}^{-r}(\Omega)$. Der Spurensatz in diesem Raum lautet

Satz 7.2.2 Für jedes $r \geq 0$, $r + \frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$ ist die Abbildung

$$u \longmapsto u|_{\Gamma} \quad (7.45)$$

von $\mathcal{D}(\overline{\otimes})$ in $\mathcal{D}(-)$ auf eine noch immer gleich genannte Abbildung von $D_{\Delta}^{-r}(\Omega)$ in $H^{-r-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ stetig fortsetzbar.

Auch für $0 < s < 2$ definieren wir den Raum

$$D_{\Delta}^s(\Omega) = \left\{ u \mid u \in H^s(\Omega), \Delta u \in \Xi^{s-2}(\Omega) \right\}. \quad (7.46)$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|u\|_{D_{\Delta}^s(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{\Xi^{s-2}(\Omega)}^2. \quad (7.47)$$

Definition 7.2.3 Der Raum $H_{loc}^s(\Omega)$ ist der Raum aller Funktionen von \mathbf{R}^n in \mathbf{R} , deren Einschränkungen auf jedes beschränkte Gebiet $\Omega_1 \subseteq \Omega$ dem Raum $H^s(\Omega_1)$ angehören. Der Raum $H_{loc}^s(\mathbf{R}^n)$ ist der Raum aller Funktionen von \mathbf{R}^n in \mathbf{R} , deren Einschränkungen auf jedes beschränkte Gebiet Ω dem Raum $H^s(\Omega)$ angehören. In diesem Raum ist die Konvergenz wie folgt definiert:

$$\Phi_n \longrightarrow \Phi_0 \text{ in } H_{loc}^s(\Omega) \iff \Phi_n|_{\Omega_1} \longrightarrow \Phi_0|_{\Omega_1} \text{ in } H^s(\Omega_1) \quad (7.48)$$

für jedes $\Omega_1 \subseteq \Omega$ beschränkt.

7.2.8 Der Raum $B(a, b; E)$

Definition 7.2.4 Es sei E ein Hilbertraum. Wir definieren

$$B(a, b; E) = \begin{cases} C^0([a, b]; E) & (\text{die Menge aller stetigen Funktionen von } [a, b] \text{ in } E), \text{ wenn } -\infty < a < b < \infty \\ & \text{Die Menge aller stetigen und beschränkten Funktionen von } [a, \infty) \text{ in } E, \text{ wenn } -\infty < a \text{ und } b = \infty \\ & \text{Die Menge aller stetigen und beschränkten Funktionen von } (-\infty, b] \text{ in } E, \text{ wenn } -\infty = a \text{ und } b < \infty \\ & \text{Die Menge aller stetigen und beschränkten Funktionen von } \mathbf{R} \text{ in } E, \text{ wenn } a = -\infty, b = \infty \end{cases} \quad (7.49)$$

Der Raum $B(a, b; E)$ ist mit der Norm

$$\|\varphi\|_{B(a,b;E)} = \sup_{t \in [a,b]} \|\varphi(t)\|_E \quad (7.50)$$

versehen.

7.3 Das Dirichletsche Problem für die Laplacesche Gleichung

In diesem Abschnitt wird das Dirichletsche Problem für die Laplacesche Gleichung zuerst für ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand im \mathbf{R}^n in den soeben definierten Sobolevräumen und dann in der Halbebene im \mathbf{R}^2 betrachtet.

7.3.1 Ein beschränktes Gebiet Ω im \mathbf{R}^n

Sei Ω , wie oben, ein beschränktes Gebiet, dessen Rand Γ eine unendlich oft stetig differenzierbare $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ω sei lokal auf einer Seite von Γ .

Satz 7.3.1 Für $s \geq 2$ definiert der Operator P , gegeben durch

$$P(u) = (\Delta u, u|_{\Gamma}), \quad (7.51)$$

wobei Δ im verallgemeinerten (Distributions-) Sinn und $u|_{\Gamma}$ als stetige Fortsetzung derselben Abbildung von $\mathcal{D}(\overline{\otimes})$ in $H^s(\Omega)$ verstanden werden, einen (algebraischen und topologischen) Isomorphismus von $H^s(\Omega)$ auf $H^{s-2}(\Omega) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Satz 7.3.2 Für $s < 2$, $\frac{5}{2} - s \notin \mathbf{N}$ definiert der Operator P , gegeben durch

$$P(u) = (\Delta u, u|_{\Gamma}), \quad (7.52)$$

wobei Δ im verallgemeinerten (Distributions-) Sinn und $u|_{\Gamma}$ als stetige Fortsetzung derselben Abbildung von $\mathcal{D}(\overline{\otimes})$ in $D_{\Delta}^s(\Omega)$ verstanden werden, einen (algebraischen und topologischen) Isomorphismus von $D_{\Delta}^s(\Omega)$ auf $\Xi^{s-2}(\Omega) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Für $\frac{5}{2} - s \in \mathbf{N}$ wissen wir nicht, ob der Raum $\mathcal{D}(\overline{\otimes})$ dicht in $D_{\Delta}^s(\Omega)$ ist.
Es gilt aber

$$D_{\Delta}^s(\Omega) = [D_{\Delta}^{s-\frac{1}{2}}(\Omega), D_{\Delta}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)]_{\frac{1}{2}} \quad H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) = [H^{s-1}(\Gamma), H^s(\Gamma)]_{\frac{1}{2}} \quad (7.53)$$

und wir definieren den Operator

$$u \longmapsto u|_{\Gamma} \quad (7.54)$$

von $D_{\Delta}^s(\Omega)$ in $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ als die Interpolation zwischen den gleich genannten Operatoren von $D_{\Delta}^{s-\frac{1}{2}}(\Omega)$ in $H^{s-1}(\Gamma)$ und von $D_{\Delta}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$ in $H^s(\Gamma)$. Mit anderen Worten: Es sei Λ_1 ein selbstadjungierter positiv definiter unbeschränkter Operator von $D_{\Delta}^{s-\frac{1}{2}}(\Omega)$ in $D^{s-\frac{1}{2}}(\Omega)$ mit $D(\Lambda_1) = D^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$ und $R(\Lambda_1) = D^{s-\frac{1}{2}}(\Omega)$, Λ_2 ein selbstadjungierter positiv definiter unbeschränkter Operator von $H^{s-1}(\Gamma)$ in $H^{s-1}(\Gamma)$ mit $D(\Lambda_2) = H^s(\Gamma)$ und $R(\Lambda_2) = H^{s-1}(\Gamma)$, Ξ_1 die Abbildung $u \longmapsto u|_{\Gamma}$ aus Satz 7.3.2 von $D_{\Delta}^{s-\frac{1}{2}}(\Omega)$ in $H^{s-1}(\Gamma)$ und Ξ_2 die Abbildung $u \longmapsto u|_{\Gamma}$ aus Satz 7.3.2 von $D_{\Delta}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$ in $H^s(\Gamma)$. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 D_{\Delta}^{s-\frac{1}{2}}(\Omega) & \xrightarrow{\Xi_2} & H^s(\Gamma) \\
 \uparrow \Lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \uparrow \Lambda_2^{\frac{1}{2}} \\
 D_{\Delta}^s(\Omega) & & H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\
 \uparrow \Lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \uparrow \Lambda_2^{\frac{1}{2}} \\
 D_{\Delta}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega) & \xrightarrow{\Xi_1} & H^{s-1}(\Gamma)
 \end{array}$$

kommutativ ist, kann die Abbildung $u \mapsto u|_{\Gamma}$ von $D_{\Delta}^s(\Omega)$ in $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ entweder als $\Lambda_1^{\frac{1}{2}}\Xi_2\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}$ oder als $\Lambda_1^{-\frac{1}{2}}\Xi_1\Lambda_2^{\frac{1}{2}}$ genommen werden. Wir erhalten

Satz 7.3.3 Für $\frac{5}{2} - s \in \mathbf{N}$ ist der Operator P , definiert durch

$$P(u) = (\Delta u, u|_{\Gamma}), \quad (7.55)$$

ein (algebraischer und topologischer) Isomorphismus von $D_{\Delta}^s(\Omega)$ auf $\Xi^{s-2}(\Omega) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Folgerung 7.3.4 Das Problem

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\
 u &= g \in H^s(\Gamma) && \text{auf } \Gamma
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

hat genau eine Lösung in $H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$ für $s \geq \frac{3}{2}$ und in $D_{\Delta}^s(\Omega)$ für $s < \frac{3}{2}$.

7.3.2 Die Halbebene im \mathbf{R}^2

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, betrachten wir hier nur die Halbebene $y > 0$. Natürlich gilt alles entsprechend für jede andere Halbebene im \mathbf{R}^2 . Diese Halbebene ($y > 0$) nennen wir \mathbf{R}_+ , und die Gerade $y = 0$ nennen wir \mathbf{R} . Zunächst definieren wir die Abbildung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{2\mathbf{x}}{(\mathbf{y}+1)^2 + \mathbf{x}^2}, \frac{1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2}{(\mathbf{y}+1)^2 + \mathbf{x}^2} \right). \tag{7.57}$$

Diese Abbildung bildet die Kreisscheibe $K(0, 1)$ in die Halbebene \mathbf{R}_+^2 ab. Die Jacobideterminante dieser Abbildung beträgt

$$Jf(x, y) = -4\phi(x, y) = \frac{-4}{[(y+1)^2 + x^2]^2}. \quad (7.58)$$

Nun definieren wir die folgenden Räume:

$$\begin{aligned} H_\phi^s(\mathbf{R}_+^2) &= \{u | (u \circ \mathbf{f}) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{K}(0, 1))\}, \quad s \in \mathbf{R}, \\ \Xi_\phi^s(\mathbf{R}_+^2) &= \{u | (u \circ \mathbf{f}) \in \Xi^s(\mathbf{K}(0, 1))\}, \quad s \in \mathbf{R}, \\ D_{\Delta\phi}^s(\mathbf{R}_+^2) &= \{u | (u \circ \mathbf{f}) \in \mathbf{D}_{\Delta}^s(\mathbf{K}(0, 1))\}, \quad s \in \mathbf{R}, \\ H_\phi^s(\mathbf{R}_+^2) &= \{u | (u \circ \mathbf{f}) \in \mathbf{H}^s(\partial\mathbf{K}(0, 1))\}, \quad s \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (7.59)$$

und versehen sie mit entsprechenden Normen. Natürlich sind die Räume $H_\phi^s(\mathbf{R}_+^2)$ und $H^s(K(0, 1))$ bzw. $\Xi_\phi^s(\mathbf{R}_+^2)$ und $\Xi^s(K(0, 1))$ bzw. $D_{\Delta\phi}^s(\mathbf{R}_+^2)$ und $H_{\Delta}^s(K(0, 1))$ bzw. $H_\phi^s(\mathbf{R})$ und $H^s(\partial K(0, 1))$ miteinander isomorph. Ein Isomorphismus ist durch

$$u \longmapsto u \circ \mathbf{f} \quad (7.60)$$

gegeben. Eine äquivalente Definition für den Raum $H_\phi^0(\mathbf{R}_+^2)$ ist durch

$$H_\phi^0(\mathbf{R}_+^2) = \left\{ \mathbf{u} | \sqrt{\phi}\mathbf{u} = \frac{1}{(\mathbf{y}+1)^2 + \mathbf{x}^2}\mathbf{u} \in \mathbf{H}^0(\mathbf{R}_+^2) = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}_+^2) \right\}, \quad (7.61)$$

und für den Raum $H_\phi^0(\mathbf{R})$ durch

$$H_\phi^0(\mathbf{R}) = \left\{ \mathbf{u} | \sqrt{\phi}\mathbf{u} = \frac{1}{1 + \mathbf{x}^2}\mathbf{u} \in \mathbf{H}^0(\mathbf{R}) = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}) \right\}. \quad (7.62)$$

gegeben.

Satz 7.3.5 Die durch

$$u \longmapsto (\Delta u, u|_{\mathbf{R}}) \quad (7.63)$$

definierte Abbildung definiert einen (algebraischen und topologischen) Isomorphismus von $H_\phi^s(\mathbf{R}_+^2)$ in $H_\phi^{s-2}(\mathbf{R}_+^2) \times \mathbf{H}_\phi^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$ für $s \geq 2$ und von $D_{\Delta\phi}^s(\mathbf{R}^2)$ in $\Xi_\phi^{s-2}(\mathbf{R}_+^2) \times \mathbf{H}_\phi^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$ für $s < 2$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Sätzen 7.3.1, 7.3.2 und 7.3.3. Q.E.D.

Folgerung 7.3.6 *Das Problem*

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{in } \mathbf{R}_+^2 \\ u &= g \in H_\phi^s(\mathbf{R}) && \text{auf } \mathbf{R}\end{aligned}\tag{7.64}$$

hat genau eine Lösung in $H_\phi^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2)$ für $s \geq \frac{3}{2}$ und in $D_{\Delta\phi}^s(\mathbf{R}_+^2)$ für $s < \frac{3}{2}$.

Satz 7.3.7 *Sei \mathbf{R}^2 als \mathbf{C} und \mathbf{R}_+^2 als \mathbf{C}_+ angenommen. Gilt für zwei analytische Funktionen $g, h : \mathbf{C}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ mit $\operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g, \operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h \in D_{\Delta\phi}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_+^2)$*

$$\operatorname{Re}(g_0 \cdot h_0) = 0, \tag{7.65}$$

wobei $g_0, h_0 \in H_0(\mathbf{R})$ die Grenzwerte der Funktionen g, h auf $\mathbf{R} = \partial\mathbf{C}_+$ sind, so gilt

$$\operatorname{Re}(g \cdot h) = 0 \tag{7.66}$$

in ganz \mathbf{C}_+ .

Beweis. Die Funktionen $f \circ \mathbf{f}$ und $g \circ \mathbf{f}$ sind analytisch, und ihre reellen und imaginären Teile gehören zu $D_{\Delta}^{\frac{1}{2}}(K(0, 1))$. Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow 1} (g \circ \mathbf{f})|_{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}^2} = \mathbf{g}_0 \circ \mathbf{f} \quad \lim_{r \rightarrow 1} (\mathbf{h} \circ \mathbf{f})|_{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}^2} = \mathbf{h}_0 \circ \mathbf{f}, \tag{7.67}$$

wobei die Grenzwerte als Grenzwerte der Funktionen in $L^2([-\pi, \pi])$ zu verstehen sind. Die Funktion $\operatorname{Re}[(g \cdot h) \circ \mathbf{f}] = \operatorname{Re}[(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{h} \circ \mathbf{f})]$ genügt der Laplaceschen Gleichung in $K(0, 1)$ und es gilt

$$\lim_{r \rightarrow 1} [(g \cdot h) \circ \mathbf{f}]|_{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}^2} = \mathbf{0} \tag{7.68}$$

in $L^1([-\pi, \pi])$. Daraus folgt $\operatorname{Re}[(g \cdot h) \circ \mathbf{f}] = \mathbf{0}$ und weiter $\operatorname{Re}(g \cdot h) = 0$. Q.E.D.

7.4 Das Cauchysche Integral

Sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ eine doppelpunktfreie stückweise glatte Kurve und $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ eine Funktion. Wir betrachten hier das komplexe Integral

$$C(\varphi; w) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus K(w, \varepsilon)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - w} d\tau, \quad w \in \Gamma. \tag{7.69}$$

Bemerkung 7.4.1 Ist $\varphi \in C_s^{0,\alpha}(\Gamma)$ und Γ beschränkt, so existiert das Integral $C(\varphi; w)$ in jedem Punkt $w \in \Gamma$, wo φ Hölder-stetig ist, und $C(\varphi; \cdot)$ ist in diesen Punkten Hölder-stetig. Ist w_0 ein Punkt, wo φ nicht Hölder-stetig ist, so haben wir in einer Umgebung von w_0

$$C(\varphi; w) = \frac{\varphi(w_0-) - \varphi(w_0+)}{2\pi i} \ln(w - w_0) + C_0(w), \quad (7.70)$$

wobei $C_0(w)$ in w_0 Hölder-stetig ist.

Der Beweis befindet sich in GACHOV [4], §5.1 und 8.2.

Bemerkung 7.4.2 Ist $\gamma \in C_s^{0,\alpha}(\mathbf{R})$, so existiert das Integral

$$J\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \int_{-M}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^M \frac{\gamma(y)}{y-x} dy \quad (7.71)$$

in jedem Punkt x , wo γ Hölder-stetig ist, und dort ist auch $J\gamma(x)$ Hölder-stetig. Ist x_0 ein anderer Punkt, so gilt

$$J\gamma(x) = (\gamma(x_0-) - \gamma(x_0+)) \ln(x - x_0) + J_0(x), \quad (7.72)$$

wobei $J_0(x)$ Hölder-stetig in x_0 ist. Im Unendlichen haben wir

$$J\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x_0 \in K} (\gamma(x_0-) - \gamma(x_0+)) \ln |x| + J_1(x), \quad (7.73)$$

wobei nun $J_1(x)$ Hölder-stetig im Unendlichen ist.

Der Beweis kann aus GACHOV [4], §4.6 und Bemerkung 7.4.1 abgeleitet werden.

Bemerkung 7.4.3 Ist Γ beschränkt, so ist der Operator $\varphi(w) \mapsto C(\varphi; w)$ in $L^p(\Gamma)$ für $1 < p < \infty$ beschränkt.

Der Beweis befindet sich in MICHLIN-PRÖSSDORF [13], §II-2.

Bemerkung 7.4.4 Ist Γ beschränkt, so ist der Operator $\varphi(w) \mapsto C(\varphi; w)$ in $H^m(\Gamma)$ für $m \in \mathbf{N}$ beschränkt.

Der Beweis befindet sich in MICHLIN-PRÖSDORF, §II-6.

Bemerkung 7.4.5 Der Operator $\gamma(x) \mapsto J\gamma(x)$ ist in $L^p(\mathbf{R})$ für $1 < p < \infty$ beschränkt.

Der Beweis befindet sich in CALDERÓN [3].

7.5 Plemeljsche Formeln

Definition 7.5.1 Eine Funktion $\mathbf{v} : \mathbf{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ heißt harmonisches Vektorfeld, wenn sie stetig differenzierbar in Ω ist und in jedem Punkt von Ω

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (7.74)$$

und

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (7.75)$$

gilt.

Die Menge \mathbf{R}^2 kann als ein topologischer Raum mit \mathbf{C} identifiziert werden. Das Hauptergebnis dieser Identifikation ist der folgende Satz.

Satz 7.5.2 Ist $\mathbf{v} : \mathbf{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ ein harmonisches Vektorfeld, so ist die Funktion $F : \mathbf{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, die durch

$$F(x + iy) = v_x(x, y) - iv_y(x, y) \quad (7.76)$$

definiert wird, eine analytische Funktion. Umgekehrt: Ist $F : \mathbf{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ eine analytische Funktion, so ist die Funktion $\mathbf{v} : \mathbf{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$, die durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\operatorname{Re} F(\mathbf{x} + i\mathbf{y}), -\operatorname{Im} F(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) \quad (7.77)$$

definiert wird, ein harmonisches Vektorfeld.

Der Beweis dieses Satzes ist trivial.

Satz 7.5.3 (Analytische Fortsetzung)

Es seien Ω_1 und Ω_2 zwei benachbarte Gebiete in \mathbf{C} mit einer gemeinsamen glatten Randkurve Γ . Sind die Funktionen $F_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbf{C}$ und $F_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbf{C}$ analytisch mit übereinstimmenden Grenzwerten auf Γ , so sind sie beide eine direkte analytische Fortsetzung voneinander.

Den Beweis findet man z.B. in NEHARI, [15]. Eine direkte Folgerung dieses Satzes und der $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ -Identifikation sind die folgenden zwei Sätze.

Satz 7.5.4 Es seien Ω_1 und Ω_2 zwei benachbarte Gebiete in \mathbf{R}^2 mit einer gemeinsamen glatten Randkurve Γ . Ist die Funktion $\mathbf{v} : \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^2$ stetig und als $\mathbf{v} : \Omega_1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ und $\mathbf{v} : \Omega_2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ein harmonisches Vektorfeld, so ist sie auch als $\mathbf{v} : \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^2$ ein harmonisches Vektorfeld.

Satz 7.5.5 Es seien Ω_1 und Ω_2 zwei benachbarte Gebiete in \mathbf{R}^2 mit einer gemeinsamen glatten Randkurve Γ . Ist die Funktion $\Phi : \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ stetig differenzierbar und als $\Phi : \Omega_1 \rightarrow \mathbf{R}$ und $\Phi : \Omega_2 \rightarrow \mathbf{R}$ harmonisch, so ist sie auch als $\Phi : \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ harmonisch.

Bemerkung 7.5.6 Die Sätze 7.5.3 bis 7.5.5 gelten auch, wenn Γ nur eine stückweise glatte Kurve ist, falls alle Punkte, wo Γ nicht glatt ist, isoliert sind.

Der Beweis dafür ist trivial.

Hilfssatz 7.5.7 Es sei Γ eine doppelpunktfreie stückweise glatte beschränkte geschlossene Kurve und Ω_c das Gebiet außerhalb Γ . Es existiert ein harmonisches Vektorfeld $\mathbf{v}_1 : \Omega_c \rightarrow \mathbf{R}^2$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \cdot \nu)(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ \int_{\Gamma} (\mathbf{v}_1 \cdot \sigma)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2\pi. \end{aligned} \tag{7.78}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß der Ursprung des Koordinatensystems innerhalb der Kurve Γ liegt. Es sei Φ die Lösung des äußeren Dirichletschen Problems

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ \Phi(\mathbf{x}) &= -\ln(|\mathbf{x}|) & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \Phi(\mathbf{x}) &\text{ beschränkt in } \infty. \end{aligned} \tag{7.79}$$

Nun definieren wir ein harmonisches Vektorfeld \mathbf{v}_2 durch

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} [\ln(|\mathbf{x}|)] + \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}). \tag{7.80}$$

Dieses Feld verschwindet im Unendlichen, hat die tangentiale Ableitung gleich Null auf Γ und es gilt

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{v}_2 \cdot \nu)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2\pi. \tag{7.81}$$

Durch

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_{2y} \\ v_{1y} &= -v_{2x} \end{aligned} \tag{7.82}$$

wird ein neues harmonisches Vektorfeld mit den gesuchten Eigenschaften erreicht. Q.E.D.

Satz 7.5.8 (*Sochotski 1873, Plemelj 1908*) Sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ eine beschränkte nichtselbstschneidende glatte Kurve und $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ eine Hölder-stetige Funktion. Dann hat das Cauchysche Integral

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (7.83)$$

die Grenzwerte $\Pi_+(w)$ und $\Pi_-(w)$ von beiden Seiten von Γ in jedem Punkt der Kurve außer an den Enden, und sie genügen¹²

$$\begin{aligned} \Pi_+(w) &= \frac{1}{2} \varphi(w) + \frac{1}{2\pi i} V.P. \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - w} d\tau, \\ \Pi_-(w) &= -\frac{1}{2} \varphi(w) + \frac{1}{2\pi i} V.P. \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - w} d\tau. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Umgekehrt: Besitzt eine in $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ analytische beschränkte Funktion die Grenzwerte $\Pi_+(t)$ und $\Pi_-(t)$ auf beiden Seiten von Γ in jedem Punkt $t \in \Gamma$ außer vielleicht an den Enden von Γ , sind Π_+ und Π_- in jedem Punkt, wo sie definiert sind, Hölder-stetig, und strebt Π gegen 0 im Unendlichen, so gilt

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (7.85)$$

wobei

$$\varphi(w) = \Pi_+(w) - \Pi_-(w) \quad (7.86)$$

ist.

Der Beweis der ersten Richtung dieses Satzes befindet sich im GACHOV [4]. Die andere Richtung folgt direkt aus dem Satz von LIOUVILLE (eine beschränkte ganze Funktion ist eine Konstante) und dem Satz über analytische Fortsetzungen (Satz 7.5.3).

¹Mit V.P. wird $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus K(x, \varepsilon)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$ gemeint.

²Ist Γ geschlossen und das Integral im positiven Sinne genommen, so ist die innere Seite von Γ die "+" Seite. In anderen Fällen wird die "+" Seite auf entsprechende Weise bestimmt.

Bemerkung 7.5.9 Satz 7.5.8 gilt auch dann, wenn Γ nur stückweise glatt und φ stückweise Hölder-stetig sind. Die Gleichungen (7.84) gelten dann nur für die Punkte, wo Γ glatt und φ Hölder-stetig sind. Auch für die umgekehrte Aussage genügt schon, daß Γ stückweise glatt und φ stückweise Hölder-stetig sind. In den Punkten, wo Γ nicht glatt ist, gilt

$$\begin{aligned}\Pi_+(w) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(w) + \frac{1}{2\pi i}V.P.\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-w}d\tau, \\ \Pi_-(w) &= -\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(w) + \frac{1}{2\pi i}V.P.\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-w}d\tau,\end{aligned}\tag{7.87}$$

wobei α der Winkel zwischen den Einheitstangenten in w ist.

Dies kann aus Satz 7.5.8 und GACHOV [4], §4.5 abgeleitet werden.

Bemerkung 7.5.10 Ist Γ unbeschränkt und hat φ einen kompakten Träger, so bleibt die Gültigkeit der Gleichungen (7.84) erhalten.

Beweis. Das Integral über Γ wird als Integral über $\text{supp } \varphi$ aufgefaßt.
Q.E.D.

Bemerkung 7.5.11 Auch wenn Γ die reelle Achse ist, gilt Satz 7.84, wenn φ stückweise Hölder-stetig ist.

Dies ist in GACHOV [4], §4.6 bewiesen.

Satz 7.5.12 Es sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ eine stückweise glatte doppelpunktfreie Kurve und $z : \mathbf{R} \supset M \longrightarrow \Gamma$ eine Parameterdarstellung von Γ mit der Eigenschaft

$$|z'(\xi)| = 1, \quad \xi \in M_0, \tag{7.88}$$

wobei $M_0 \subseteq M$ die Menge aller stetig differenzierbaren Punkten von z ist. Ist $u \in C_0^{0,\alpha}(M_0)$ ($C_0^{0,\alpha}(M_0)$ ist die Menge aller Hölder-stetigen Funktionen mit einem kompakten Träger in M_0), $u : M \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion, dann ist durch

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\text{Re } \Psi(\mathbf{x} + i\mathbf{y}), -\text{Im } \Psi(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) , \tag{7.89}$$

wobei

$$\Psi(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{u(\eta)d\eta}{z(\eta) - q}, \quad q \in \mathbf{C} \setminus \Gamma \tag{7.90}$$

ist, ein harmonisches Vektorfeld gegeben. Die Komponenten von \mathbf{w} sind auf Γ von beiden Seiten Hölder-stetig fortsetzbar. Es gilt

$$\mathbf{w}_+(\mathbf{z}(\xi)) \cdot \nu(\mathbf{z}(\xi)) = \mathbf{w}_-(\mathbf{z}(\xi)) \cdot \nu(\mathbf{z}(\xi)) = \operatorname{Im} \left[\frac{\mathbf{z}'(\xi)}{2\pi i} \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \cdot \int_M \frac{\mathbf{u}(\eta) d\eta}{\mathbf{z}(\eta) - \mathbf{z}(\xi)} \right] \quad (7.91)$$

und

$$\mathbf{w}_\pm(\mathbf{z}(\xi)) \cdot \sigma(\mathbf{z}(\xi)) = \pm \frac{1}{2} \mathbf{u}(\xi) + \operatorname{Re} \left[\frac{\mathbf{z}'(\xi)}{2\pi i} \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \cdot \int_M \frac{\mathbf{u}(\eta) d\eta}{\mathbf{z}(\eta) - \mathbf{z}(\xi)} \right] \quad (7.92)$$

für $\xi \in M_0$. Ist Γ eine geschlossene Kurve und gilt

$$\int_M u(\xi) d\xi = 0, \quad (7.93)$$

dann gilt auch

$$\int_\Gamma \mathbf{w}_\pm(\mathbf{x}) \cdot \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (7.94)$$

Beweis. Das Integral (7.90) ist ein Cauchysches Integral der Funktion $\frac{u(\xi)}{z'(\xi)}$. Aus (7.88) folgt $z'(\xi) \neq 0$. Deswegen ist Ψ eine in $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ analytische Funktion, und dann ist \mathbf{w} ein harmonisches Vektorfeld (Satz 7.5.2). Die Plemeljschen Formeln ergeben

$$\Psi_\pm(z(\xi)) = \pm \frac{1}{2} \frac{u(\xi)}{z'(\xi)} + \frac{1}{2\pi i} V.P. \int_M \frac{u(\eta) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)}. \quad (7.95)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\pm(\mathbf{z}(\xi)) \cdot \nu(\mathbf{z}(\xi)) &= \operatorname{Im} [z'(\xi) \Psi_\pm(z(\xi))] \\ &= \operatorname{Im} \left[\pm \frac{1}{2} u(\xi) + \frac{z'(\xi)}{2\pi i} V.P. \int_M \frac{u(\eta) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{z'(\xi)}{2\pi i} V.P. \int_M \frac{u(\eta) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] \end{aligned} \quad (7.96)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\pm(\mathbf{z}(\xi)) \cdot \sigma(\mathbf{z}(\xi)) &= \operatorname{Re} [z'(\xi) \Psi_\pm(z(\xi))] \\ &= \operatorname{Re} \left[\pm \frac{1}{2} u(\xi) + \frac{z'(\xi)}{2\pi i} V.P. \int_M \frac{u(\eta) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right] \\ &= \pm \frac{1}{2} u(\xi) + \operatorname{Re} \left[\frac{z'(\xi)}{2\pi i} V.P. \int_M \frac{u(\eta) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right]. \end{aligned} \quad (7.97)$$

Damit ist (7.91) und (7.92) bewiesen. Ist Γ eine geschlossene Kurve und gilt (7.93), so haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{w}_{\pm}(\mathbf{x}) \cdot \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_M \mathbf{w}_{\pm}(\mathbf{z}(\xi)) \cdot \sigma(\mathbf{z}(\xi)) |\mathbf{z}'(\xi)| d\xi \\ &= \pm \frac{1}{2} \int_M u(\xi) d\xi + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} V.P. \int_M d\xi \int_M \frac{z'(\xi) u(\eta) d\eta}{z(\eta) - z(\xi)} \right]. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Die Integrationsordnung darf hier vertauscht werden (MICHLIN-PRÖSSDORF [13], Kap. II, §4.3, Satz 4.4). Die Funktion

$$\eta \mapsto V.P. \int_M \frac{z'(\xi) d\xi}{z(\eta) - z(\xi)} \quad (7.99)$$

ist eine Konstante und beträgt $-i\pi$. Dies ergibt

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w}_{\pm}(\mathbf{x}) \cdot \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{S} = \pm \frac{1}{2} \int_M \mathbf{u}(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_M \mathbf{u}(\eta) d\eta = \mathbf{0}, \quad (7.100)$$

und damit ist (7.94) bewiesen. Q.E.D.

7.6 Dominante Gleichung

Hier wird folgendes Problem betrachtet:

Problem 7.6.1 (*Die dominante Gleichung*)

Sei Γ eine beschränkte geschlossene Hölder-stetige Kurve. Gesucht wird eine Hölder-stetige Lösung $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ der Gleichung

$$a(w)\varphi(w) + \frac{b(w)}{\pi i} V.P. \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - w} d\tau = f(w), \quad w \in \Gamma, \quad (7.101)$$

wobei $a, b, f : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ drei Hölder-stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$a(w)^2 - b(w)^2 \neq 0, \quad w \in \Gamma \quad (7.102)$$

sind. Von besonderem Interesse ist der Fall, daß a reellwertig und b imaginärwertig sind, d.h. der Fall

$$p(w)\varphi(t) + \frac{q(w)}{\pi} V.P. \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - w} d\tau = f(w), \quad w \in \Gamma, \quad (7.103)$$

wobei p, q zwei Hölder-stetige reellwertige Funktionen sind. Das Problem heißt homogen, falls $f = 0$ ist.

Dieses Problem wurde in GACHOV [4] und in MICHLIN-PRÖSSDORF [13] betrachtet. Wir geben nur die Ergebnisse an.

Definition 7.6.2 Sei Γ eine geschlossene glatte Kurve und $G : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ eine stetige Funktion, die nirgendwo verschwindet. Die Windungszahl der Funktion G ist der Zuwachs des Arguments von G bei einem Durchlauf entlang der Kurve Γ in positiver Richtung dividiert durch 2π .

Ist $z : [a, b] \rightarrow \Gamma$ eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung von Γ und G fast überall stetig differenzierbar, so ist die Windungszahl von G gegeben mit:

$$\text{Ind } G = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\frac{d}{d\xi} G(z(\xi))}{G(z(\xi))} d\xi. \quad (7.104)$$

Nun definieren wir die Windungszahl von G im Fall, daß G nur stückweise stetig ist.

Definition 7.6.3 Sei $G : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ eine stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion, $z : [a, b] \rightarrow \Gamma$ eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung von Γ , und ξ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ die Unstetigkeitspunkte von $G \circ z$. Es gelte weiter $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ und

$$\arg \frac{G(\xi_k+)}{G(\xi_k-)} \neq \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.105)$$

wobei das Argument aus dem Bereich $(-\pi, \pi]$ genommen wurde. Die Windungszahl der Funktion G ist

$$\text{Ind } G = \frac{1}{2\pi} \int_a^{b+n} \frac{G'_z(\xi)}{G_z(\xi)} d\xi, \quad (7.106)$$

wobei $G_z : [a, b+n] \rightarrow \mathbf{C}$,

$$G_z(\xi) = \begin{cases} G(z(\xi)) & \xi < \xi_1, \\ \alpha G(z(\xi_k+)) + (1 - \alpha) G(z(\xi_k-)) & \xi = \xi_k + k - 1 + \alpha, \\ & k = 1, 2, \dots, n, \alpha \in [0, 1], \\ G(z(\xi - k)) & \xi_k + k < \xi < \xi_{k+1} + k, \\ & k = 1, 2, \dots, n-1, \\ G(z(\xi - n)) & \xi > \xi_n + n. \end{cases} \quad (7.107)$$

ist.

Ist φ eine Lösung der Gleichung (7.101), so ist es offensichtlich auch eine Lösung der Gleichung

$$a(t)c(t)\varphi(t) + \frac{b(t)c(t)}{\pi i} V.P. \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t)c(t), \quad t \in \Gamma, \quad (7.108)$$

wobei $c : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ eine Hölder-stetige Funktion ist, die nirgendwo auf Γ verschwindet. Umgekehrt: Ist φ eine Lösung von (7.108), so ist es auch eine Lösung von (7.101). Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß gilt

$$a(t)^2 - b(t)^2 = 1. \quad (7.109)$$

Definition 7.6.4 Die Zahl

$$\kappa = \text{Ind} \frac{a - b}{a + b} \quad (7.110)$$

heißt die Windungszahl der Gleichung (7.108).

Satz 7.6.5 Sei $z_0 \in \Omega$ ein Punkt innerhalb Γ ,

$$a(t)^2 - b(t)^2 = 1, \quad t \in \Gamma, \quad (7.111)$$

$$\kappa = \text{Ind} \frac{a - b}{a + b} \quad (7.112)$$

und

$$Z(t) = \frac{1}{\sqrt{(z_0 - t)^\kappa}} e^{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln[(z_0 - \tau)^{-\kappa} \frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}] \frac{d\tau}{\tau - t}}. \quad (7.113)$$

Gilt $\kappa > 0$, so sind alle Hölder-stetigen Lösungen der Gleichung (7.101) durch

$$\varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)Z(t)P_{\kappa-1}(t), \quad (7.114)$$

gegeben, wobei $P_{\kappa-1}$ ein Polynom vom grad $\kappa - 1$ ist. Gilt $\kappa = 0$, so lautet die einzige Hölder-stetige Lösung der Gleichung (7.101):

$$\varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}. \quad (7.115)$$

Gilt $\kappa < 0$, so hat die Gleichung (7.101) nur dann eine Hölder-stetige Lösung, wenn

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\tau)\tau^{k-1}}{Z(\tau)} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\kappa \quad (7.116)$$

gilt, und diese Lösung ist durch (7.115) gegeben.

Bemerkung 7.6.6 Im Fall (7.103) erhalten wir

$$Z(t) = \frac{1}{\sqrt{(z_0 - t)^\kappa}} e^{\frac{-\kappa}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln(z_0 - \tau) \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \arctan \frac{p(\tau)}{q(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}}. \quad (7.117)$$

Bei $\kappa = 0$ ergibt sich

$$Z(t) = e^{-\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \arctan \frac{p(\tau)}{q(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}}. \quad (7.118)$$

Satz 7.6.7 Ist die Funktion

$$G = \frac{a - b}{a + b} \quad (7.119)$$

stückweise stetig und beschränkt und gilt

$$\arg \frac{G(t_k+)}{G(t_k-)} \neq \pi \quad (7.120)$$

in allen Unstetigkeitspunkten von G , so hat der Operator

$$Qu(\varphi) = a(\varphi)u(\varphi) + \frac{b(\varphi)}{2\pi i} V.P. \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (7.121)$$

im Fall $\text{Ind } G < 0$ bzw. $\text{Ind } G = 0$ bzw. $\text{Ind } G > 0$ eine linke Inverse bzw. eine Inverse bzw. eine rechte Inverse in $L^2(\Gamma)$.

Dies ist zusammen mit der Definition der Windungszahl für stückweise stetige Funktionen nur ein Spezialfall von Satz 4.2 in MICHLIN-PRÖSSDORF [13], §4.4.

7.7 Halbgruppen von Operatoren

Sei \mathcal{X} ein Hilbertraum und $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein linearer Operator. Gesucht wird die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} + Au = 0 \quad (7.122)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A), \quad (7.123)$$

wobei $u : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Funktion ist.

Definition 7.7.1 Gilt für $\{T_t; t \geq 0\} \subseteq L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$

$$\begin{aligned} T_t T_s &= T_{t+s} \quad (\text{für } t, s \geq 0), \\ T_0 &= I, \\ s - \lim_{t \rightarrow t_0} T_t x &= T_{t_0} x, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{7.124}$$

so heißt $\{T_t\}$ eine Halbgruppe der Klasse C_0 . Gilt zusätzlich

$$\|T_t\| \leq 1, \tag{7.125}$$

so heißt $\{T_t\}$ eine Kontraktionshalbgruppe der Klasse C_0 . Gilt (7.124) und gibt es für jede stetige Halbnorm p auf \mathcal{X} eine stetige Halbnorm q auf \mathcal{X} mit der Eigenschaft

$$p(T_t x) \leq q(x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \tag{7.126}$$

so heißt $\{T_t\}$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe der Klasse C_0 . Der Operator A , definiert durch

$$Ax = - \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (T_h - I)x, \tag{7.127}$$

wobei $\{T_t\}$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe der Klasse C_0 ist, heißt der infinitesimale Generator der Halbgruppe $\{T_t\}$.

Bemerkung 7.7.2 Ist A der infinitesimale Generator einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe $\{T_t\}$ der Klasse C_0 und $u_0 \in D(A)$, so ist die durch

$$u(t) = T_t u_0 \tag{7.128}$$

definierte Funktion $u : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$ in jedem Punkt $t \in [0, \infty)$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{du}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)) = -Au(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = u_0. \tag{7.129}$$

Beweis. YOSIDA [24], §IX-3.

Satz 7.7.3 (PHILLIPS und LUMMER). Es sei \mathcal{X} ein Hilbertraum und $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein linearer Operator, dessen Definitionsbereich $D(A)$ dicht in \mathcal{X} ist. Die durch

$$T_t x = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-tA(I+n^{-1}A)^{-1}} x \tag{7.130}$$

definierte Halbgruppe ist eine Kontraktionshalbgruppe genau dann, wenn

$$\operatorname{Re} (\mathbf{A}x, x) \geq 0 \quad (7.131)$$

und $R(I + A) = \mathcal{X}$ gilt. Der infinitesimale Generator dieser Halbgruppe ist A . Dies ist auch die einzige Kontraktionshalbgruppe mit dem infinitesimalen Generator A .

Beweis. Erfolgt durch Ersetzen A durch $-A$ in YOSIDA [24], §IX-8.

Hilfssatz 7.7.4 Es sei \mathcal{X} ein Hilbertraum und $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein abgeschlossener linearer Operator, dessen Definitionsbereich $D(A)$ dicht in \mathcal{X} ist. Gilt

$$\operatorname{Re} (\mathbf{A}x, x) \geq 0 \quad (7.132)$$

und ist $R(I + A)$ dicht in \mathcal{X} , so ist $R(I + A) = \mathcal{X}$.

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{Re} ((I + A)x, x) \geq 1 \quad (7.133)$$

und $R(I + A)$ ist dicht in \mathcal{X} . Dann ist $I + A$ injektiv und für den linearen Operator $(I + A)^{-1} : R(I + A) \rightarrow \mathcal{X}$ gilt

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq 1. \quad (7.134)$$

Der Operator $(I + A)^{-1}$ kann dann stetig auf ganz \mathcal{X} fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung erfüllt

$$(I + A)^{-1}(I + A)x = x, \quad \forall x \in R(I + A). \quad (7.135)$$

Nun kann auch der Operator $(I + A)^{-1}(I + A)$ stetig auf ganz \mathcal{X} fortgesetzt werden. Weil A abgeschlossen ist, muß $R(I + A) = \mathcal{X}$ gelten. Q.E.D.

Satz 7.7.5 Es sei \mathcal{X} ein Hilbertraum und $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein abgeschlossener linearer Operator, dessen Definitionsbereich $D(A)$ dicht in \mathcal{X} ist, und $c \in \mathbf{R}$. Es gelte

$$\operatorname{Re} (\mathbf{A}x, x) \geq c, \quad \forall x \in D(A) \quad (7.136)$$

und $R(\lambda I + A)$ sei dicht in \mathcal{X} für ein $\lambda > 0$. Die durch

$$T_t x = e^{-ct} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-t(A - cl)(I + n^{-1}(A - cl))^{-1}} x \quad (7.137)$$

definierte Halbgruppe ist eine gleichmäßig stetige Halbgruppe der Klasse C_0 mit der Eigenschaft

$$\|\mathbf{T}_t\| \leq e^{-ct}. \quad (7.138)$$

Der infinitesimale Generator dieser Halbgruppe ist \mathbf{A} . $\{\mathbf{T}_t\}$ ist auch die einzige gleichmäßig stetige Halbgruppe der Klasse C_0 mit dem infinitesimalen Generator \mathbf{A} , die (7.138) genügt.

Beweis. Gemäß KATO [7], §V-10 ist $R(\lambda I + A)$ dicht in \mathcal{X} für jedes λ mit $\operatorname{Re} \lambda > -c$. Wir wenden Hilfssatz 7.7.4 und Satz 7.7.3 auf den Operator $A - cI$ an und erhalten die Behauptung. Q.E.D.

Symbolverzeichnis

\mathbf{R}	Menge der reellen Zahlen (auch Gerade $y = 0$ im \mathbf{R}^2)
\mathbf{R}^2	$\{(x, y) x, y \in \mathbf{R}\}$
$\mathbf{R}_+^2, \mathbf{R}_-^2$	siehe Seite 14
$\mathbf{C}_+, \mathbf{C}_-$	als Menge das gleiche wie $\mathbf{R}_+^2, \mathbf{R}_-^2$
\mathcal{M}	ein Intervall im \mathbf{R}
Ω	ein (meistens beschränktes) Gebiet im \mathbf{R}^2 , Seiten 129 und 131
x, y	cartesische Koordinaten im \mathbf{R}^2
r, φ	polare Koordinaten im \mathbf{R}^2
\mathbf{x}	ein Punkt im \mathbf{R}^2
t	die Zeit, $t \geq 0$
Γ	die poröse Kurve
ν	Einheitsnormale des Γ
σ	Einheitstangente des Γ
$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)$	Geschwindigkeit des Fluids
$\mathbf{v}_\infty = (\mathbf{v}_{\infty x}, \mathbf{v}_{\infty y})$	die Geschwindigkeit des Fluids im Unendlichen
p	der Druck des Fluids
$\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \mathbf{p}_+, \mathbf{p}_-$	die Grenzwerte der Geschw. bzw. des Drucks auf Γ
$\gamma = \frac{1}{\delta} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	Funktion der Porosität
Z	die Zirkulation des Fluids dividiert durch 2π , Seiten 15 und 59
ρ	die Dichte des Fluids

C, C_+, C_-	die Konstanten in der Bernoullischen Gleichung
\mathbf{S}	$\text{supp } \gamma_1 \subseteq \Gamma$
\mathbf{T}	$\Gamma \setminus \text{supp } \gamma_1$
A, B, C, Q, T	versch. lineare Operatoren
$K(\mathbf{x}, \varepsilon)$	die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt \mathbf{x} und Radius ε
Re	der reelle Teil einer komplexen Zahl
Im	der imaginäre Teil einer komplexen Zahl
supp	der Träger einer Funktion
∇, grad	der Gradient-Operator, $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right)$, $\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}$
div	der Divergenz-Operator, $\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y}$
rot	der Rotationsoperator, $\text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x}$
Grad	der Flächengradient, Seite 20
$f.\ddot{u}.$	fast überall
$V.P.$	der Hauptwert eines Integrals, Seite 144
Ind	Windungszahl, Seite 148
I	die Identität, $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$
$D(T)$	der Definitionsbereich des Operators T
$R(T)$	der Wertebereich des Operators T
\mathcal{X}'	der Dualraum von \mathcal{X}
$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_\theta$	Interpolationsraum, Seite 130
Λ	der zu $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_\theta$ zugehörige Operator, Seite 130
$[\alpha]$	Index, Seite 129
$[[\alpha]]$	siehe Seite 129
$D^{[\alpha]}$	die partielle Ableitung, Seite 129

$\hat{f} = \mathbf{F}F$	Fouriersche Transformation
$L(\mathbb{S}, \mathbf{R})$	Raum der stetigen linearen Operatoren von \mathbb{S} in \mathbf{R}
$C^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\otimes)$	Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω mit einem kompakten Träger in Ω
$\mathcal{D}'(\otimes)$	Der Dualraum von $\mathcal{D}(\otimes)$
$L^2(\Omega)$	Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen in Ω
$\Pi(\theta)$	das Cauchysche Integral, Seite 140, 143
$C\varphi(t)$	der Hilbert-Operator (allgemein), Seite 140
$J\gamma(x)$	der Hilbert-Operator (Gerade), Seite 141
$H\gamma(\varphi)$	der Hilbert-Operator (Kreis), Seite 61, §4.2
W, R, S, P, D^s	Operatoren auf H_0^s , Seite 105

Die Funktionalräume

Raum	Seite
$C^{0,a}(\Omega)$	128
$C_s^{0,a}(\Omega)$	128
$H^s(\Omega), H^m(\Omega), H^s(\mathbf{R}^n)$	129, 131, 132
$H_0^s(\Omega)$	133
$\Xi^s(\Omega)$	134
$D_\Delta^{-r}(\Omega), D_\Delta^s(\Omega)$	134, 135
$H_{loc}^s(\Omega)$	135
$H_\phi^m(\mathbf{R}_+^2), \mathbf{H}_\phi^s(\mathbf{R}_+^2), \mathbf{H}_{0\phi}^s(\mathbf{R}_+^2), \Theta_\phi^s(\mathbf{R}_+^2), \mathbf{D}_{\Delta\phi}^s(\mathbf{R}_+^2)$	138

Raum	Seite
$\mathbb{B}(b, c; X)$	135
\mathcal{H}_r^σ	104
$\mathcal{H}(\otimes)$	17

Literaturverzeichnis

- [1] BAJTSCHOROV, H. JA. Obtschie poloscheniya ob obtekanii poristogo kruglogo cilindra plosko-parallelnym potokom idealnoji nesschimaemoji schidkosti (Allgemeine Grundlagen für das Umfließen eines porösen Kreiszylinders durch einen ebenen Fluß eines idealen inkompressiblen Fluids). *Vestnik Moskovskogo Univerziteta*, 10:23–31, 1951.
- [2] BAJTSCHOROV, H. JA. Obtekanie poristogo kruglogo cilindra plosko-parallelnym potokom idealnoi nesschimaemoi schidkosti pri lineinom i kvadratitschnom zakone filtracii (Das Umfließen eines porösen Krieszyliners durch einen ebenen Fluß eines idealen inkompressiblen Fluids bei einem linearen und quadratischen Filtrationsgesetz). *Vestnik Moskovskogo Univerziteta*, 8:73–87, 1952.
- [3] CALDERÓN, A.P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 74(4):1324–1327, April 1977.
- [4] GAKHOF, F.D. *Boundary Value Problems*. Pergamon Press, 1966.
- [5] HEIER, K. and WOLFERSDORF, L.v. Exact calculation of some classes of Hilbert integrals with cotangent kernel. *Z. angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 68(11):583–584, 1988.
- [6] HEIER, K. and WOLFERSDORF, L.v. Numerical evaluation of potential flows past a circular cylinder with porous surface. *Z. angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 70(1):65–66, 1990.
- [7] KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, 1976.

- [8] KÜHNAU, R. Zur ebenen Potentialströmung um einen porösen Kreiszylinder. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 40:395–409, Mai 1987.
- [9] LAWRENTJEW, M.A. and SCHABAT, B.W. *Methoden der Komplexen Funktionentheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967.
- [10] LIONS, J.L. and MAGENES, E. *Non-Homogenous Boundary Value Problems and Applications*, volume 1. Springer-Verlag, 1972.
- [11] MARTENSEN, E. *Potentialtheorie*. B. G. Teubner, 1968.
- [12] MIKELIĆ, A., SUHADOLC, A., and VESELIĆ, K. On the potential flow of an ideal incompressible fluid through a porous boundary. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 47:109–125, 1991.
- [13] MIKHlin, S.G. and PRÖSSDORF, S. *Singular Integral Operators*. Springer-Verlag, 1986.
- [14] MUSKHELISHVILI, N.I. *Singular Integral Equations*. Nordhoff International Publishing, 1977.
- [15] NEHARI, Z. *Conformal Mapping*. Dover Publications, 1952.
- [16] PICHTEEV, G. N. *Totschnie metodi vitschisleniya integralov tipa Koschi (Genaue Methoden zur Berechnung der Cauchyschen Integrale)*. Mir Publishers, 1980.
- [17] REISSIG, M. About a nonstationary mixed problem for holomorphic functions arising by the study of a potential flow past a circular cylinder with permable surface. *Mathematische Nachrichten*, 164:283–297, 1993.
- [18] TAYLOR, G. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. *Proc. R. Soc. Lond.*, pages 456–475, 1956.
- [19] WEGERT, E. and WOLFERSDORF, L.v. Plane potential flow past a cylinder with porous surface. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 9:587–605, 1987.
- [20] WEGERT, E. and WOLFERSDORF, L.v. Potential flow past a circular cylinder with permable surface and nonlinear filtration law. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 9 (5):415–428, 1990.

- [21] WEIDMANN, J. *Lineare Operatoren in Hilberträumen*. B. G. Teubner, 1976.
- [22] WOLFERSDORF, L.v. Potential flow past a circular cylinder with permeable surface. *Z. angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 68(1):11–19, 1988.
- [23] WOLFERSDORF, L.v. Unsteady potential flow past a circular cylinder with permable surface. *Z. angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 69(9):285–298, 1989.
- [24] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1974.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Der Fluß durch eine poröse Strecke mit konstanter Permeabilität	43
3.2	Das Umfließen einer undurchlässigen Strecke	44
3.3	Der Fluß durch mehrere poröse Strecken mit konstanter Permeabilität	45
3.4	Das Umfließen mehrerer undurchlässiger Strecken	46
3.5	The flow through a finite porous line with perpendicular velocity in infinity	49
4.1	Die Strömung durch einen porösen Kreis mit konstanten γ_1, γ_2	86
4.2	Die Strömung bei einer Lücke auf der vorderen Seite des Kreises	89
4.3	Die Strömung bei einer Lücke auf der hinteren Seite des Kreises	91

Lebenslauf

28. VI 1965	geboren in Zagreb, Kroatien Eltern: Juraj Keglević, Dr.-Ing. Elektrotechnik Marija Keglević geb. Kempny, Dipl.-Chemikerin Staatsangehörigkeit: kroatisch Konfession: römisch-katholisch
1972–1975	Grundschule “Rade Končar” in Zagreb (Voltino)
1975–1980	Grundschule “Ivana Brlić-Mažuranić” in Zagreb (Kustosija)
1980–1982	Pädagogisches Ausbildungszentrum (V Gymnasium) in Zagreb
1982–1984	Mathematisch-Informatisches Ausbildungszentrum (VIII Gymnasium) in Zagreb
VII 1983	Teilnahme an der Internationalen mathematischen Olympiade in Paris; 3. Preis
15. V 1984	Abitur
1984–1989	Studium Mathematik und Physik an der Universität Zagreb
VIII 1985–IX 1986	Wehrdienst in Gnjilane, Kosovo
27. I 1990	Diplomprüfung. Thema: Methode der finiten Elemente für Stokesschen Fluss
Seit IV 1990	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fernuniversität Hagen

Hagen, den 18. September 2005

Ivan Keglević