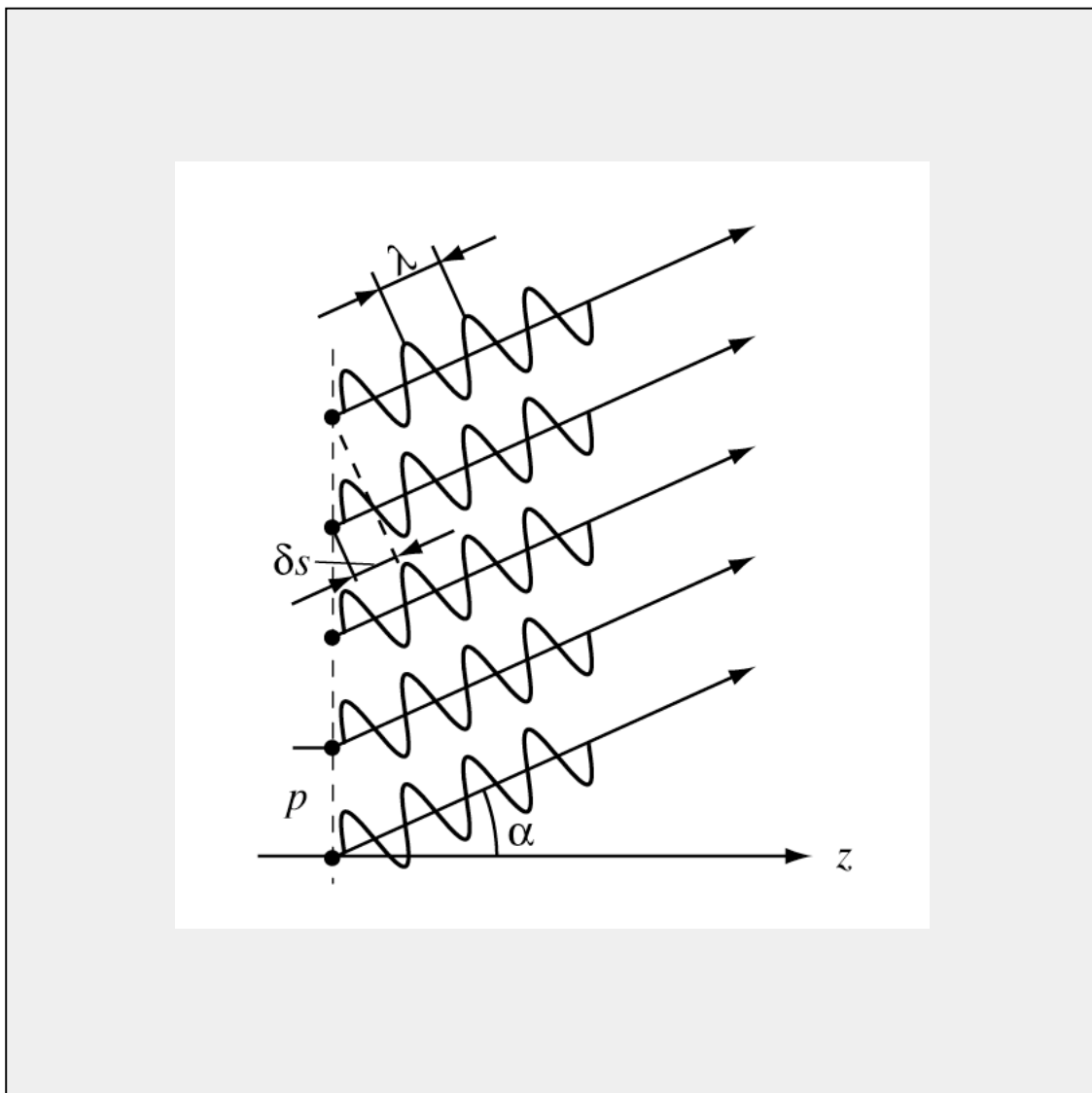


MSc Systems Engineering

Grundlagen der Optik I



KE 1: Was ist Licht?

Autor: Prof. Dr. J. Jahns

Inhaltsverzeichnis zu Kurseinheit 1

1	Was ist Licht?	1
1.1	Blick in die Geschichte	1
1.2	Die Wellengleichung	6
1.3	Lösungen der Wellengleichung	8
	1.3.1 Ebene Welle	8
	1.3.2 Kugelwelle	11
	1.3.3 Zylinderwelle	14
1.4	Darstellung von Photonen im Wellenbild	15
	1.4.1 Unendlich ausgedehnte ebene Welle	16
	1.4.2 Gauß'sches Wellenpaket	16
	1.4.3 Photon als Gauß'sches Wellenpaket	17
1.5	Was ist ein Lichtstrahl?	18
1.6	Wie beobachtet man Licht?	21

1 Was ist Licht?

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Licht als physikalischem Phänomen und seiner mathematischen Beschreibung. Nach einem kurzen geschichtlichen Abriss in Abschnitt 1.1 wenden wir uns zunächst der Darstellung von Licht als Welle zu. Es ist üblich und angebracht, hierbei von den Maxwell-Gleichungen auszugehen, um die Wellengleichung herzuleiten (Abschnitt 1.2). Wir beschreiben unterschiedliche idealisierte Wellentypen: ebene Wellen, Kugelwellen und zylindrische Wellen (1.3). Die Beschreibung von Licht im Teilchenbild (als Photonen) oder im Bild der geometrischen Optik (als Lichtstrahlen) läßt sich mit der Wellenbeschreibung in Verbindung bringen (1.4). Wir stellen Lichtstrahlen als Wellenvektoren dar (1.5). Die Ausbreitung von Lichtstrahlen ist verknüpft mit der Ausbreitung von Lichtenergie, was durch den Poynting-Vektor beschrieben wird (1.6).

1.1 Blick in die Geschichte

Licht als Naturphänomen hat seit jeher die Neugier der Menschen erregt, insbesondere durch Erscheinungen wie die Farben des Himmels, Farbeffekte infolge von Lichtbrechung, Lichtspiegelungen an Wasseroberflächen usw. Wie im Falle anderer Naturerscheinungen hat man auch schon früh begonnen, sich Gedanken zu machen, was Licht eigentlich sei. Es dauerte jedoch bis ins 19. und 20. Jahrhundert, bis man Licht als physikalisches Phänomen richtig verstand und in das Gesamtkonzept der Physik einordnen konnte.

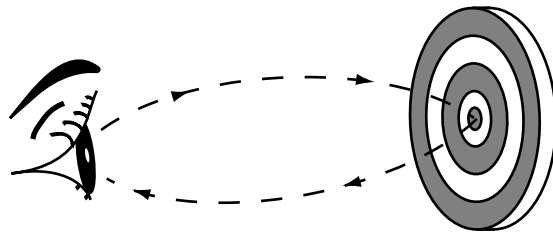


Abbildung 1.1: Prinzip des optischen LIDAR: ein Lichtsignal läuft vom „Sender/Empfänger“ zu einem Meßobjekt und wieder zurück.

Im klassischen Griechenland gab es Philosophen wie Pythagoras, Demokrit, Empedokles, Plato, Euklid und Aristoteles, die sich mit dem Verständnis der Natur von Licht

beschäftigten. Die geradlinige Ausbreitung von Lichtstrahlung war bekannt, ebenfalls das Reflexionsgesetz. Das Brennglas (eine Sammellinse) wurde von Aristophanes in seiner Komödie „Die Wolken“ (424 v. Chr.) erwähnt, die Veränderung der Gestalt eines Gegenstandes beim Eintauchen in Wasser in Platons „Der Staat“ (378 v. Chr.). Manche Theorien über das menschliche Sehen vertraten die Ansicht, daß Licht vom Auge entspringt, zum beobachteten Objekt läuft und dann wieder zum Auge zurückkehrt (Abbildung 1.1): „*Ich bin der, der seine Augen öffnet, und es wird Licht; wenn sich seine Augen schließen, senkt sich Dunkelheit herab*“ (Worte des ägyptischen Gottes Ra im Turiner Papyrus, 1300 v. Chr.). Im heutigen Sprachgebrauch würde man dies mit dem Fachbegriff LIDAR (*light detection and ranging*) oder optisches RADAR (*radio detection and ranging*) bezeichnen. Im Mittelalter begannen Wissenschaftler anzunehmen, daß die visuelle Wahrnehmung wie „passives LIDAR“ ist, d. h., daß die Lichtstrahlung nur den Rückweg vom Objekt zum Auge läuft, nicht auch den Hinweg. Zu Beginn der Neuzeit entwickelten sich im Zeitalter der Aufklärung die Anfänge der Naturwissenschaften, die sich u. a. mit der Fragestellung des Aufbaus des Weltalls beschäftigten. Einer der ersten Wissenschaftler, der sich von den hergebrachten Anschauungen freimachte, war Galileo Galilei (1564–1642). Galilei war nicht nur davon überzeugt, daß sich die Erde um die Sonne bewegt und nicht umgekehrt, sondern auch, daß sich Licht mit einer zwar sehr großen, aber doch endlichen Geschwindigkeit ausbreitet. Eine Messung der Lichtgeschwindigkeit gelang ihm allerdings nicht. Dies gelang im Jahr 1676 Olaf Römer (1644–1710) durch Beobachtung der Phasen des Jupitermondes Io. Der Wert, den er für die Lichtgeschwindigkeit errechnete, war 214.000 km/s.

Isaac Newton (1642–1727) wurde geboren als Galilei starb. Newton, der u. a. für die Erklärung der Gravitation bekannt ist, beschäftigte sich auch mit unterschiedlichen Lichtphänomenen. Bekannt sind seine Experimente, mit denen er die Dispersion (Farbaufspaltung) von Licht mit Hilfe eines Prismas nachwies. Zitat aus seinen Aufzeichnungen: „*I procured me a triangular glass prism to try therewith the celebrated phenomena of colours*“. Newton folgerte aus seinen Experimenten, daß sich das weiße sichtbare Licht aus einer Vielzahl voneinander unabhängiger Farbanteile zusammensetzt. Newton blieb lange Zeit unentschieden über die Natur von Licht. Im Verlauf seines Lebens kam er allerdings immer mehr zu der Meinung, daß Licht ein Strom von Teilchen ist, was u. a. die Entstehung von Schattenbereichen gut erklärt. Newton beobachtete auch die nach ihm benannten „Newton-Ringe“, farbige Erscheinungen, wie sie z. B. bei Ölfilmen auf einer nassen Straße auftreten. Diese Newton-Ringe sah wiederum Huygens (1629–1695) als einen der besten Beweise für die Wellennatur von Licht an. Im Gegensatz zu Newton schloß Huygens aus seinen Beobachtungen korrekt, daß sich die Lichtausbreitung verlangsamt, wenn es in ein optisch dichteres Material eintritt. Er war in der Lage, die Gesetze für die Brechung und Reflexion von Licht herzuleiten und beobachtete das Phänomen der Polarisation.

Der Streit über die Eigenschaften von Licht hielt über einen langen Zeitraum an. Die Wellentheorie wurde wieder in den Vordergrund gebracht durch Thomas Young (1773–1829). Er beschrieb in den ersten Jahren des 19. Jahrhunderts mehrere Experimente (siehe Abbildung 1.2), mit deren Hilfe er einen neuen Begriff in die Optik einführte, nämlich den der Interferenz zweier Wellen. Zitat: *“When two undulations, from different origins, coincide either perfectly or very nearly in direction, their joint effect is a combination of the motions belonging to each.”* Durch Anwendung des Interferenzprinzips konnte Young die Entstehung von Farben in dünnen Filmen erklären und mit Hilfe von Newtons Originaldaten die Wellenlängen mehrerer Farben bestimmen. Dennoch wurde er für seine Theorie angegriffen und zog sich schließlich enttäuscht zurück.

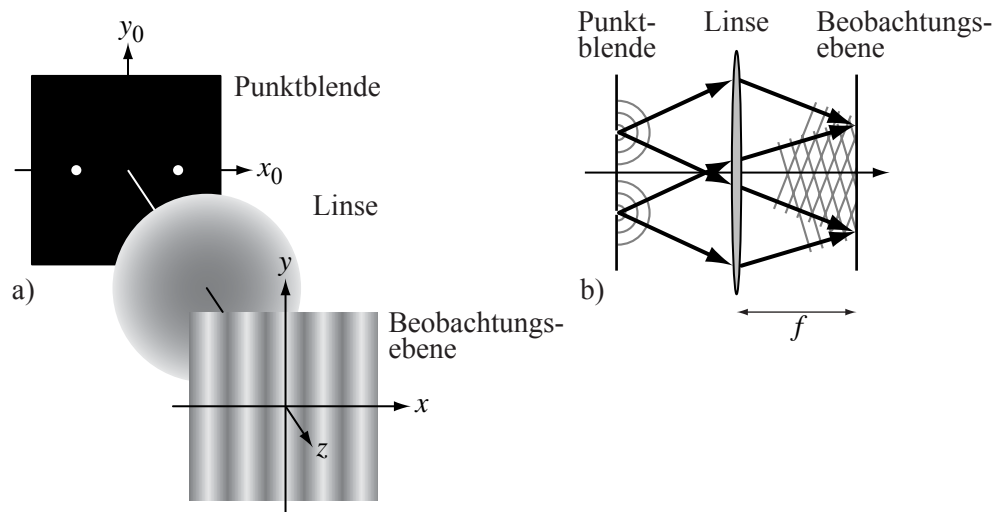


Abbildung 1.2: Young-Interferometer: Prinzipieller Aufbau in a) räumlicher und b) schematischer Darstellung.

Als Nachweis für die Wellennatur von Licht sieht man eines der Experimente von Young an. Beim Young'schen Interferenzexperiment beleuchtet eine Lichtquelle eine Blende mit zwei Punktöffnungen (Abbildung 1.2). Diese wirken wie zwei virtuelle Lichtquellen, die jeweils eine Kugelwelle aussenden. Bei fester Phasenbeziehung der Wellenzüge beobachtet man durch ihre Überlagerung ein Interferenzmuster. In großer Entfernung von der Blende (praktisch realisiert durch Beobachtung in der hinteren Brennebene einer Sammellinse) entsteht ein regelmäßiges Streifenmuster, die „Young'schen Interferenzstreifen“.

Unabhängig von den Entwicklungen in der Optik, schritten im 19. Jahrhundert die Untersuchungen der Elektrizität und des Magnetismus voran. Eine Beziehung zwischen der Optik und dem Elektromagnetismus wurde experimentell durch Michael Faraday (1791–1867) hergestellt. Er fand heraus, daß der Polarisationszustand einer

Lichtwelle, welche sich durch ein Medium ausbreitet, verändert werden kann, indem man ein starkes Magnetfeld an das Material anlegt. Die unterschiedlichen experimentellen Befunde wurden von James Clark Maxwell (1831–1879) in einem einzigen Satz von mathematischen Gleichungen zusammengefaßt. Rein auf theoretischen Überlegungen aufbauend, konnte er zeigen, daß sich ein elektromagnetisches Feld als Transversalwelle ausbreiten kann. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle wird durch die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Ausbreitungsmediums (des „Äthers“) bestimmt. Für die Lichtausbreitung im Vakuum errechnete Maxwell mit Hilfe der Formel

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (1.1)$$

einen Wert, der mit dem gemessenen Wert der Lichtgeschwindigkeit übereinstimmte. Die Schlußfolgerung war: Licht ist eine elektromagnetische Wellenerscheinung (“*an electromagnetic disturbance in the form of waves*”). In der Gleichung bezeichnen ε_0 die elektrische und μ_0 die magnetische Feldkonstante. Die Theorie wurde 1888 durch Heinrich Hertz (1857–1894) experimentell bestätigt, der mehrere Experimente mit langwelliger elektromagnetischer Strahlung durchführte, die Maxwells Theorie unterstützten.

Die Akzeptierung der Wellentheorie schien als Konsequenz zu beinhalten, daß zur Lichtausbreitung ein Medium (ein „Äther“) erforderlich ist. Wenn es Wellen gab, dann mußte es auch ein unterstützendes Medium geben. Große wissenschaftliche Anstrengungen folgten, die Natur dieses „Äthers“ zu untersuchen und ihn nachzuweisen. Diese Aufgabe stellte sich auch der in Königsberg geborene und in den Vereinigten Staaten wirkende Albert Abraham Michelson (1852–1931), der bereits in der Lage gewesen war, präzise Messungen der Lichtgeschwindigkeit durchzuführen. Zusammen mit Edward Williams Morley (1838–1923) führte er ein Experiment durch, das den Nachweis für die Existenz des Äthers bringen sollte — mit negativem Ergebnis. Für Michelson war dies eine große Enttäuschung, weil er vermutete, sein Experiment sei nicht präzise genug.

Die wahre Bedeutung des Michelson-Morley-Experiments wurde Jules Henri Poincaré (1854–1912) bewußt. Im Jahr 1900 stellte er fest: “*Our aether, does it really exist? I do not believe that more precise observations could ever reveal anything . . .*”. Im Jahr 1905 stellte Albert Einstein (1879–1955) seine Spezielle Relativitätstheorie auf. Er lehnte die Vorstellung eines Äthers ab und postulierte u. a., daß Licht sich als elektromagnetische Erscheinung im leeren Raum mit einer Geschwindigkeit c ausbreitet. Innerhalb Einsteins Theorie konnten unterschiedliche experimentelle Befunde erklärt werden. Insbesondere begann man nun zu verstehen, daß entgegen der geplanten Absicht das Michelson-Morley-Experiment tatsächlich ein experimenteller Beweis für die Nichtexistenz des Äthers ist.

Obwohl sich also im Verlauf von etwa 100 Jahren allmählich das Verständnis der Welleneigenschaften von Licht entwickelt hatte, kam zu Beginn des 20. Jahrhunderts durch die entstehende Atom- und Quantenphysik das Bild von Lichtteilchen wieder zum Vorschein. 1900 beschrieb Max Planck (1858–1947) eine Theorie zur Beschreibung von Strahlungsquellen, welches auf der Annahme gründet, daß Lichtenergie in diskreten „Quanten“ vorkommt, also nicht beliebig klein sein kann. Damit konnte er theoretische Probleme beseitigen, die durch eine klassische Beschreibung von Lichtstrahlung nach Rayleigh und Jeans nicht lösbar war. Mit Plancks Arbeiten wurde das Zeitalter der Quantenphysik eingeläutet, welches submikroskopische Phänomene beschreibt. Plancks Aussage ist, daß ein Lichtquant oder „Photon“ eine Energie \mathcal{E} besitzt, die der Frequenz ν der entsprechenden Lichtwelle proportional ist:

$$\mathcal{E} = h \cdot \nu \quad (1.2)$$

Die Proportionalitätskonstante h nennt man das Planck'sche Wirkungsquantum ($h = 6,6260755 \cdot 10^{-34}$ Js).

Im Verlauf der 20er Jahre dieses Jahrhunderts sorgten die Arbeiten von Bohr, Born, Heisenberg, Schrödinger, De Broglie, Pauli, Dirac und anderen zur Quantenphysik dafür, daß Strahlung und Materie sowohl Wellen- als auch Teilchennatur aufweisen. Man fand z. B., daß „Teilchen“ wie Elektronen ebenfalls Interferenzmuster erzeugen können. Vielleicht sollte man besser sagen: daß man auch im Teilchenbild Erscheinungen wie z. B. die Interferenz beschreiben kann. Die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie Einsteins sorgten dafür, daß Begriffe, die man ursprünglich nur mit „Teilchen“ oder nur mit „Wellen“ assoziierte, fast austauschbar wurden. De Broglie zeigte, daß man einem Teilchen mit dem Impuls p eine Wellenlänge λ zuschreiben kann:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.3)$$

Einsteins berühmte Formel verbindet Masse m mit Energie \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = mc^2 \quad (1.4)$$

Eine eindeutige Antwort auf die Frage: *Was ist Licht?* läßt sich also nicht geben. Die vielleicht beste Antwort stammt von Einstein, der sagte: Licht ist wie der französische Philosoph Voltaire. Voltaire wurde katholisch geboren, trat als junger Mann zum Protestantismus über, und kehrte kurz vor seinem Tod zum Katholizismus zurück. Licht wird als Teilchen geboren, lebt als Welle und stirbt wieder als Photon, wenn es absorbiert wird.

Neben der grundsätzlichen Frage nach den Eigenschaften von Licht interessiert uns natürlich die Frage: *Wie beschreibt man Licht mathematisch?* Damit wollen wir uns im Rest dieses Kapitels beschäftigen.

1.2 Die Wellengleichung

Die folgende Herleitung der Wellengleichung ist bewußt mathematisch-formal gehalten. Wir beginnen mit den Maxwell'schen Gleichungen in ihrer differentiellen Darstellung:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon\mu\dot{\mathbf{E}} &= \mu\mathbf{j} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dazu kommt folgende Gleichung:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.6)$$

Hierbei bezeichnen:

- \mathbf{E} das elektrische Feld,
- \mathbf{B} das magnetische Feld,
- $\dot{\mathbf{B}}$ die zeitliche Ableitung $\partial\mathbf{B}/\partial t$,
- \mathbf{j} die Ladungsstromdichte,
- ε die Dielektrizitätskonstante,
- μ die magnetische Permeabilität,
- ρ die Ladungsträgerdichte und
- σ die elektrische Leitfähigkeit.

\mathbf{E} und \mathbf{B} sind Funktionen von vier Variablen, nämlich den drei Ortskoordinaten x , y und z sowie der Zeit t . In isotropen und homogenen Medien sind die „Materialkonstanten“ ε , μ , ρ und σ konstant. Wir wollen im folgenden außerdem annehmen, daß ihre Werte nicht von der elektrischen und magnetischen Feldstärke abhängen. In diesem Fall sind die Maxwell-Gleichungen linear. Das heißt, wenn \mathbf{E}_1 und \mathbf{B}_1 Lösungen sind und auch \mathbf{E}_2 und \mathbf{B}_2 , dann sind auch alle Linearkombinationen $a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2$ und $b_1\mathbf{B}_1 + b_2\mathbf{B}_2$ Lösungen der Maxwell-Gleichungen. Die Annahme der Linearität ist übrigens nicht immer gewährleistet, wie z. B. beim Auftreten hoher elektrischer und magnetischer Feldstärken. Die i. a. nichtlineare Abhängigkeit von ε und μ wird bewußt beim elektro-optischen bzw. magneto-optischen Effekt ausgenützt.

Wir beschränken uns nun auf Isolatoren ($\sigma = 0$) und vernachlässigen auch den Einfluß von Ladungsträgern ($\rho = 0$). Unter diesen Gegebenheiten wird aus den Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon\mu\dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.8)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, wenden wir auf (1.7) den Rotationsoperator an und auf (1.8) den Operator $\partial/\partial t$:

$$\nabla \times \left| \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon \mu \dot{\mathbf{E}} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{B}} - \varepsilon \mu \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.10)$$

Für den Ausdruck $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ gibt es die folgende Identität:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} \quad (1.11)$$

Hier ist Δ der Laplace-Operator (in kartesischer Darstellung):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.12)$$

Mit $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ kann man nun schreiben:

$$\Delta \mathbf{E} = \nabla \times \dot{\mathbf{B}} \quad (1.13)$$

Wegen (1.10) wird hieraus:

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon \mu \ddot{\mathbf{E}} \quad (1.14)$$

oder nach Umstellung

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.15)$$

Analog zu Gleichung (1.15) läßt sich eine ähnliche Gleichung für das Magnetfeld \mathbf{B} herleiten.

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.16)$$

Gleichungen (1.15) und (1.16) sind Wellengleichungen, deren physikalische Bedeutung wir im folgenden genauer diskutieren wollen. c ist die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r und der relativen magnetischen Permeabilität μ_r .

$$c = (\varepsilon \mu)^{-\frac{1}{2}} = (\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r)^{-\frac{1}{2}} = c_0 (\varepsilon_r \mu_r)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.17)$$

mit $\varepsilon_0 \approx 8,854188 \cdot 10^{-12}$ (As/Vm) und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (N/A²) $\approx 1,256637 \cdot 10^{-6}$ (Vs/Am). Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist $c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s.

1.3 Lösungen der Wellengleichung

1.3.1 Ebene Welle

Es gibt unterschiedliche Lösungen für die Wellengleichung. Wir wollen zunächst die so genannten ebenen Wellen untersuchen. Die Ausführlichkeit, mit der die ebenen Wellen untersucht werden sollen, ist ihrer Bedeutung für die mathematische Beschreibung von optischen Wellenfeldern angemessen. Wie wir später sehen werden, kann man ein Feld nach ebenen Wellen entwickeln, was mathematisch einer Fourier-Transformation entspricht. Ebene Wellen sind Raum-Zeit-Funktionen, für die zu einem festen Zeitpunkt der geometrische Ort konstanter Schwingungsphase eine Ebene ist (Abbildung 1.3). Die Gleichung einer solchen Ebene ist von der Form

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{const.} \quad (1.18)$$

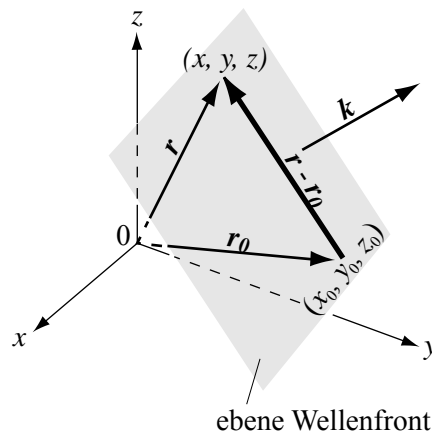


Abbildung 1.3: Ebene Welle. Hier bezeichnet \mathbf{k} den Wellenvektor senkrecht zur Phasenfront. \mathbf{r} und \mathbf{r}_0 sind Vektoren, die zu Punkten in der Ebene weisen.

Hierbei bezeichnet $\mathbf{r} = (x, y, z)$ einen Punkt der Ebene. $k^{-1} \mathbf{k}$ ist der Einheitsvektor, der senkrecht auf der Ebene gleicher Phase steht, und somit auch der Vektor, in dessen Richtung sich die ebene Welle ausbreitet. Eine beliebige ebene Welle $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, welche Lösung der Wellengleichung ist, hat die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt) \quad (1.19)$$

Dabei ist f eine beliebige stetige und ableitbare Funktion. Um die Eigenschaften weiter zu untersuchen, legen wir vorübergehend die Richtung des Normalenvektors \mathbf{k} mit der z -Achse zusammen. Dann ist

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_k f(kz - ckt) \quad (1.20)$$

Für ein festes Argument der Funktion f gilt die Gleichung:

$$kz - ckt = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad z = z_0 + ct \quad (1.21)$$

Daraus folgt, daß die Lichtgeschwindigkeit c die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle ist. Bisher haben wir die Funktion f nicht näher spezifiziert. Im allgemeinen sind für die Beschreibung einer Lichtwelle die harmonischen Funktionen, also die Sinus- und die Kosinus-Funktion, von Interesse. Für eine mathematische Beschreibung ist deren komplexe Darstellung günstig:

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A \quad (1.22)$$

Eine ebene harmonische Welle wird also durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} \quad (1.23)$$

An einem festen Ort beobachtet man eine zeitliche Schwingung mit einer (Kreis-)Frequenz $\omega = ck$.

Anmerkung

Eine ebene Welle, welche sich in $+z$ -Richtung ausbreitet, wird durch den Ausdruck $\exp[i(kz - \omega t)]$ beschrieben, aber auch durch $\exp[-i(kz - \omega t)]$. Die Wahl des Vorzeichens im Exponenten ist physikalisch gesehen nicht relevant, sondern erfolgt per Festlegung. Insofern findet man in unterschiedlichen Büchern unterschiedliche Darstellungen. Im folgenden wird die Darstellung $\exp[i(kz - \omega t)]$ verwendet.

Statt (1.23) schreibt man manchmal auch:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k e^{i[k(\alpha x + \beta y + \gamma z) \pm \omega t]} \quad (1.24)$$

wobei α , β und γ die Komponenten des Einheitsvektors $k^{-1}\mathbf{k}$ darstellen, die man auch als die Richtungskosinus des Vektors \mathbf{k} bezeichnet. Bei einer harmonischen Welle wiederholt sich die räumliche Schwingungsphase periodisch (Abbildung 1.4). Die Periode, d. h. also zum Beispiel der Abstand zwischen zwei Schwingungsmaxima, nennt man die Wellenlänge λ . Im folgenden betrachten wir eine Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet. Die räumliche Periodizität bedeutet, daß folgende Identität gegeben sein muß:

$$e^{ikz} = e^{i[k(z+\lambda)]} = e^{ikz} e^{ik\lambda} \quad (1.25)$$

Damit dies für alle Werte von k , z und λ gewährleistet ist, muß gelten, daß $e^{ik\lambda} = 1$ ist, woraus folgt:

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{bzw.} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.26)$$

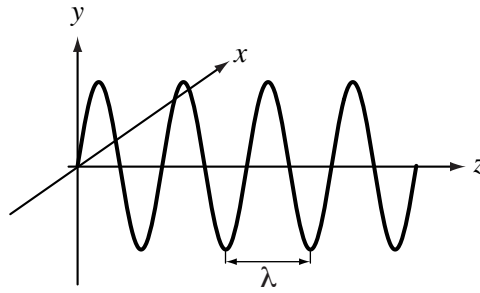


Abbildung 1.4: Harmonische Schwingung. λ bezeichnet die Wellenlänge.

Für den Wellenvektor \mathbf{k} gilt allgemein die folgende Beziehung:

$$|\mathbf{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.27)$$

Gleichung (1.27) beinhaltet übrigens, daß die drei Komponenten des Wellenvektors voneinander abhängig sind. Anders ausgedrückt, wenn für eine ebene Welle die Komponenten k_x und k_y vorgegeben sind, dann ist damit die z -Komponente gemäß $k_z = [(2\pi/\lambda)^2 - (k_x^2 + k_y^2)]^{1/2}$ festgelegt.

Der Vektor $\mathbf{E}_k = (E_{k,x}, E_{k,y}, E_{k,z})$ beschreibt die physikalischen Eigenschaften einer ebenen Welle, die mit der Amplitude zusammenhängen: die Orientierung der Schwingung (d. h. den Polarisationszustand) sowie den räumlichen Verlauf. Zunächst sei angenommen, daß \mathbf{E}_k unabhängig vom Ort und der Zeit ist; dann haben wir den Fall einer unendlich ausgedehnten linear polarisierten ebenen Welle vor uns, welche sich in Richtung von \mathbf{k} ausbreitet.

Beispiel 1.1 Ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung entlang der z -Achse

Wir nehmen an, daß \mathbf{k} parallel zur z -Achse verläuft (Abbildung 1.4). In diesem Fall ist der \mathbf{E} -Vektor unabhängig von x und y . Wir benutzen nun die Maxwell-Gleichungen (1.7) und (1.8) für ladungsfreie Felder:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (1.28)$$

Wenn \mathbf{E} von x und y unabhängig ist, dann reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (1.29)$$

Nun nehmen wir noch an, daß die Welle linear polarisiert sei, d. h. ihre Schwingungsamplitude liegt in einer bestimmten Ebene, von der wir ohne Verlust der Allgemeinheit unserer Herleitung annehmen, es sei die (y, z) -Ebene (siehe Abb. 1.4). Dies bedeutet nun, daß

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E(z, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

ist. Eine ebene Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet und in y -Richtung linear polarisiert ist, wird gemäß Gleichung (1.24) mathematisch wie folgt dargestellt:

$$E_y(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (1.31)$$

Mit Hilfe von Gleichung (1.13) folgt nun, daß für das magnetische Feld \mathbf{B} gilt:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (1.32)$$

und B_y sowie B_z konstant und somit vorläufig nicht von Interesse sind. Durch einfache Integration können wir nun B_x berechnen.

$$\begin{aligned} B_x &= -\int \frac{\partial E_y}{\partial z} dt \\ &= ikE_0 e^{ikz} \int e^{-i\omega t} dt \\ &= \left(\frac{k}{\omega}\right) E_0 e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Die Integrationskonstante, die ein zeitunabhängiges Feld repräsentiert, wurde hier weggelassen. Wir vergleichen nochmals (1.31) mit (1.33) und stellen fest, daß sich E_y und B_x nur um einen konstanten Faktor unterscheiden und daher die gleiche Zeitabhängigkeit besitzen. Der Proportionalitätsfaktor ist $k/\omega = 1/(\lambda\nu) = 1/c$, so daß wir schreiben können: $E = cB$. Dieses Ergebnis, welches hier für ebene Wellen hergeleitet wurde, ist auch auf die unten behandelten Kugel- und Zylinderwellen anwendbar. \mathbf{E} und \mathbf{B} sind daher an sämtlichen Orten \mathbf{r} in Phase. Darüber hinaus sind sie wegen $\mathbf{E} = E_y(z, t)\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{B} = B_x(z, t)\mathbf{e}_x$ überall orthogonal zueinander. Der Vektor $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ zeigt in z -Richtung, also in Ausbreitungsrichtung.

1.3.2 Kugelwelle

Wenn man einen Stein ins Wasser wirft, beobachtet man hinterher, wie sich kreisförmige Wellen bilden, die sich von einem Zentrum wegbewegen. Wenn man sich dies auf die dritte Dimension erweitert vorstellt, dann hat man das Bild einer Quelle vor sich, die ständig kugelförmige Wellen in alle Richtungen hin abstrahlt. Wir stellen uns eine beliebig kleine Lichtquelle im Ursprung eines Koordinatensystems vor, d. h. als sogenannte „Punktquelle“. Die Strahlung, die von ihr ausgeht, ist dann gleichförmig über alle Richtungen oder „isotrop“. Die Wellenfronten (Flächen gleicher Phase) sind

Kugeloberflächen. Diese Kugelsymmetrie führt dazu, daß man die mathematische Beschreibung am günstigsten in sphärischen Polarkoordinaten durchführt (siehe Abbildung 1.5). Die kartesischen Koordinaten x , y und z gehen über in einen Satz von Koordinaten r , θ und φ gemäß:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.34)$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (1.35)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (1.36)$$

In Kugelkoordinaten lautet der Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.37)$$

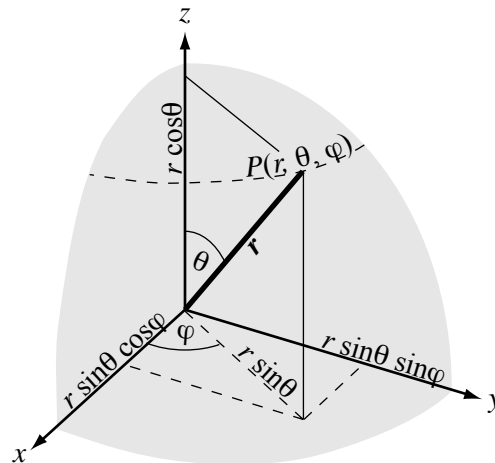


Abbildung 1.5: Polarkoordinatensystem.

Die Kugelsymmetrie der Wellen bedeutet nun, daß die Lösungen $\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{E}(r)$ nur von der radialen Koordinate abhängen. Im Laplace-Operator sind dann die winkelabhängigen Terme nicht von Bedeutung. Die Wellengleichung lautet dann also z. B. für das elektrische Feld:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} \quad (1.38)$$

Die allgemeine Lösung dieser sphärischen Wellengleichung lautet $(C_1/r) f_1(r - ct) + (C_2/r) f_2(r + ct)$. Hier sind C_1 und C_2 beliebige Konstanten. Ein spezieller Fall ist die harmonische Kugelwelle:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_r \frac{e^{ik(r \pm ct)}}{r} \quad (1.39)$$

Die Richtung von \mathbf{k} ist parallel zu \mathbf{r} , das \mathbf{E} -Feld ist senkrecht zu \mathbf{r} . Bemerkenswert ist, daß die Amplitude der Kugelwelle von r abhängt, was natürlich auch aus Gründen der Energieerhaltung notwendig ist. Für größer werdenden Abstand vom Zentrum der Welle beobachtet man ein Abflachen der Wellenfront (Abbildung 1.6). Bei genügend großem Abstand kann man den $1/r$ -Abfall der Amplitude vernachlässigen und statt (1.39) unter Vernachlässigung des zeitabhängigen Faktors schreiben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{E}_r e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} e^{\pm i\omega t} \quad (1.40)$$

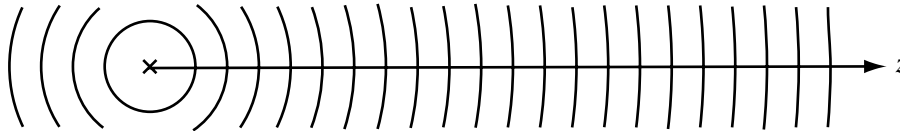


Abbildung 1.6: Abflachen der Wellenfront einer Kugelwelle mit zunehmendem Abstand von der Quelle.

Wenn man sich nun einen kleinen Bereich um die z -Achse betrachtet wie in Abbildung 1.6 dargestellt, d. h. wenn $x^2 + y^2 \ll z^2$ ist, dann kann man den Exponenten in (1.40) in eine Taylorreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} &= z \left(1 + \frac{x^2+y^2}{z^2} \right)^{1/2} \\ &= z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{z^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{x^2+y^2}{z^2} \right)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Wenn nun der dritte Term in der Taylor-Reihe gegenüber den beiden anderen vernachlässigbar ist, dann erhält man folgenden Ausdruck für die paraxiale Näherung einer Kugelwelle, die vom Punkt $z = 0$ ausgeht und sich in $+z$ -Richtung ausbreitet:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{E}_r e^{i(kz - \omega t)} \cdot e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)}, z > 0 \quad (1.42)$$

Der erste Exponentialausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung beschreibt eine ebene Welle, die sich mit der Zeit t in $+z$ -Richtung ausbreitet. Der zweite $\exp(\dots)$ -Term beschreibt eine divergente Kugelwelle in paraxialer Näherung. Für große z -Werte wird $(x^2 + y^2)/\lambda z \approx \text{const.}$, d. h. es liegt i. w. eine ebene Welle vor.

Was passiert für den Fall, daß r gegen Null geht? Die Lösung e^{ikr}/r ist nur für den Fall $r \neq 0$ definiert, da sonst für $r = 0$ die Amplitude unendlich groß werden würde. Dies macht nun wiederum physikalisch keinen Sinn, da der Energieinhalt einer Welle endlich sein muß. Wie behilft man sich nun von der Anschauung her? Angenommen, wir stellen uns eine konvergente Kugelwelle vor. Dann müßte selbst bei endlichem Energiegehalt der Welle die Amplitude im Fokus, d. h. dem unendlich kleinen Punkt, auf den die Welle zuläuft, unendlich groß werden. Glücklicherweise hilft einem hier die Unschärferelation, die besagt, daß man grundsätzlich eine Welle nicht auf einen beliebig kleinen Punkt konzentrieren kann (siehe Kapitel 3). Wir müssen also verstehen, daß der Begriff der Kugelwelle wie auch die Begriffe ebene Welle und Zylinderwelle mathematische Idealisierungen darstellen, mit denen sich die Physik i. a. gut beschreiben läßt.

1.3.3 Zylinderwelle

Eine weitere idealisierte Wellenform ist die zylindrische Welle. Im zylindrischen Koordinatensystem werden r , φ und z als Koordinaten verwendet (Abbildung 1.7).

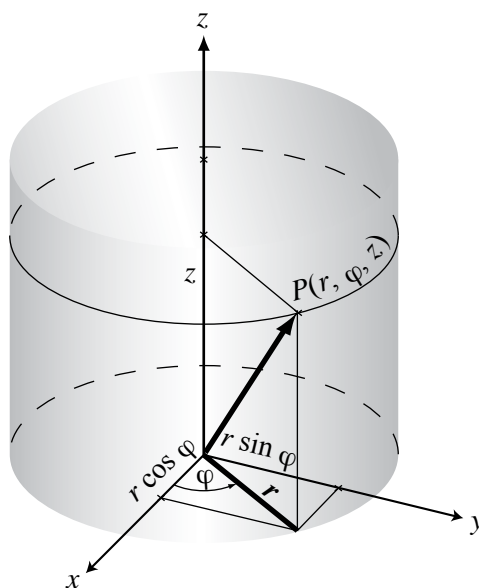


Abbildung 1.7: Zylindrisches Koordinatensystem.

Es ist zu beachten, daß \mathbf{r} jetzt ein zweidimensionaler Vektor ist: $\mathbf{r} = (x, y)$. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Der Laplace-Operator lautet in zylindrischen Koordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.44)$$

Die zylindrische Symmetrie erfordert nun, daß die Lösungen der Wellengleichung nur von r abhängen. Die Wellengleichung lautet dann:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.45)$$

Für ausreichend große Entfernung ($kr \gg 1$) können wir als Lösung schreiben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_r \frac{e^{ik(r \pm ct)}}{\sqrt{r}} \quad (1.46)$$

1.4 Darstellung von Photonen im Wellenbild

Wir haben dieses Kapitel mit der Frage begonnen, ob Licht eine Welle oder ein Teilchen ist. Dieser Frage wollen wir uns zum Ende dieses Kapitels noch einmal zuwenden. Wie oben festgestellt, hat Licht sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter. Somit hängt es von der speziellen Situation ab, ob eine Beschreibung im Photonenbild oder im Wellenbild geeigneter ist. Hier wollen wir kurz darauf eingehen, wie man ein Teilchen im Wellenbild mathematisch beschreibt. Im Grunde ist dies auch der Inhalt der Quantenmechanik. Somit verwendet man in der Optik und der „Wellenmechanik“ zum Teil die gleiche Mathematik.

Eine wesentliche Aussage der Quantenmechanik ist, daß eine Wellenfunktion eine Wahrscheinlichkeit für den Aufenthalt eines Teilchens beschreibt. Sei also $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ein räumliches Wellenfeld. Die Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ für ein Photon, sich zum Zeitpunkt t im Volumenelement $d^3r = dx dy dz$ zu befinden ist gegeben durch:

$$P(\mathbf{r}; t) d^3r = \frac{|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r}{\int |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r} \quad (1.47)$$

Die Integration erstreckt sich hier von $-\infty$ bis $+\infty$ in den jeweiligen Koordinaten. $P(\mathbf{r})$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, die auf den Wert 1 normiert ist:

$$\int P(\mathbf{r}; t) d^3r = 1 \quad (1.48)$$

Diese Normierung bedeutet physikalisch, daß das Teilchen sich in dem Gesamtvolumen irgendwo aufhalten muß, obwohl wir seine genaue Position nicht kennen. Der wahrscheinlichste Aufenthaltsort zum Zeitpunkt t ist

$$\langle \mathbf{r} \rangle_t = \int \mathbf{r} P(\mathbf{r}; t) d^3r \quad (1.49)$$

Die Ungenauigkeit oder Varianz dieser Angabe ist gegeben durch

$$\langle \Delta \mathbf{r}^2 \rangle_t = \int (\mathbf{r} - \langle \mathbf{r} \rangle_t)^2 P(\mathbf{r}; t) d^3r \quad (1.50)$$

1.4.1 Unendlich ausgedehnte ebene Welle

Für eine unendliche ausgedehnte ebene Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, ist $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{ik(z-ct)}$ und somit $|\mathbf{E}|^2 = 1$. Die Wahrscheinlichkeit ist über alle Orte \mathbf{r} gleichmäßig verteilt. In diesem Falle können wir nichts über den Aufenthaltsort des Photons sagen. Umgekehrt aber können wir mit \mathbf{k} seine Richtung genau angeben. Dies ist übrigens eine Konsequenz der Unschärferelation, die aussagt, daß man entweder nur den Ort oder die Richtung einer Welle beliebig genau angeben kann. Die Unschärferelation gilt allgemein für Materie- und elektromagnetische Wellen.

1.4.2 Gauß'sches Wellenpaket

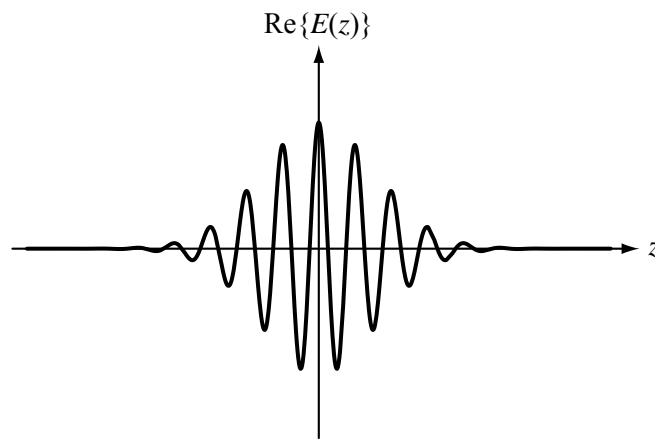


Abbildung 1.8: Gauß'sches Wellenpaket.

Wir betrachten nun als Beispiel eine eindimensionale Welle der mathematischen Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} e^{ik(z-ct)} \quad (1.51)$$

Das Wellenfeld ist in Abbildung 1.8 dargestellt. Die einhüllende Amplitude dieses „Wellenpakets“ wird bestimmt durch die Gauß-Funktion $\exp[-z^2/2b^2]$. $2b$ ist die Breite des Pakets an den Wendepunkten der Gaußfunktion. Wir berechnen zunächst den wahrscheinlichsten Aufenthaltsort des Photons. Mit $|\mathbf{E}(z, t)|^2 = \exp[-(z-ct)^2/b^2]$ berechnet man

$$\int |\mathbf{E}(z, t)|^2 dz = \int e^{-\left(\frac{z'}{b}\right)^2} dz' = \sqrt{\pi} b \quad (1.52)$$

wobei die Variablentransformation $z' = z - ct$ verwendet wurde. Die Berechnung von $\langle z \rangle_t$ erfolgt gemäß Gl. (1.49) :

$$\langle z \rangle_t = \frac{\int z e^{-\left(\frac{z-ct}{b}\right)^2} dz}{\int e^{-\left(\frac{z-ct}{b}\right)^2} dz} \quad (1.53)$$

Der Ausdruck im Nenner ergibt wie in Gl. (1.52) den Wert $\sqrt{\pi} b$. Mit der gleichen Variablentransformation wie oben ($z' = z - ct$) berechnet sich der Zähler zu $ct\sqrt{\pi}b$. Somit ergibt sich also $\langle z \rangle_t = ct$, das heißt, der wahrscheinlichste Aufenthaltsort bewegt sich mit der Welle in z -Richtung. Nun wollen wir berechnen, wie groß die „Unschärfe“ der Positionsangabe ist.

$$\langle \Delta z \rangle_t^2 = \frac{\int (z - ct)^2 |\mathbf{E}(z, t)|^2 dz}{\int |\mathbf{E}(z, t)|^2 dz} \quad (1.54)$$

Das Integral im Nenner haben wir bereits oben berechnet. Mit

$$\int z'^2 e^{-\left(\frac{z'}{b}\right)^2} dz' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} b^3 \quad (1.55)$$

erhalten wir das Ergebnis, daß $\langle \Delta z^2 \rangle = \frac{b^2}{2}$ ist, also zeitunabhängig.

1.4.3 Photon als Gauß'sches Wellenpaket

Im Teilchenbild entspricht eine Lichtwelle einem Photon (bzw. einem Strom von Photonen). Es ist üblich, Gleichung (1.51) als wellenoptische Beschreibung eines Photons zu verwenden, welches sich mit Lichtgeschwindigkeit in z -Richtung bewegt. Neben $\langle \mathbf{r} \rangle$ als den wahrscheinlichen Aufenthaltsort und $\langle \Delta \mathbf{r} \rangle$ als die Ungenauigkeit der Position können wir einem Photon weitere Merkmale eines Teilchens zuweisen. Einer davon ist sein Impuls \mathbf{p} , der mit dem Wellenvektor \mathbf{k} verknüpft ist

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (1.56)$$

mit $\hbar = h/2\pi$. Den Betrag von \mathbf{p} kann man wegen $k = 2\pi/\lambda$ auch schreiben als

$$p = h/\lambda \quad (1.57)$$

Die Energie eines Photons, welches durch eine Welle der Zeitfrequenz ν beschrieben wird, ist

$$\mathcal{E} = h\nu \quad (1.58)$$

Die Energie der Welle ist quantisiert in Einheiten von $h\nu$, d. h. man kann ihr Energie nur in diesen Einheiten hinzufügen oder wegnehmen.

Ebenso wie für den Ort kann man für den Impuls eines Photons einen mittleren Wert $\langle \mathbf{p} \rangle$ und eine Varianz $\langle \Delta \mathbf{p} \rangle$ bestimmen. Für das Produkt $\langle \Delta \mathbf{r} \rangle \langle \Delta \mathbf{p} \rangle$ gilt, daß es nie kleiner als ein bestimmter Wert werden kann. Es gilt die sogenannte Heisenberg'sche Unschärferelation, die für den eindimensionalen Fall lautet:

$$\langle \Delta z \rangle \langle \Delta p_z \rangle \geq \hbar \quad (1.59)$$

Die Aussage der Unschärferelation ist, daß wir jeweils nur die Position oder den Impuls (d. h. die Richtung) eines Photons präzise angeben können. Gauß'sche Wellenpakete entsprechen Teilchen minimaler Unschärfe. In diesem Fall gilt in Gleichung (1.59) das Gleichheitszeichen.

1.5 Was ist ein Lichtstrahl?

Das einfachste Modell zur Beschreibung von Licht und der Lichtausbreitung ist das der geometrischen Optik. Dieses Modell ist ausreichend, um einfache Phänomene wie die Lichtbrechung und die optische Abbildung zu erklären. Der geometrischen Optik liegt das Konzept des „Lichtstrahls“ zu Grunde, welcher sich in einem homogenen Medium geradlinig ausbreitet. Das Strahlenmodell wird für das Design und die Simulation optischer Systeme vielfach verwendet. Das sogenannte „ray tracing“ (d. h. das Verfolgen von Bündeln von Lichtstrahlen durch ein optisches System) ist eines der gebräuchlichsten Werkzeuge für das Design von optischen Systemen oder Komponenten.

Die theoretische Grundlage für das Strahlenmodell bildet der Satz von Fermat. Dieser besagt, daß sich Licht zwischen zwei Punkten A und B so ausbreitet, daß die dafür erforderliche Zeit extremal (i. a. minimal) wird (Abbildung 1.9). Das Fermat'sche Prinzip stellt also eine Anwendung des allgemeineren Variationsprinzips auf die Optik dar. Mathematisch ausgedrückt lautet es wie folgt:

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0 \quad (1.60)$$

Hier ist ds eine differentielle Strecke entlang der Trajektorie zwischen den Punkten A und B (Abbildung 1.9).

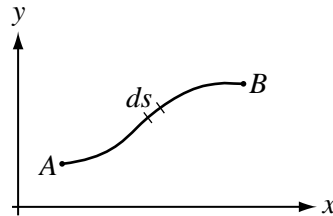


Abbildung 1.9: Zur Erläuterung des Fermat'schen Prinzips.

Wie läßt sich ein Lichtstrahl innerhalb des Wellenkonzepts darstellen? Eine Möglichkeit ist die „parageometrische Optik“. Zusammenfassend kann man diesen Ansatz so beschreiben: eine Lichtwelle, welche auf eine relativ weite Öffnung der Breite Δx fällt, breitet sich weiter innerhalb eines Konus aus mit dem Öffnungswinkel $2\lambda/\Delta x$. Außerhalb dieses Bereichs ist die Lichtamplitude nahezu Null („Schattenbereich“). In einer solchen Situation breiten sich Wellen wie Strahlen aus. Im Bild der parageometrischen Optik wird allerdings die Phase des Lichtes verwendet im Gegensatz zur klassischen geometrischen Optik.

In der geometrischen Optik wird von geradliniger Lichtausbreitung ausgegangen und man eliminiert den Einfluß der Beugung, indem man von großen Blendendurchmessern im Vergleich zur Lichtwellenlänge ausgeht. Beugung tritt allerdings natürlich immer auf, wenn der Lichtweg „gestört“ wird. Um Beugungserscheinungen ignorieren zu können, wird die geometrische Optik häufig auch als Grenzfall für $\lambda \rightarrow 0$ dargestellt, da Beugungseffekte ja proportional zu λ sind. Dies stellt m. E. eine unnötige Einschränkung dar, zumindest dann, wenn man einen Lichtstrahl mit den Wellenvektoren gleichsetzt. Mit dem Formalismus der \mathbf{k} -Vektoren läßt sich die Lichtausbreitung durch beliebige Elemente (auch Beugungsgitter) gut nachvollziehen.

Hierzu betrachten wir zunächst erneut die idealisierten Wellenformen: ebene Welle und Kugelwelle bzw. Zylinderwelle. Die Phasenfronten für diese Wellentypen sind noch einmal in Abbildung 1.10 dargestellt. Sie werden mathematisch durch die Funktion $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ beschrieben. Wir konstruieren uns die \mathbf{k} -Vektoren, indem wir uns an jeder Position im Raum einen Vektor bilden, der an dieser Stelle senkrecht auf der Fläche $\varphi = \text{const.}$ steht. Mit diesem Verfahren erhalten wir eine ganze Schar von Vektoren, außer im Fall der ebenen Welle, die durch einen einzigen \mathbf{k} -Vektor gekennzeichnet ist. Mathematisch wird der Vorgang, den wir eben beschrieben haben, durch Gradientenbildung beschrieben:

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (1.61)$$

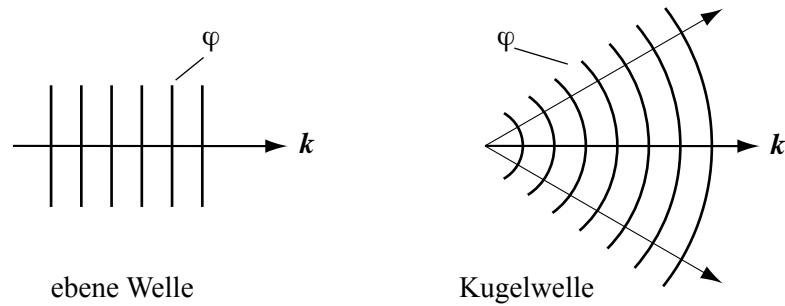


Abbildung 1.10: Deutung von Lichtstrahlen als \mathbf{k} -Vektoren. Die \mathbf{k} -Vektoren stehen senkrecht auf den Wellenfronten.

Ein Lichtstrahl, beschrieben durch den Vektor \mathbf{k} , der von einem Punkt \mathbf{r}_1 ausgeht, folgt also einer Geraden, die durch folgende Gleichung definiert ist (Abb. 1.11):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + L \mathbf{k}^{-1} \mathbf{k} \quad (1.62)$$

Hierbei hat der Parameter L die Dimension einer Länge. $\mathbf{k}^{-1} \mathbf{k} = (2\pi/\lambda) \mathbf{k}$ ist ein dimensionsloser Einheitsvektor. Der Betrag von L kann von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren (Abb. 1.11).

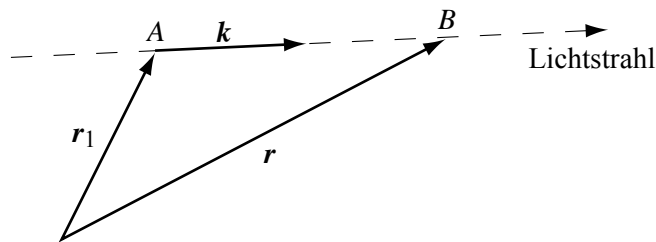


Abbildung 1.11: Vektorielle Beschreibung eines Lichtstrahls.

Bei Reflexion eines Lichtstrahls an einer spiegelnden Fläche verändert sich seine Richtung. Wenn wir annehmen, daß sich der Spiegel in der (x, y) -Ebene ($z = 0$) befindet, dann ändert sich die z -Komponente des \mathbf{k} -Vektors von k_z in $k_z' = -k_z$.

Den Fall der Beugung eines Lichtstrahles behandeln wir in Kapitel 3. Hier sei abschließend noch erwähnt, daß man aus Gleichung (1.61) für eine gegebene Verteilung von Vektoren $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ auch φ berechnen kann.

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^x k_x(\xi, y_0, z_0) d\xi + \int_{y_0}^y k_y(x, \eta, z_0) d\eta + \int_{z_0}^z k_z(x, y, \zeta) d\zeta \quad (1.63)$$

Zusammenfassend kann man zu diesem Abschnitt festhalten, daß sich Lichtstrahlen mathematisch durch die \mathbf{k} -Vektoren beschreiben lassen. Ein einziger \mathbf{k} -Vektor entspricht einer idealen ebenen Welle. Eine Welle mit einer endlich ausgedehnten oder gekrümmten Phasenfront wird durch mehrere \mathbf{k} -Vektoren beschrieben. Die Entwicklung von Wellenfeldern nach ebenen Wellen wird im nächsten Kapitel beschrieben.

1.6 Wie beobachtet man Licht?

Gleichgültig, ob es sich um das menschliche Auge handelt oder um eine Photodiode aus Silizium, es wird jeweils nicht die Amplitude $u(\mathbf{r}, t)$ der Lichtwelle beobachtet, sondern die zeitgemittelte Lichtintensität. Der Term „Intensität“ ist nicht ganz präzise definiert, hat sich aber im allgemeinen Sprachgebrauch eingebürgert und soll auch hier verwendet werden. Gemeint ist die elektromagnetische Energie, die eine Lichtwelle enthält. Aus der Elektrodynamik ist der Poynting-Vektor bekannt, der definiert ist als:

$$\mathbf{S} = \mu^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.64)$$

Wie wir in Abschnitt 1.3 gelernt haben, steht für jede elektromagnetische Welle \mathbf{E} senkrecht auf \mathbf{B} . $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ist wiederum senkrecht zu \mathbf{E} und zu \mathbf{B} und weist in Ausbreitungsrichtung (Abb. 1.12). Ein weiteres Ergebnis aus der Elektrodynamik besagt, daß die elektrische bzw. die magnetische Energiedichte jeweils gegeben sind als:

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad \text{und} \quad w_m = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (1.65)$$

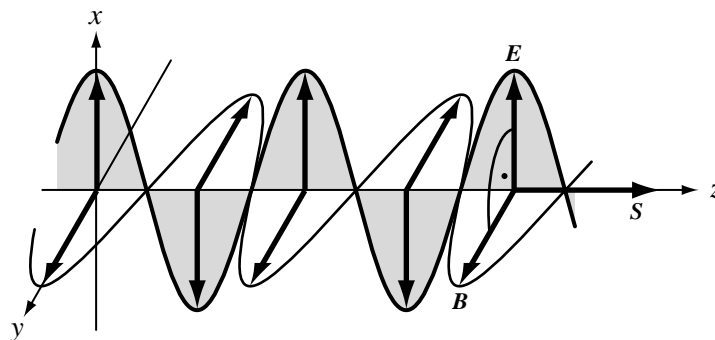


Abbildung 1.12: Poynting-Vektor einer ebenen Welle. Gezeigt ist eine Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet mit ihrem E -Feld (schattiert) und B -Feld.

Damit kann man für den Poynting-Vektor schreiben:

$$\mathbf{S} = c(w_e + w_m) k^{-1} \mathbf{k} \quad (1.66)$$

Dieser Ausdruck bedeutet, daß sich bei einer ebenen Welle die Energiedichte $w_{em} = w_e + w_m$ mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung des \mathbf{k} -Vektors ausbreitet. Mit $\varepsilon\mu = (1/c^2)$ und wegen der Beziehung $E = cB$ für eine ebene Welle (die sich auf andere Wellenformen verallgemeinern läßt), erhält man somit folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{S} = \varepsilon E^2 c k^{-1} \mathbf{k} \quad (1.67)$$

Entscheidend ist hier, was wir bereits eingangs festgestellt haben. Jeder Detektor für optische Strahlung ist nur empfindlich für die (zeitgemittelte) Energie, welche auf ihn fällt. Der Photostrom i_F einer Photodiode ist somit proportional zu

$$i_F \propto \int_0^\tau S(t) dt \quad (1.68)$$

Die Integrationskonstante τ wird durch die „Trägheit“ oder das zeitliche Auflösungsvermögen des Detektors bestimmt. Für das menschliche Auge ist beispielsweise $\tau = 0,1$ s. Sofern man nicht an Absolutmessungen interessiert ist, kann man auf die Proportionalitätsfaktoren verzichten. I. a. wird daher die Lichtintensität I mit dem Ausdruck $|E|^2$ gleichgesetzt bzw. dem Zeitmittel von $|E|^2$:

$$I = \langle |E|^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |E(t)|^2 dt \quad (1.69)$$