

Deterministische und stochastische Rundungsfehler-Analysen von schnellen DCT-Algorithmen in Festkomma-Arithmetik

KATJA IHSBERNER¹

Institut für Mathematik, Universität Rostock, D-18051 Rostock

Diskrete Kosinustransformationen (DCT) [6] – als reellwertige Varianten der diskreten Fouriertransformation – finden sowohl innerhalb der numerischen Analysis als auch in der digitalen Signal- und Bildverarbeitung ein breites Anwendungsfeld. Beispielsweise ist die DCT vom Typ II (vgl. [6]) in den JPEG-Standard [1] zur Datenkompression von digitalen Bildern integriert. Ein weiteres Beispiel liefert die DCT vom Typ IV (vgl. [6]), welche üblicherweise in sog. Filter-Banks [7] zur Grundausstattung gehört.

Digitale Signalprozessoren (DSP) sowie VLSI-Chips verwenden vorwiegend Festkomma-anstelle von Gleitkomma-Arithmetik. Systematische Stabilitätsuntersuchungen von häufig verwendeten Algorithmen lassen sich oft nur für Gleitkomma-Arithmetik finden. Im Mittelpunkt unserer Untersuchungen steht die numerische Stabilität von schnellen DCT-Algorithmen in Festkomma-Arithmetik. Dabei beruhen die uns interessierenden schnellen DCT-Algorithmen auf bekannten Faktorisierungen [5] der entsprechenden Kosinusmatrizen in Produkte von dünnbesetzten, orthogonalen Matrizen einfacher Struktur. Diese Algorithmen sind vollständig rekursiv und vergleichsweise einfach zu implementieren. Desweiteren verwenden sie lediglich Permutationen, Vorzeichen-Skalierungen sowie ebene Drehungen um einen Winkel $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4}]$. Im Spezialfall $\varphi = \frac{\pi}{4}$ lassen sich die ebenen Drehungen mit Hilfe skaliert Butterfly-Operationen realisieren. Im Vergleich mit anderen schnellen DCT-Algorithmen besitzen diese Algorithmen geringe arithmetische Kosten [5]. Unter Verwendung des von-Neumann-Goldstine-Modells für die Festkomma-Arithmetik [4] wird in [3] eine detaillierte Rundungsfehler-Analyse für den in [5] angegebenen DCT-II-Algorithmus in Festkomma-Arithmetik durchgeführt.

Mit Hilfe numerischer Testrechnungen, welche in MATLAB durchgeführt worden sind, belegen wir die Plausibilität der ermittelten Schranken für den Rundungsfehler. Da sich der tatsächliche Rundungsfehler im Mittel weit unterhalb dieser Schranke befindet, interessiert hier ebenso eine stochastische Rundungsfehler-Analyse. Diese führen wir unter Verwendung der in der Praxis häufiger vorkommenden Zweikomplement-Darstellung durch. Obwohl hierbei stark vereinfachte Annahmen über die Rundungsfehler verwendet werden, lassen sich recht genaue Vorhersagen treffen, wie durch exemplarische Testrechnungen auf einem DSP bestätigt worden sind [2].

Literatur

- [1] R. Ansari & N. Memon. *The JPEG lossy image compression standard*. Handbook of Image and Video Processing, Academic Press, New York, 2000, 513 – 526.
- [2] A. Fiebach. *Stochastische Rundungsfehleranalyse bei DCT-Algorithmen*. Universität Rostock, Diplomarbeit (2007).
- [3] K. Ihsberner. *Roundoff error analysis of fast DCT algorithms in fixed point arithmetic*. Numer. Algorithms **46** (2007), 1 – 22.
- [4] J. von Neumann & H.H. Goldstine. *Numerical inverting of matrices of high order*. Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 1021 – 1099.
- [5] G. Plonka & M. Tasche. *Fast and numerically stable algorithms for discrete cosine transforms*. Linear Algebra Appl. **394** (2005), 309 – 345.
- [6] K. R. Rao and P. Yip, *Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications*, Academic Press, Boston, 1990.
- [7] P.P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and Filterbanks*. Prentice Hall, 1993.
- [8] H.M. Zeuner. *A general theory of stochastic roundoff error analysis with applications to DFT and DCT*. J. Concr. Appl. Math. **3** (2005), 283 – 311.

¹e-mail: katja.ihsberner@uni-rostock.de