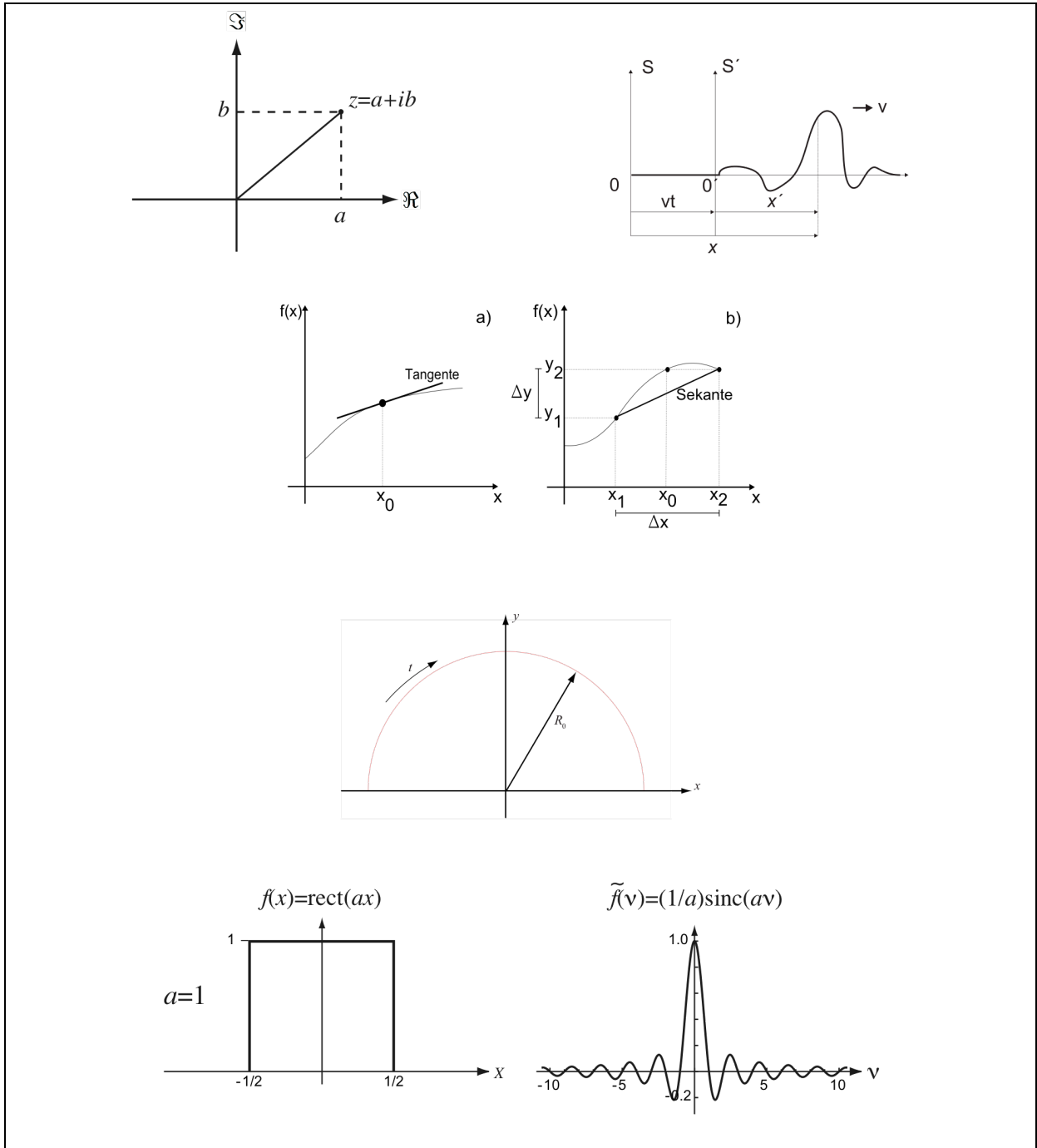


**Mathematischer Vorkurs
für die Vertiefungsrichtung Photonik im Masterstudiengang
Elektro- und Informationstechnik**



Dieser Vorkurs dient dazu, die mathematischen Grundkenntnisse in denjenigen Bereichen der Mathematik aufzufrischen, welche im Rahmen der Kurse der Vertiefungsrichtung Photonik benötigt werden. Dies sind die Themen Komplexe Zahlen, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Vektoren, Matrizen und Fourier-Mathematik. Diese Themen sind absichtlich nicht in aller Vollständigkeit dargestellt, sondern ergeben quasi ein "Grundwissen", welches zum Verständnis der Fachkurse benötigt wird. Auf absolute Konsistenz wurde hier kein Wert gelegt. Die Übungsaufgaben sind teilweise mit Lösungen versehen, teilweise absichtlich nicht.

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen (J. Jahns)	5
1.1 Definition	5
1.2 Algebraische Darstellung in kartesischen Koordinaten	6
1.3 Trigonometrische Darstellung in Kreiskoordinaten	8
1.4 Exponentialdarstellung einer komplexen Zahl	10
1.5 Konjugiert komplexe Zahlen	12
1.6 Algebraische Operationen mit komplexen Zahlen	14
1.6.1 Addition und Subtraktion	14
1.6.2 Multiplikation	16
1.6.3 Division	18
1.6.4 Potenzieren	20
1.6.5 Radizieren	22
1.7 Differenzieren von komplexwertigen Funktionen	24
2 Infinitesimalrechnung (A. Edelmann)	27
2.1 Einführung	27
2.2 Differentialrechnung	27
2.2.1 Problemstellung	27
2.3 Integralrechnung	29
2.3.1 Problemstellung	29
3 Differentialgleichungen (M. Bohling)	33
3.1 Allgemeine Definitionen	33
3.1.1 Ordnung und Grad einer DGL	33
3.1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen	34
3.1.3 Aufstellen von GDGL	35
3.2 Bestimmung der Lösungsfunktionen zu den GDGLn aus den Beispielen	38
3.3 Partielle Differentialgleichungen	43
4 Vektoren (S. Helfert)	45
4.1 Einleitung	45
4.2 Komponenten eines Vektors	46
4.3 Inneres Produkt, Skalarprodukt	48
4.4 Äußeres Produkt, Vektorprodukt, Kreuzprodukt	49
4.5 Spatprodukt	49
4.6 Doppeltes Kreuzprodukt	50
4.7 Beschreibung von Kurven und Flächen mit Ortsvektoren	51
4.8 Vektoranalysis	53
4.8.1 Gradient	53
4.9 Divergenz	53

Inhaltsverzeichnis

4.10	Rotation	54
4.11	Nabla-Operator (∇)	55
4.12	Rechnen mit dem Nabla-Operator	55
4.13	Formeln zur Vektoranalysis	56
4.14	Integralsätze der Vektoranalysis	62
5	Matrizen (C.A. Jones)	67
5.1	Einführung	67
5.2	Matrixmultiplikation	67
5.3	Transposition	68
5.4	Lösen von Gleichungssystemen	68
5.4.1	Determinante	68
5.5	Eigenwerte und Eigenvektoren	69
5.6	Übungsaufgaben	69
5.6.1	Matrixmultiplikation	69
5.6.2	Transposition	70
5.6.3	Gleichungssystem lösen	70
5.6.4	Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen	70
5.7	Lösungen	70
5.7.1	Matrixmultiplikation	70
5.7.2	Transposition	70
5.7.3	Gleichungssystem lösen	71
5.7.4	Eigenwerte und Eigenvektoren	71
6	Fourier-Transformation (J. Jahns)	73
6.1	Definition	73
6.2	Alternative Definition	75
6.3	Beispiel 1: Transformation der rect-Funktion	76
6.4	Transformation bezüglich Raum- und Zeitkoordinate	78
6.5	Mehrdimensionale Fourier-Transformation	79
6.6	Beispiel 2: Beugung an zweidimensionaler Rechteckblende	80
6.7	Fourier-Transformation in Polarkoordinaten	81
	Literaturverzeichnis	83

1 Komplexe Zahlen (J. Jahns)

1.1 Definition

Bei der mathematischen Beschreibung von Wellen und Wellenfeldern ist die Verwendung von komplexen Exponentialausdrücken üblich. Zum Beispiel läßt sich eine ebene Welle, die sich in x -Richtung ausbreitet, durch den folgenden Ausdruck beschreiben:

$$u(x, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.1)$$

Hierbei ist i die *imaginäre Einheit*^{1 2}, definiert durch

$$i^2 = -1 \quad (1.2)$$

Auf die sog. exponentielle Darstellung wie in (1.1) werden wir etwas später eingehen. Wir beginnen mit der Darstellung von komplexen Zahlen, welche auf Leonhard Euler zurückgeht. Danach wird eine komplexe Zahl z durch zwei reelle Zahlen a und b ausgedrückt:

$$z = a + ib \quad (1.3)$$

wobei a und b reelle Zahlen sind. Läßt man in (1.3) a und b alle möglichen Werte für reelle Zahlen durchlaufen, dann erhält man alle möglichen komplexen Zahlen z . Man nennt a den *Realteil* und b den *Imaginärteil* von z :

$$a = \Re(z) \quad \text{und} \quad b = \Im(z) \quad (1.4)$$

Die komplexen Zahlen enthalten also die reellen Zahlen als Teilmenge: das sind die Zahlen für welche der Imaginärteil gleich Null ist. Eine andere Teilmenge sind die "rein imaginären" Zahlen, für welche der Realteil gleich Null ist.

¹i ODER j?

Statt des Buchstaben i wird häufig auch der Buchstabe j zur Bezeichnung der imaginären Einheit verwendet. Dies ist insbesondere in der Elektrotechnik der Fall, wo man durch die Verwendung des Buchstaben j Verwechslungen mit der Stromstärke vermeiden möchte.

²NOTATION:

Statt der Darstellung wie in (1.1) wird dort verwendet $u(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$. Dabei ergibt sich ein Unterschied im Vorzeichen, wenn erste (allgemeiner: ungerade) Ableitungen vorkommen. Dies ist z.B. der Fall bei der paraxialen Wellengleichung.

1.2 Algebraische Darstellung in kartesischen Koordinaten

Eine komplexe Zahl nach (1.3) kann graphisch durch ihre Position in einer Ebene dargestellt werden, indem man ihr die kartesischen Koordinaten (a, b) zuordnet, siehe Abb. 1.1. Man nennt die Ebene, deren Punkte komplexe Zahlen darstellen, die *komplexe Zahlenebene* oder auch die *Gauß'sche Zahlenebene*. Die Abszisse ist die *reelle Achse*, die Ordinate die *imaginäre Achse*.

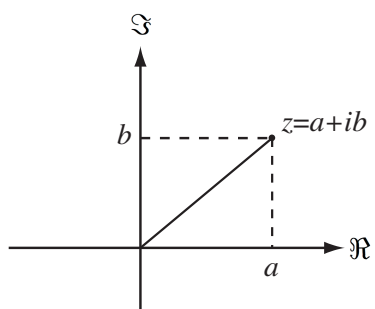


Abbildung 1.1: Algebraische Darstellung einer Zahl in der komplexen Ebene.

1.2 Algebraische Darstellung in kartesischen Koordinaten

BEISPIEL 1:

Wir konstruieren uns einige komplexe Zahlen, indem wir unterschiedliche reelle Zahlen für a und b einsetzen, und stellen sie in der komplexen Zahlenebene dar. Als einfaches Beispiel wählen wir:

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad b_1 = 1 &\Rightarrow z_1 = 1 + i \\ a_2 = -1, \quad b_2 = 1 &\Rightarrow z_2 = -1 + i \\ a_3 = -1, \quad b_3 = -1 &\Rightarrow z_3 = -1 - i \\ a_4 = 1, \quad b_4 = -1 &\Rightarrow z_4 = 1 - i \end{aligned} \tag{1.5}$$

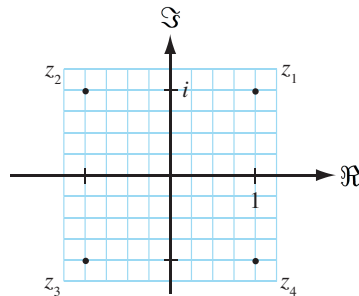


Abbildung 1.2: Graphische Darstellung zu Beispiel 1.

AUFGABE 1:

Tragen Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Zahlenebene ein: $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 3i$ und $z_3 = -3 - i$.

1.3 Trigonometrische Darstellung in Kreiskoordinaten

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit ergibt sich durch die Verwendung von ebenen Polarkoordinaten (Kreiskoordinaten). Bezeichnen wir die Kreiskoordinaten mit r für den Radius und ϕ für den Winkel (Fig. 1.3), dann können wir den bekannten Zusammenhang zwischen Kreiskoordinaten und kartesischen Koordinaten verwenden gemäß:

$$r = |z| = (a^2 + b^2)^{1/2} \quad (1.6)$$

und

$$\phi = \arg(z) = \arctan \frac{b}{a} \quad (1.7)$$

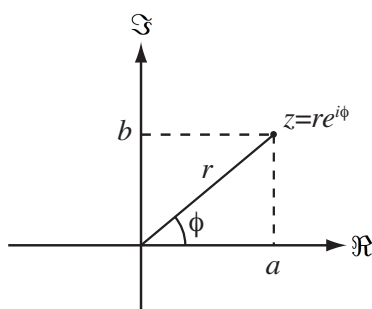


Abbildung 1.3: Trigonometrische Darstellung.

Umgekehrt kann man aus den Kreiskoordinaten die kartesischen Koordinaten a und b berechnen:

$$a = r \cos \phi \quad \text{und} \quad b = r \sin \phi \quad (1.8)$$

Damit können wir die komplexe Zahl z durch ihren *Betrag* $r = |z|$ und ihr *Argument* ϕ (auch *Phase* genannt) in ihrer “trigonometrischen” Form darstellen:

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.9)$$

1.3 Trigonometrische Darstellung in Kreiskoordinaten

BEISPIEL 2:

Wir benutzen die Zahlenwerte von Beispiel 1 und berechnen jeweils r und ϕ :

$$\begin{aligned}
 r_1 = \sqrt{2} & \quad \text{und} \quad \phi_1 = \arctan(1/1) & = & \frac{\pi}{4} \\
 r_2 = \sqrt{2} & \quad \text{und} \quad \phi_2 = \arctan(-1/1) & = & 3\frac{\pi}{4} \\
 r_3 = \sqrt{2} & \quad \text{und} \quad \phi_3 = \arctan(-1/-1) & = & 5\frac{\pi}{4} \\
 r_4 = \sqrt{2} & \quad \text{und} \quad \phi_4 = \arctan(1/-1) & = & 7\frac{\pi}{4}
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

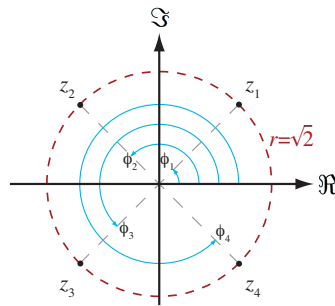


Abbildung 1.4: Graphische Darstellung zu Beispiel 2.

Die vier Punkte sind graphisch in Abb. 1.4 dargestellt. Hierbei tritt offenbar eine Schwierigkeit auf, da z_1 und z_3 einerseits sowie z_2 und z_4 andererseits jeweils dieselben Werte für den Quotienten b/a aufweisen. Zur Unterscheidung verwendet man die Definition für den Bereich $[0, 2\pi[$:

$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{für } x > 0, y > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{für } x < 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + 2\pi & \text{für } x > 0, y < 0 \end{cases}
 \tag{1.11}$$

AUFGABE 2:

Stellen Sie den folgenden mathematischen Ausdruck graphisch dar.

$$u(x, t) = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)
 \tag{1.12}$$

1.4 Exponentialdarstellung einer komplexen Zahl

Wir kommen nun zur Exponentialdarstellung für komplexe Zahlen. Dies erfolgt über die *Euler'sche Formel*³:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad (1.13)$$

Damit kann man eine komplexe Zahl in Exponentialdarstellung (auch: Polardarstellung) angeben:

$$z = r e^{i\phi} \quad (1.14)$$

Diese Form der Darstellung ist für die mathematische Beschreibung von Wellen und Wellenfeldern ausgesprochen günstig, weil sie eine kompakte und elegante Beschreibung ermöglicht. Dabei sind eine Reihe von Umformungen bzw. Rechenregeln nützlich, von denen einige weiter unten aufgeführt werden.

Es sei hier noch einmal auf die Mehrdeutigkeit des Arguments hingewiesen. Bei Verwendung der trigonometrischen bzw. der Exponentialdarstellung muss man sich darüber im Klaren sein, dass zu jedem Zahlenpaar a und b , also einem Punkt in der komplexen Ebene, ϕ nicht eindeutig festgelegt ist. Vielmehr beschreiben alle Zahlenpaare $(r, \phi + m2\pi)$ mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ denselben Punkt. Die Unbestimmtheit der Phase modulo 2π ist ein wichtiger Aspekt aller Wellenphänomene. In der Optik spielt dies insbesondere bei interferometrischen Anordnungen eine Rolle.

³BEMERKUNG:

(1.13) kann als Definition aufgefaßt werden, wie zum Teil auch in Mathematikbüchern der Fall. Die Gleichung kann aber auch über die Reihenentwicklungen für die Exponentialfunktion einerseits sowie für Sinus- und Kosinusfunktion andererseits hergeleitet werden, was hier jedoch nicht vorgeführt wird.

BEISPIEL 3:

In der Optik wird typischerweise die Zeitabhängigkeit einer Welle über den Term $\exp(-i\omega t)$ beschrieben. Dabei ist ω die sog. Kreisfrequenz. Wir betrachten die geometrischen Darstellungen für die beiden folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{-i\omega t}, & 0 \leq t \leq 2\pi/\omega \\ z_2 &= (vt)e^{-i\omega t}, & 0 \leq t \leq 2\pi/\omega \end{aligned} \quad (1.15)$$

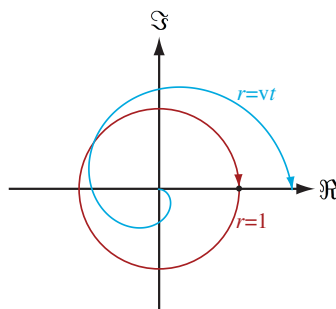


Abbildung 1.5: Graphische Darstellung zu Beispiel x.

Im ersten Fall beschreibt $z(t)$ einen Kreis mit Radius $r = 1$. Die Phase hat zum Zeitpunkt den Wert $\phi = 0$. Mit der Zeit wächst die Phase dem Betrag nach an, und erreicht zum Zeitpunkt $t = 2\pi/\omega$ den Wert $\phi = -2\pi$. In der graphischen Darstellung läuft ein virtueller Punkt genau einmal auf dem Einheitskreis um. Im zweiten Fall ergibt sich durch die zeitliche Abhängigkeit des Radius als Bahnverlauf eine Spirale mit derselben Kreisfrequenz, mit dem Startpunkt im Ursprung und dem Endposition $z_2 = 2\pi(v/\omega)$.

AUFGABE 3:

Der Ausdruck

$$u(x, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.16)$$

beschreibt eine ebene Welle, die sich in x -Richtung ausbreitet. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Welle ausbreitet, indem Sie in Abhängigkeit von der Zeit t den Ort berechnen, für den die Phase konstant bleibt (sog. *Phasengeschwindigkeit*).

1.5 Konjugiert komplexe Zahlen

Als nächstes führen wir den Begriff der *konjugiert komplexen* Zahlen ein. Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 heißen konjugiert, wenn ihr Realteil gleich ist, ihre Imaginärteile sich jedoch im Vorzeichen unterscheiden. Die konjugierte Zahl wird symbolisch entweder durch einen oberen Querstrich dargestellt (\bar{z}) oder durch einen Stern (z^*). Letztere Darstellung wird hier verwendet. Somit kann man schreiben:

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{und} \quad z_2 = a_1 - ib_1 = z_1^* \quad (1.17)$$

Offensichtlich haben zwei konjugiert komplexe Zahlen z und z^* denselben Betrag und liegen in der komplexen Zahlenebene spiegelsymmetrisch bezüglich der reellen Achse.

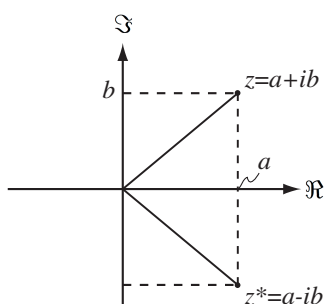


Abbildung 1.6: Graphische Darstellung zweier konjugiert komplexer Zahlen.

In trigonometrischer und exponentieller Darstellung ergibt sich für z und z^* :

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r e^{i\phi} \quad \text{und} \quad z^* = r(\cos \phi - i \sin \phi) = r e^{-i\phi} \quad (1.18)$$

Wenn für eine komplexe Zahl gilt, dass:

$$z = z^* \quad (1.19)$$

dann folgt daraus, dass z reell ist, denn:

$$a + ib = a - ib \quad \Rightarrow \quad b = -b \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad (1.20)$$

Frage: Was folgt aus der folgenden Beziehung?

$$z = -z^* \quad (1.21)$$

BEISPIEL 4:

In der nichtlinearen Optik gibt es das Phänomen der *Phasenkonjugation*. Darunter versteht man die Umkehr der Phase, wobei eine Welle "in sich selbst" zurückgespiegelt wird. In der mathematischen Beschreibung werden die räumlichen Anteile von einfallender Welle und phasenkonjugierter Welle durch konjugiert komplexe Terme beschrieben. Wird also die einfallende Welle wie folgt dargestellt:

$$u_{ein}(r, t) = u_0 e^{ik \cdot r} e^{-i\omega t} \quad (1.22)$$

so ist die an einem phasenkonjugierenden Spiegel reflektierte Welle gegeben als:

$$u_{pc}(r, t) = u_0 e^{-ik \cdot r} e^{-i\omega t} \quad (1.23)$$

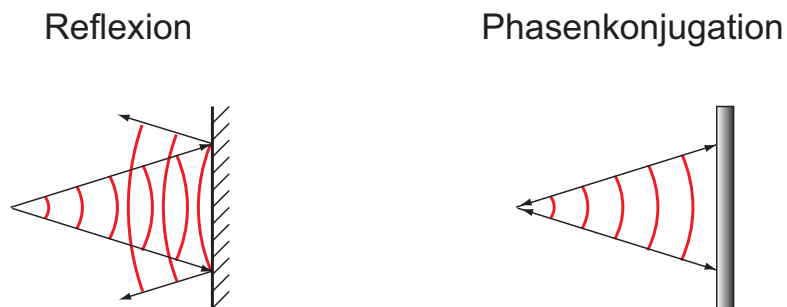


Abbildung 1.7: Links: Herkömmliche Reflexion einer Lichtwelle an einem Spiegel. Rechts: Phasenkonjugation.

AUFGABE 4:

Berechnen Sie die Ausdrücke $z_+ = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}$ sowie $z_- = e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}$ und stellen Sie sie graphisch in der komplexen Zahlenebene dar.

1.6 Algebraische Operationen mit komplexen Zahlen

Wir besprechen zunächst die vier Grundrechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) sowie anschließend das Potenzieren und das Wurzelziehen (Radizieren) mit komplexen Zahlen. Wegen der unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, die Berechnungen durchzuführen. Wie sich zeigt, ist für eine bestimmte Operationen i.a. die eine Form besser geeignet als die andere, so dass sich gegebenenfalls vor Durchführung einer Operation eine Umrechnung lohnt.

1.6.1 Addition und Subtraktion

Im Falle der Addition und Subtraktion ist die algebraische Form günstig. Für zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{und} \quad z_2 = a_2 + ib_2 \quad (1.24)$$

ergeben sich Summe und Differenz wie folgt:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (1.25)$$

und

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= a_1 + ib_1 - (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.6 Algebraische Operationen mit komplexen Zahlen

BEISPIEL 5:

Wir verwenden die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -1 + i$:

$$z_1 + z_2 = 2i \quad \text{und} \quad z_1 - z_2 = 2 \quad (1.27)$$

Die graphische Veranschaulichung von Addition bzw. Subtraktion in der komplexen Zahlenebene erfolgt, indem man jede Zahl durch einen Vektor darstellt. Durch vektorielle Addition bzw. Subtraktion (Parallelverschiebung des zweiten Vektors, so dass sein Anfangspunkt am Endpunkt des ersten ansetzt) erhält man die Summe der Vektoren bzw. die Differenz.

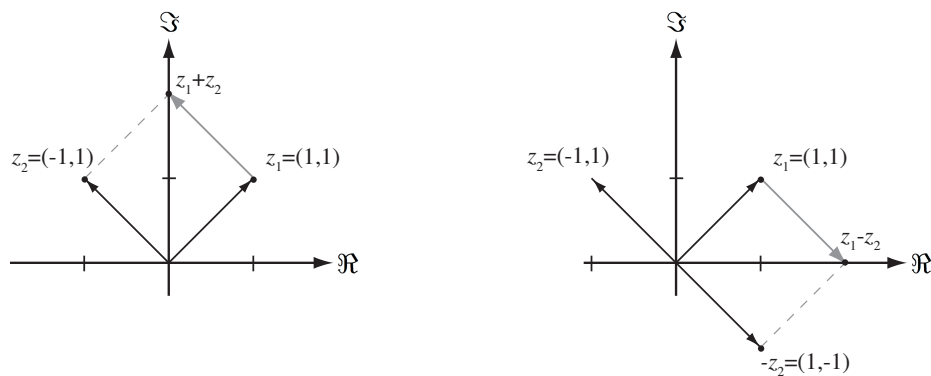


Abbildung 1.8: Graphische Darstellung der Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen.

AUFGABE 5:

Berechnen Sie mit den Zahlen von Beispiel 1 jeweils die Summe und die Differenz, also $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_2 + z_3$ usw.

1 Komplexe Zahlen (J. Jahns)

1.6.2 Multiplikation

Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen führt man am besten in der Exponentialdarstellung durch. Für zwei Zahlen

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2} \quad (1.28)$$

ergibt sich das *Produkt* wie folgt:

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\phi_1})(r_2 e^{i\phi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \quad (1.29)$$

Das heißt in Worten: bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und die Phasen addieren sich. Somit läßt sich die Multiplikation einfach in der komplexen Zahlenebene veranschaulichen.

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn die beiden Zahlen zueinander konjugiert sind, also $z_2 = z_1^*$. Das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist immer eine reelle Zahl:

$$z z^* = |z| e^{i\phi} |z| e^{-i\phi} = |z|^2 \quad (1.30)$$

Umgekehrt kann man auch schreiben:

$$|z| = \sqrt{z z^*} \quad (1.31)$$

In algebraischer Darstellung erfolgt die Berechnung eines Produkts zweier komplexer Zahlen erfolgt unter Anwendung konventioneller Regeln für die Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.6 Algebraische Operationen mit komplexen Zahlen

BEISPIEL 6:

Als Beispiel betrachten wir den Fall: $r_1 = 1$, $\phi_1 = \pi/4$ und $r_2 = 2$, $\phi_2 = \pi/2$. Als Produkt ergibt sich:

$$z = z_1 z_2 = 2 e^{i3\pi/4} \quad (1.33)$$

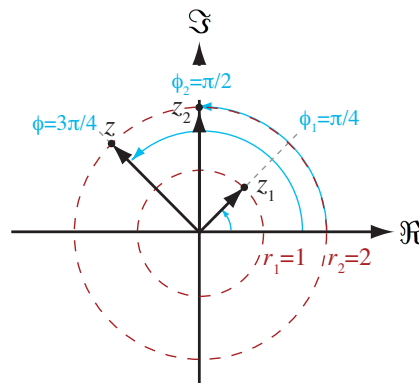


Abbildung 1.9: Graphische Darstellung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen.

AUFGABE 6:

Mit dem Ergebnis von Aufgabe 2, berechnen Sie die Produkte $z_1 z_2$, $z_1 z_3$ und $z_2 z_3$.

BEISPIEL Y:

In der Optik beobachtet man wegen der hohen Frequenzen mit einem Detektor nicht die Amplitude einer Welle, sondern deren *Intensität*. Die (zeitgemittelte) Intensität ist diejenige physikalische Größe, auf welche ein Detektor reagiert. Diese berechnet sich als das Betragsquadrat der komplexen Amplitude. Für eine Welle der Form

$$u(x, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.34)$$

ist die Intensität I :

$$I = |u(x, t)|^2 = |u_0|^2 \quad (1.35)$$

AUFGABE Y:

Berechnen Sie die Intensität I für die Überlagerung (d.h. die Summe) zweier Wellen $u_1 = A_1 e^{i\phi_1}$ und $u_2 = A_2 e^{i\phi_2}$.

1 Komplexe Zahlen (J. Jahns)

1.6.3 Division

Der *Quotient* zweier komplexer Zahlen erfolgt bei Verwendung der Exponentialdarstellung gemäß folgender Regel:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \quad (1.36)$$

In Worten: bei der Division erhält man Betrag und Argument des Quotienten, indem man die Beträge dividiert und die Phasen subtrahiert.

In algebraischer Schreibweise erfolgt die Division, indem man den Quotienten mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl erweitert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \quad (1.37)$$

Das Produkt im Nenner ergibt eine reelle Zahl:

$$(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2) = a_2^2 + b_2^2 \quad (1.38)$$

Im Zähler steht:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2) \quad (1.39)$$

Somit erhält man insgesamt als Quotient:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \quad (1.40)$$

1.6 Algebraische Operationen mit komplexen Zahlen

BEISPIEL 7:

Wir wählen als Beispiel für die Division wieder die Werte: $r_1 = 1$, $\phi_1 = \pi/4$ und $r_2 = 2$, $\phi_2 = \pi/2$. Damit erhält man:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} e^{-i\pi/4} \quad (1.41)$$

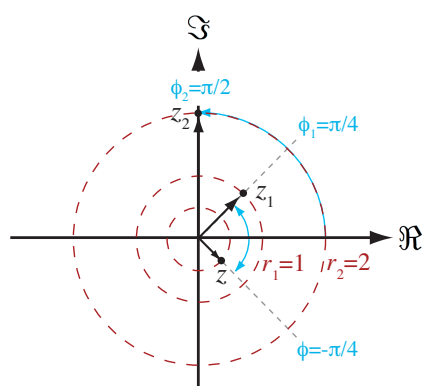


Abbildung 1.10: Graphische Darstellung der Division zweier komplexer Zahlen.

AUFGABE 7:

Mit den Ergebnissen von Aufgabe 2, berechnen Sie die Produkte z_1/z_2 , z_1/z_3 und z_2/z_3 .

1.6.4 Potenzieren

Mit den vorigen Ergebnissen über die Multiplikation komplexer Zahlen gelangt man direkt zu Regeln für das Potenzieren. Auch hierfür ist die trigonometrische und noch mehr die exponentielle Darstellung günstig. Wir beginnen mit einer einfachen Vorüberlegung, indem wir das Quadrat einer komplexen Zahl z in trigonometrischer Darstellung berechnen. Hinweis: man beachte, dass i.a. $z^2 = zz \neq zz^* = |z|^2$, dem Betragsquadrat von z ist! Für z^2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} z^2 &= [r(\cos \phi + i \sin \phi)]^2 \\ &= r^2 [\cos^2 \phi - \sin^2 \phi + 2i \cos \phi \sin \phi] \\ &= r^2 [\cos(2\phi) + i \sin(2\phi)] \end{aligned} \quad (1.42)$$

Hierbei wurde benutzt: $i^2 = -1$ sowie die trigonometrischen Identitäten

$$\cos(2\phi) = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \quad (1.43)$$

sowie

$$\sin(2\phi) = 2 \cos \phi \sin \phi \quad (1.44)$$

Durch vollständige Induktion kann man daraus die sog. *Moivre'sche Formel* für z^n herleiten:

$$z^n = r^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)] \quad (1.45)$$

In der Exponentialdarstellung ergibt sich eine noch einfachere Form für die n -te Potenz von z :

$$z^n = [re^{i\phi}]^n = r^n e^{in\phi} \quad (1.46)$$

Dies heißt in Worten: bei der Potenzierung einer komplexen Zahl wird der Betrag mit n potenziert, das Argument mit n multipliziert.

Im Bereich der Optik kommt die mathematische Operation der Potenzierung bei nichtlinearen Prozessen vor, z.B. bei der sog. Frequenzvervielfachung. Wenn eine Welle, deren zeitlicher Anteil durch $\exp(-i\omega t)$ beschrieben wird, einen nichtlinearen Prozess mit quadratischer Kennlinie durchläuft, dann ergibt sich als Ausgangsgröße ein Signal mit verdoppelter Frequenz: $\exp(-i\omega t)^2 = \exp(-i2\omega t)$.

BEISPIEL 8:

Für $z = (1 + i)/\sqrt{2} = \exp(i\pi/4)$ berechnen wir z^2 , z^3 , z^4 usw.:

$$\begin{aligned} z^2 &= [e^{i\pi/4}]^2 = e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \\ z^3 &= [e^{i\pi/4}]^3 = e^{i3\pi/4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i) \\ z^4 &= [e^{i\pi/4}]^4 = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \end{aligned} \quad (1.47)$$

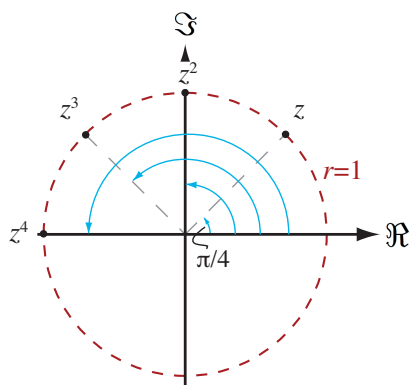


Abbildung 1.11: Graphische Darstellung zu Beispiel 6.

AUFGABE 8:

Mit den Ergebnissen von Aufgabe 2, berechnen Sie die Potenzen: z_1^2 , z_1^3 sowie z_2^2 usw..

1.6.5 Radizieren

Schließlich wenden wir uns noch dem Radizieren, also dem Wurzelziehen, bei einer komplexen Zahl zu. Unter der n -ten Wurzel der Zahl Z mit

$$Z = e^{i\Phi} \quad (1.48)$$

versteht man jede Zahl z , welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$z^n = Z \quad (1.49)$$

Wir setzen $z = re^{i\phi}$ sowie $\Phi = \Phi_0 + m2\pi$. Damit erhält man:

$$z^n = r^n e^{in\phi} = R e^{i(\Phi_0 + m2\pi)} \quad (1.50)$$

Durch Vergleich folgt hieraus:

$$\begin{aligned} r^n = R & \quad \text{oder : } r = R^{1/n} \\ n\phi = \Phi_0 + m2\pi & \quad \text{oder : } \phi = \frac{1}{n}(\Phi_0 + m2\pi) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke in die Darstellung für z ein, so erhält man:

$$z_m = R^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\Phi_0}{n} + \frac{m}{n}2\pi\right)}, \quad m = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (1.52)$$

Für $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ erhält man somit n dem Betrag nach gleiche, dem Argument nach unterschiedliche komplexe Zahlen als Wurzeln von Z . Für $m \rightarrow m+n$ ergibt sich jeweils wieder dieselbe komplexe Zahl. Darüberhinaus garantiert der *Fundamentalsatz der Algebra*, dass es keine weiteren n -ten Wurzeln von Z gibt.

1.6 Algebraische Operationen mit komplexen Zahlen

BEISPIEL 9:

Wir berechnen die vierten Wurzeln der Zahl $Z = 1$. Um in Übereinstimmung mit (1.52) zu sein, schreiben wir: $Z = e^{i(0+m2\pi)}$. Mit $R = 1$ und damit $r = 1$ ergibt sich durch direkte Anwendung der Formel:

$$\begin{aligned}
 m = 0 : z_0 &= e^{i \cdot 0} &= 1 \\
 m = 1 : z_1 &= e^{i\pi/2} &= i \\
 m = 2 : z_2 &= e^{i\pi} &= -1 \\
 m = 3 : z_3 &= e^{i3\pi/2} &= -i
 \end{aligned}
 \tag{1.53}$$

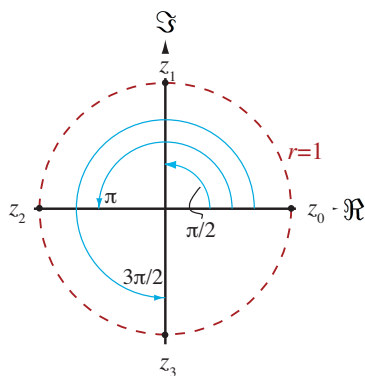


Abbildung 1.12: Beispiel 7: die vierten Wurzeln der Zahl 1

AUFGABE 9:

a) Berechnen Sie die sechsten Wurzeln von $z = 1$. b) Berechnen Sie die dritten Wurzeln von $z = e^{i\pi/4}$.

1.7 Differenzieren von komplexwertigen Funktionen

Eine komplexwertige Funktion $z(t) = a(t) + ib(t)$ heißt differenzierbar, wenn $a(t)$ und $b(t)$ differenzierbar sind. Somit können wir schreiben:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{da}{dt} + i \frac{db}{dt} \quad (1.54)$$

Wichtig für Schwingungs- und Wellenphänomene und deren mathematische Beschreibung ist die Ableitung von komplexen Exponentialausdrücken. Aus (1.54) kann man über die Zerlegung in Real- und Imaginärteil herleiten, dass:

$$\frac{de^{i\omega t}}{dt} = i\omega e^{i\omega t} \quad (1.55)$$

Mit Hilfe der Euler'schen Formel ergibt sich nämlich:

$$\frac{de^{i\omega t}}{dt} = \frac{d \cos(\omega t)}{dt} + i \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = -\omega \sin(\omega t) + i\omega \cos(\omega t) \quad (1.56)$$

Durch Ausklammern von $i\omega$ und Umstellung erhält man:

$$\frac{de^{i\omega t}}{dt} = i\omega [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = i\omega e^{i\omega t} \quad (1.57)$$

Dieses Ergebnis erweist sich u.a. bei der Berechnung von Differentialgleichungen als sehr praktisch, weil die Differentiation nach der Zeitkoordinaten durch ein Produkt mit der Frequenz ersetzt werden kann.

1.7 Differenzieren von komplexwertigen Funktionen

BEISPIEL 10:

Wir betrachten eine der Maxwell'schen Gleichungen, als Beispiel verwenden wir diejenige, in welcher die Rotation des elektrischen Feldes E berechnet wird:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.58)$$

Zur Vereinfachung berechnen wir nur die x -Komponente ...

$$(\nabla \times E)_x = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (1.59)$$

Für harmonische Wellenfelder, deren Zeitabhängigkeit durch $\exp(-i\omega t)$ gegeben ist, ergibt sich:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega B_x \quad (1.60)$$

AUFGABE 10:

Die 1D Wellengleichung für elektromagnetische Felder lautet

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + k^2 u(x, t) = 0 \quad (1.61)$$

Zeigen Sie, dass der Ausdruck in (1.1) diese Gleichung erfüllt.

Empfohlene Literatur: [5]

1 *Komplexe Zahlen* (J. Jahns)

2 Infinitesimalrechnung (A. Edelmann)

2.1 Einführung

Die Infinitesimalrechnung hat ihre historischen Ursprünge in den Anwendungen der Physik. Erste Ansätze finden sich bereits in der Antike mit der Flächen- und Volumenberechnung von Rotationskörpern (z.B. Weinfässer). Die Infinitesimalrechnung, wie wir sie heute kennen, wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton in den siebziger Jahren des 17. Jahrhunderts unabhängig voneinander entwickelt und ist bis heute ein zentrales Hilfsmittel in den Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Die Infinitesimalrechnung ist eine Methode zur Bildung geeigneter Grenzwerte, mit denen eine Funktion auf infinitesimalen (d.h. beliebig kleinen) Abschnitten widerspruchsfrei beschrieben werden kann. Man unterscheidet zwischen der Differentialrechnung und der Integralrechnung, die in den folgenden Abschnitten im Rahmen dieses Vorkurses behandelt werden.

2.2 Differentialrechnung

2.2.1 Problemstellung

Gegeben sei die Funktion $f(x)$ gemäß Abb. 2.1a. An der Stelle x_0 wurde eine Tangente angelegt, deren Steigung wir im Folgenden bestimmen wollen. Beginnen wir zunächst mit der Sekantensteigung um den Punkt x_0 , die in Abb. 2.1b. dargestellt ist.

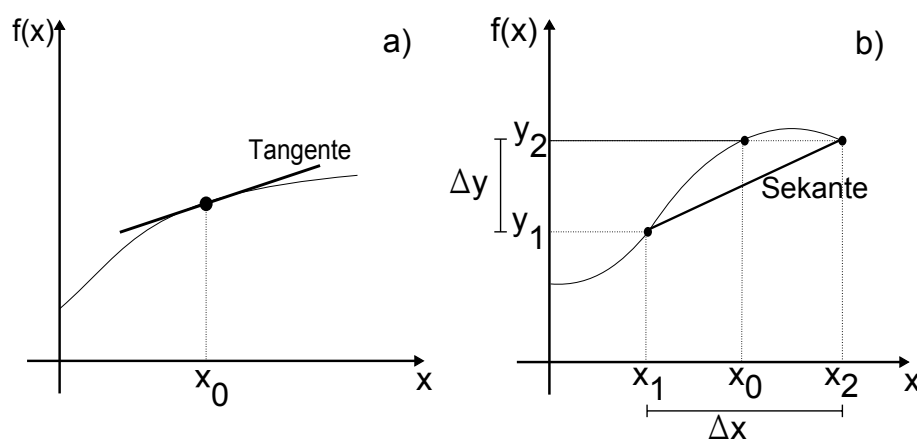


Abbildung 2.1: a) Tangentensteigung und b) Sekantensteigung um den Punkt x_0

2 Infinitesimalrechnung (A. Edelman)

Die Steigung m Sekante berechnet sich mit:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Wie in Abb. 2.1b leicht zu erkennen ist, wird die Angabe der Steigung genauer, je kleiner man den Abstand zwischen x_1 und x_2 wählt, d.h. auf einem infinitesimal kleinen Funktionsabschnitt könnte man die Steigung exakt angeben. Um diese Annahme mathematisch zu untermauern betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Die Steigung möchten wir möglichst exakt an Punkt $x_0 = 1$ bestimmen. Zur Berechnung der Sekantensteigung wählen wir den Punkt $x_0 + h$, welcher sich nahe dem Punkt x_0 befindet. Für die Sekantensteigung kann man so schreiben:

$$m_0 = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

setzt man die Funktionswerte für $f(x_0) = \frac{1}{2}x_0^2$ ein, ergibt sich weiterhin:

$$m_0 = \frac{\frac{1}{2}(x_0 + h)^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{h} = \frac{\frac{1}{2}((x_0 + h)^2 - x_0^2)}{h} = \frac{\frac{1}{2}[(x_0 + h) + x_0][(x_0 + h) - x_0]}{h}$$

durch Zusammenfassen ergibt sich:

$$m_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}(2x_0 + h) \cdot h}{h}$$

Wie zu erkennen ist, resultiert h für Δx . Wird der Abstand Δx immer kleiner, bzw. geht dieser gegen 0, so erhalten wir den Ausdruck:

$$m_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}(2x_0) = x_0.$$

Die Steigung der Tangente am Punkt x_0 entspricht in diesem gerade dem Wert x_0 . In unserem konkreten Beispiel ergibt sich für die Steigung an der Stelle $x_0 = 1$ damit $m = 1$. Es ist weiterhin interessant zu wissen, dass gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

damit lässt sich die Steigung der Tangente mit $\alpha = 45^\circ$ angeben.

ÜBUNG 1:

Bestimmen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = ax^2$ mit der oben gezeigten Vorgehensweise an der Stelle x_0 !

Ergebnis: $m_0 = 2ax_0$

Anstelle der Steigung m an einem speziellen Punkt x_0 , lässt sich die obige Vorgehensweise in einfacher Weise auf beliebige Punkte x der Funktion $f(x)$ angeben. Das Ergebnis aus Aufgabe 1 lautet dann: $m(x) = 2ax$. Man spricht von der 1. Ableitung von x . Man schreibt $f'(x)$ statt $m(x)$. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Funktion $f'(x)$ ebenfalls durch die gleiche

Vorgehensweise abgeleitet werden kann. Man spricht dann von der 2. Ableitung $f''(x)$, geschrieben wird dies mit $f''(x)$. Weitere Ableitungen der Funktion $f(x)$ sind möglich. Mathematiker haben zu vielen Funktionen Ableitungen bzw. Ableitungsregeln definiert, so dass diese direkt oder durch Anwendung bestimmter Regeln verwendet werden können. Im Folgenden sind einige Ableitungen zu wichtigen Funktionen, sowie wichtige Ableitungsregeln dargestellt.

Ableitungen wichtiger Funktionen:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$1/x$

Wichtige Ableitungsregeln:

Regel	Beispiel
Summenregel: $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$	$(x^2 + e^x)' = 2x + e^x$
Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$(x \cos(x))' = 1 \cdot \cos(x) - x \sin(x)$
Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$	$\left(\frac{x^3}{5x^2}\right)' = \frac{3x^2 \cdot 5x - x^3 \cdot 5}{25x^4} = \frac{2x}{5}$
Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(x^5)' = 5x^4$
Kettenregel: $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$

Weitergehende Informationen zur Differentialrechnung finden sich u. a. in [1, 2, 3].

2.3 Integralrechnung

2.3.1 Problemstellung

Gegeben sei wieder eine Funktion $f(x)$ gemäß Abb. 2.2a. In diesem Fall möchten wir nicht die Steigung an einem beliebigen Punkt bestimmen, sondern die schraffierte Fläche unterhalb des Funktionsgraphen zwischen x_a und x_b . Zu diesem Zweck nähern wir die zu bestimmende Fläche mit Rechtecken an, wie in Abb. 2.2b dargestellt ist.

Das erste Rechteckelement aus Abb. 2.2b lässt sich so berechnen mit:

$$A_1 = f(x_a) \cdot \Delta x$$

2 Infinitesimalrechnung (A. Edlmann)

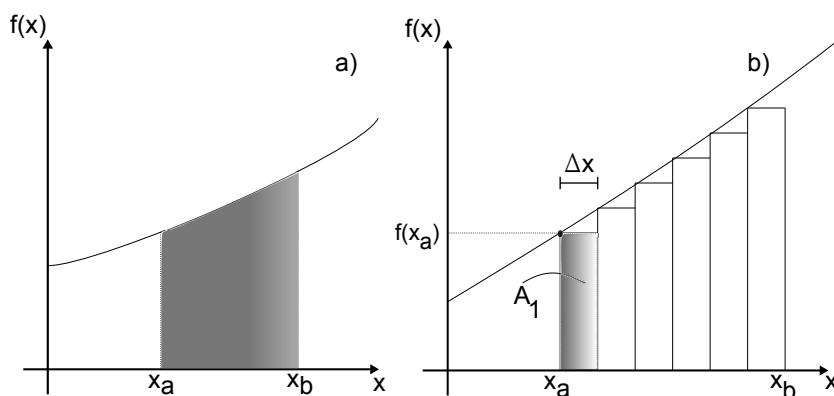


Abbildung 2.2: a) Integrationsbereich und b) Stufenapproximation des Integrationsbereichs

und durch eine einfache Summierung der n Flächenelemente lässt Gesamtfläche näherungsweise angeben mit:

$$A_g = \sum_{k=1}^n A_k \cdot \Delta x$$

Wie man leicht in Abb. 2.2b erkennen kann, wird die Näherung genauer, wenn die Anzahl der Rechteckstückchen erhöht und damit Δx kleiner wird. Wählt man hier, ähnlich wie in der Differentialrechnung, einen infinitesimal kleinen Funktionsabschnitt, so könnte man auch hier die Fläche exakt angeben. Diese Annahme soll im Folgenden mathematisch untersucht werden. Betrachten wir dazu eine beliebige Funktion $f(x)$. Zwischen den Punkten x_a und x_b möchten wir die Fläche bestimmen. Die zu bestimmende Fläche hängt im Intervall $[x_a, x_b]$ von x ab. Diese nennen wir im Folgenden $F(x)$. Betrachten wir nun den Punkt x (innerhalb des Intervalls $[x_a, x_b]$) und einen benachbarten Punkt $x + d$, der sich im Abstand Δx befindet. Die Punkte x und $x + d$ sollen die Grenzen eines Rechteckstückchens definieren. Für diese Balkenfläche können wir schreiben:

$$\Delta F = F(x + d) - F(x) \approx f(x) \cdot [(x + d) - x] = f(x) \cdot d$$

Interessant ist nun die Frage, wie die Ableitung der Funktion $F(x)$ ist. Dies können wir darstellen mit:

$$F'(x) \approx \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x + d) - F(x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x) \cdot d}{d}$$

Wird d infinitesimal klein, wird $F'(x) = f(x)$. Das bedeutet: $f(x)$ ist die Ableitung von $F(x)$ bzw. $F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$. Diese sehr wichtige Erkenntnis sagt aus, dass die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist. Kennen wir die Funktion $f(x)$, so kennen wir damit auch die erste Ableitung der Funktion $F(x)$, die wir für eine Flächenberechnung benötigen. Betrachten wir als Beispiel die Funktion $f(x) = x^2$. Wenn $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$ ist, so muss die Potenz in jedem Fall um eins erhöht werden und der Koeffizient muss so gewählt werden, dass er sich bei der Ableitung kürzt. Mit diesen Überlegungen lässt sich die Stammfunktion von $f(x)$ angeben mit $F(x) = 1/3x^3$. Machen Sie die Probe durch Differentiation!

ÜBUNG 2:

Bestimmen Sie allgemein die Stammfunktion von $f(x) = a \cdot x^n$ und machen Sie die Probe durch Differentiation!

Ergebnis: $F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$

Die mathematische Darstellung der Integration erfolgt über das stilisierte große S, welches auf die Summenbildung (\sum) zurückzuführen ist. Man schreibt:

$$F(x) = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

für die Berechnung der Summe in den Grenzen x_a und x_b der Funktion $f(x)$. Im Folgenden führen wir die Flächenberechnung exemplarisch für die Funktion $f(x) = x^2$ in den Grenzen von $x_a = 2$ und $x_b = 4$ durch.

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_2^4 = \frac{1}{3} 4^3 - \frac{1}{3} 2^3 = 18 \frac{2}{3} FE$$

Das Ergebnis der Berechnung lautet $18 \frac{2}{3}$ FE (FE steht hier für Flächeneinheiten). In der Integralrechnung haben Mathematiker viele Integrale, Integrationsregeln und Integrationsmethoden definiert, diese können direkt angewandt werden. Häufig lohnt es sich auch zur Bestimmung eines Integrals, den Ausdruck in eine Form zu überführen, deren Stammfunktion bekannt ist. Im Folgenden werden einige wichtige Grundintegrale und Ableitungsregeln dargestellt.

Grundintegrale:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

Hinweis: Vergleichen Sie die Integrale mit der obigen Ableitungstabelle. (Die Konstante C ergibt sich, da die Ableitung einer Konstanten Null ist, d.h. bei der Integration ist dieser Wert nicht bekannt. Wird das Integral innerhalb bestimmter Grenzen berechnet, verschwindet diese Konstante.

2 Infinitesimalrechnung (A. Edlmann)

Integrationsregeln:

Faktoren

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Summen

$$\int_a^b [f_1(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$$

Vertauschung

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Gleiche Integrationsgrenzen

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Zerlegung

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Hinweis: Die Integrationsregeln gelten für bestimmte Integrale, d.h. Integrale bei denen die Integrationsgrenzen bestimmt sind (z.B. zwischen dem Punkt a und b $\int_a^b f(x) dx$). Im Gegensatz zu einem unbestimmten Integral ($\int f(x) dx + C$), das auch als Stammfunktion bezeichnet wird.

Weitergehende Informationen zur Integralrechnung finden sich u. a. in [1, 2, 4].

3 Differentialgleichungen (M. Bohling)

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den Differentialgleichungen (DGL) beschäftigen. Eine Vielzahl von Anwendungen wird durch DGLn erschlossen. Beispiele hierfür sind Tragflügelkonstruktionen und Talsperrenbau, Elektrotechnik und Schiffsbau, Membranschwingungen von Lautsprechern, Erdbebenwellen, Reaktionsgeschwindigkeiten bei chemischen Umsetzungen. Die Theorie zu den DGLn ist recht umfangreich, so dass hier nur ein ganz bescheidener Einblick anhand von Beispielen, ohne mathematischer Strenge geboten werden kann. Die hier beschriebene Vorgehensweise ist daher eher als Rezept zu verstehen.

3.1 Allgemeine Definitionen

Eine Bestimmungsgleichung für eine gesuchte Funktion f , in der Ableitungen von f auftreten, wird als DGL bezeichnet. Ist die gesuchte Funktion nur von einer unabhängigen Variablen abhängig, so spricht man von gewöhnlichen DGLn (GDGL). Besteht hingegen eine Abhängigkeit von mehreren unabhängigen Variablen, dann handelt es sich um partielle DGLn (PDGL).

Beispiel für eine GDGL:

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 + f(x)^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + f^2 = 1. \quad (3.1)$$

Beispiel für eine PDGL (durch ∂ wird die partielle Differentiation zum Ausdruck gebracht)

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + f(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Oftmals verzichtet man auf die explizite Angabe der unabhängigen Variablen in den DGLn, wie jeweils nach dem „bzw.“ in Gl. (1) und (2) dargestellt.

3.1.1 Ordnung und Grad einer DGL

Die Ordnung einer DGL ist durch die höchste Ordnung der Differentialquotienten gegeben. Die höchste Potenz einer Funktion bzw. deren Ableitungen ergibt den Grad einer DGL.

3 Differentialgleichungen (M. Bohling)

Beispiele:

DGL	Ordnung	Grad
$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = x + \sin(x)$	1	2
$\frac{d^2f}{dx^2} = 3xf^2$	2	1
$\frac{d^2f}{dx^2} + 3\frac{df}{dx} + f \cos(x) = \sin(x)$	2	1
$\frac{d^3f}{dx^3} \cdot \frac{d^2f}{dx^2} = f$	3	2

Für Anwendungen besonders wichtig sind die DGL vom Grade 1, die linearen DGL.

Explizite und implizite Form einer DGL

Liegt eine DGL aufgelöst nach der höchsten Ableitung vor, handelt es sich um die explizite Form, sonst um die implizite Form.

Inhomogene und homogene DGL

Eine DGL heißt inhomogen, wenn es einen Ausdruck gibt der unabhängig von der gesuchten Funktion ist, homogen sonst.

3.1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Schreibweise bei GDGLn

Oftmals findet man in der Literatur die „gestrichene“ bzw. „punktierte“ Schreibweise, wobei erstere für Ableitungen nach der Ortskoordinate und letztere für Ableitungen nach der Zeit verwendet werden. Betrachten wir erneut Beispiel Gl. (1), die „gestrichene“ Schreibweise ist rechts in Gl.(3.3) angegeben.

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + f^2 = 1 \longrightarrow y'^2 + y^2 = 1. \quad (3.3)$$

Substituiert man die Ortsvariable x in Gl. (3.1) durch die Zeitvariable t , dann erhält man in der „punktierten“ Schreibweise

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + f^2 = 1 \longrightarrow \dot{y}^2 + y^2 = 1. \quad (3.4)$$

Im folgenden benutzen wir die in Gl. (3.1) verwendete Darstellung.

3.1.3 Aufstellen von GDGL

In diesem Abschnitt werden wir anhand von einfachen Beispielen Vorgänge aus der Physik bzw. Ingenieurwissenschaften mit Hilfe der GDGL in die mathematische Sprache übersetzen.

Beispiel 1: RC-Glied.

Wir betrachten 3.1. Ein geladener Kondensator C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mittels des Schalters an den Widerstand R geschaltet. Die Spannung am Kondensator zum Zeitpunkt $t \leq 0$ sei $u_c(t \leq 0) = U_0$ bzw. die Ladung $q(t \leq 0) = Q_0$. Die Spannung am Kondensator ist zu jedem Zeitpunkt t gleich dem Spannungsabfall am Widerstand, also $u_c(t) = u_R(t) = i(t)R$. Mit dem im Text angegebenen Ausdruck können wir unsere GDGL aufstellen.

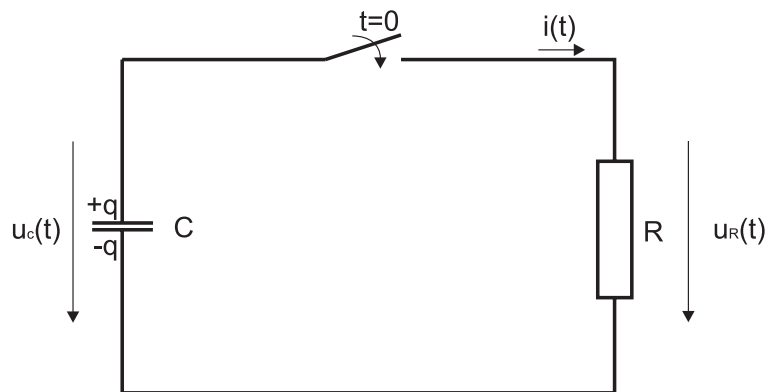


Abbildung 3.1: Der geladene Kondensator C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ an den Widerstand R angelegt.

$$u_c = u_R = iR = -RC \frac{du_c}{dt}, \text{ da } i(t) = C \frac{du_c}{dt} \quad (3.5)$$

bzw.

$$u_c + RC \frac{du_c}{dt} = 0. \quad (3.6)$$

Alternativ lässt sich bei gegebener Ladung eine GDGL

$$u_c = \frac{q}{C} = u_R = iR = -R \frac{dq}{dt}, \text{ da } i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (3.7)$$

bzw.

$$q + RC \frac{dq}{dt} = 0 \quad (3.8)$$

aufstellen.

3 Differentialgleichungen (M. Bohling)

Beispiel 2: Radioaktiver Zerfall.

Es soll der Zerfall von radioaktiven Substanzen beschrieben werden. $N(t)$ sei hierbei die Anzahl der radioaktiven Atome zum Zeitpunkt t . Ferner sei δt ein „kleiner“ Zeitabschnitt. Aus der Erfahrung wissen wir, dass folgende Proportionalität gilt

$$N(t + \delta t) - N(t) \propto N(t)\delta t. \quad (3.9)$$

Mit Einführung eines Proportionalitätsfaktors $K > 0$ erhalten wir aus Gleichung (9)

$$\frac{dN}{dt} = -K \cdot N(t), \quad (3.10)$$

woraus nach Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ die GDGL

$$\frac{dN}{dt} + K \cdot N(t) = 0 \quad (3.11)$$

folgt.

Beispiel 3: Mechanisches Schwingungssystem.

Ein häufiges in der Technik auftretendes Bauelement ist die Reihenschaltung von Masse, Feder und Dämpfung, Abbildung 3.2

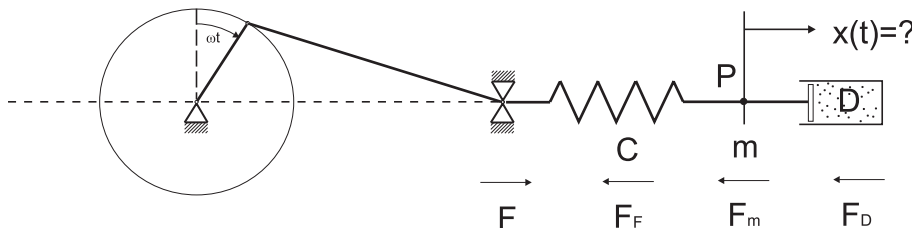


Abbildung 3.2: Mechanisches Schwingungssystem.

Wir denken uns die Masse m des Systems auf einen Punkt P konzentriert. Die Federkonstante sei C und die Dämpfungskonstante D . Das vorliegende System werde durch eine vorgegebene zeitabhängige äußere Kraft $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ in Bewegung versetzt. Gesucht ist eine Beziehung für die Bewegung $x(t)$ des Punktes P . Für die Kraft F_m gilt das Newtonsche Gesetz

$$F_m = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (3.12)$$

ferner gilt für die geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft mit der Dämpfungskonstanten D

$$F_D = D \frac{dx}{dt} \quad (3.13)$$

3.1 Allgemeine Definitionen

und schließlich für die Federkraft F_F mit der Federkonstanten C

$$F_F = Cx. \quad (3.14)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung der Kräfte erhält man

$$F_m + F_D + F_F = F \quad (3.15)$$

bzw.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + Cx = F. \quad (3.16)$$

Beispiel 4: Elektrischer Schwingkreis.

An einem Schwingkreis, 3.3, werde eine zeitabhängige Erregerspannung $u(t) = u_0 e^{j\omega t}$ angelegt. Gesucht werden soll eine Beziehung für den Spannungsverlauf am Kondensator.

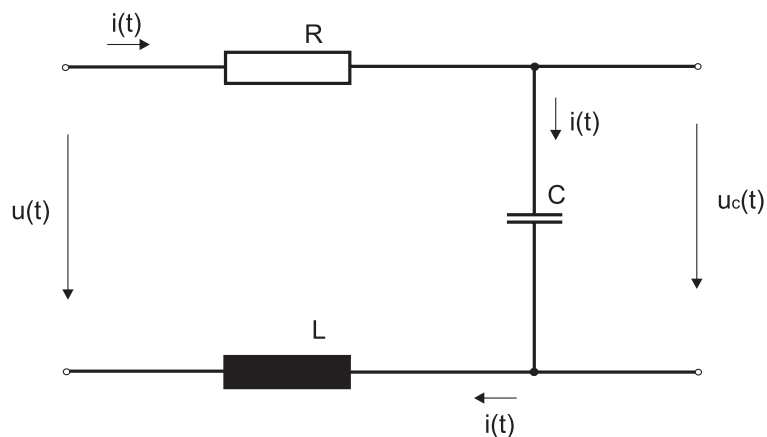


Abbildung 3.3: Elektrischer Schwingkreis.

Der Spannungsabfall über den Widerstand R bestimmt sich mit

$$u_R(t) = i(t)R. \quad (3.17)$$

Für den Strom schreiben wir

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}. \quad (3.18)$$

Der Spannungsabfall über der Spule L ist

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}. \quad (3.19)$$

3 Differentialgleichungen (M. Bohling)

Aus den Gleichungen (3.17) bis (3.19) folgt dann mit dem Kirchhoffschen Gesetz

$$u_R(t) + u_c(t) + u_L(t) = u(t) \quad (3.20)$$

bzw.

$$L \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c(t) = u(t). \quad (3.21)$$

Wir rekapitulieren bezüglich der o.g. vier Beispiele:

Beispiel 1: Bei den Gleichungen (3.6) bzw. (3.8) handelt es sich um homogene lineare GDGLn 1. Ordnung.

Beispiel 2: Bei Gleichung (3.11) handelt es sich um eine homogene lineare GDGL 1. Ordnung.

Beispiel 3: Bei Gleichung (3.16) handelt es sich um eine inhomogene lineare GDGL 2. Ordnung.

Beispiel 4: Bei Gleichung (3.21) handelt es sich um eine inhomogene lineare GDGL 2. Ordnung.

3.2 Bestimmung der Lösungsfunktionen zu den GDGLn aus den Beispielen

Schaut man sich die Literatur zu den DGLn an, wird man feststellen, dass es verschiedene Typen von GDGLn gibt. Damit verbunden sind natürlich auch verschiedene Lösungsansätze. Bei den Gleichungen (3.6), (3.8), (3.11) handelt es sich um GDGLn mit getrennten Variablen, also um den Typ

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g(y). \quad (3.22)$$

Wir wollen jetzt eine Funktion u_c bestimmen, die Gleichung (3.5) bei dem gegebenen Anfangswert erfüllt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem Anfangswertproblem AWP. Zunächst schreiben wir Gleichung (3.5) als

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{RC}u_c. \quad (3.23)$$

Beim Vergleich der letzten beiden Gleichungen stellen wir fest, dass $f(x)$ hierbei $-\frac{1}{RC}$ entspricht und $g(y)$ entspricht u_c .

Im nächsten Schritt wird Gleichung (3.23) umgestellt

$$\frac{du_c}{u_c} = -\frac{1}{RC}dt \quad (3.24)$$

3.2 Bestimmung der Lösungsfunktionen zu den GDGLn aus den Beispielen

und die Integration durchgeführt (Anm.: Die Lösungsfunktion wird daher auch Integral genannt)

$$\int_{u_c(t \leq 0)}^{u_c(t)} \frac{1}{u'_c} du'_c = - \int_0^t \frac{1}{RC} dt' \quad (3.25)$$

$$\ln \left(\frac{u_c(t)}{u_c(t \leq 0)} \right) = - \frac{1}{RC} t \quad (3.26)$$

$$u_c(t) = u_c(t \leq 0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit der Zeitkonstanten } \tau = RC. \quad (3.27)$$

Wenn kein Anfangswert in der Aufgabenstellung vorgegeben ist, gibt es viele Lösungen für Gleichung (3.27). Im vorliegenden Fall ist AWP gegeben, es gilt nämlich $u_c(t \leq 0) = U_0$ und damit gibt es auch nur eine Lösung

$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.28)$$

Bei den Gleichungen (3.16) und (3.21) handelt es sich, wie bereits o.a., um inhomogene lineare GDGLn 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten, also um GDGLn des Typs

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = f(x). \quad (3.29)$$

Die zu Gleichung (3.29) gehörige homogene DGL lautet

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = 0. \quad (3.30)$$

Zunächst bestimmen eine homogen Lösung $y_h(x)$.

Dazu bilden wir bilden das sogenannte charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (3.31)$$

Jetzt bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms Gleichung (31)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}. \quad (3.32)$$

In Abhängigkeit des Wurzelausdrucks müssen wir jetzt unterscheiden

Fall 1: $a_1^2 - 4a_0 > 0$

In diesem Fall setzen wir an

3 Differentialgleichungen (M. Bohling)

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (3.33)$$

Fall 2: $a_1^2 - 4a_0 = 0$

Demnach ist λ eine doppelte Nullstelle, es gilt anzusetzen

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \quad (3.34)$$

Fall 3: $a_1^2 - 4a_0 < 0$

Die Nullstellen werden jetzt komplex (hier ist $j^2 = -1$)

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta. \quad (3.35)$$

Wir setzen an

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda(\alpha+j\beta)x} + C_2 x e^{\lambda(\alpha-j\beta)x}, \quad (3.36)$$

mit den Konstanten C_1, C_2 . Man kann zeigen, dass für Gleichung (3.29) beliebige Lösungen der Form

$$y_h(x) = C y_h(x) + y_p \quad (3.37)$$

existieren. Handelt es sich bei der Störfunktion in Gleichung (3.29) um einen der drei folgenden Fälle:

Fall 1: Die Störfunktion ist ein Polynom n-ten Grades

$$f(x) = \sum_n^{k=0} b_{n-1} x^{n-k}, \quad (3.38)$$

so ist die partikuläre Lösung ebenfalls ein Polynom n-ten Grades

$$y_p(x) = \sum_n^{k=0} B_{n-1} x^{n-k}. \quad (3.39)$$

Die B_{n-k} lassen sich nach Einsetzen von Gleichung (3.39) in Gleichung (3.29) durch Koeffizientenvergleich finden.

Fall 2: Ist die Störfunktion eine Exponentialfunktion

$$f(x) = b e^{\lambda_0 x}, \quad (3.40)$$

3.2 Bestimmung der Lösungsfunktionen zu den GDGLn aus den Beispielen

so ist die partikuläre Lösung ebenfalls eine Exponentialfunktion

$$y_p(x) = Be^{\lambda_0 x}. \quad (3.41)$$

Hierbei darf λ_0 keine mehrfache Lösung des charakteristischen Polynoms sein. B in Gleichung (3.41) wird durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

Fall 3: Ist die Störfunktion eine periodische Funktion

$$f(x) = b \cos(\omega t) = \operatorname{Re} \{ b e^{j\omega t} \} \text{ bzw. } f(x) = b \sin(\omega t) = \operatorname{Im} \{ b e^{j\omega t} \}, \quad (3.42)$$

dann erfolgt der Lösungsansatz mit

$$y_p(x) = B e^{j(\omega t - \varphi)}, \quad (3.43)$$

B wird wiederum durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

Jetzt wollen wir eine Lösungsfunktion zum Beispiel 4 bestimmen. Wir schreiben Gleichung (3.21) als

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} u(t) = \frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\delta \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t). \quad (3.44)$$

Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynom, Gleichung (3.31)

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = \lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2. \quad (3.45)$$

Für die Nullstellen gilt

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (3.46)$$

Wir nehmen an, dass Fall 3: $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$ gilt, dann folgt aus der letzten Gleichung mit der imaginären Einheit j

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (3.47)$$

Die zugehörige homogene Gleichung ist

$$\begin{aligned} u_{ch}(t) &= C_1 e^{(-\delta + j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t} + C_2 e^{(-\delta - j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t} \\ &= e^{-\delta t} \left(C_1 e^{j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} + C_2 e^{-j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

3 Differentialgleichungen (M. Bohling)

Gleichung (3.48) beschreibt eine gedämpfte Schwingung, die nach einer Einschwingphase verschwindet $u_{ch} \rightarrow 0$ und daher nicht mehr berücksichtigt werden muss. Jetzt gehen wir mit dem Ansatz Gleichung (3.43) in die inhomogene Schwingungsgleichung (3.44)

$$\frac{d^2 u_{cp}}{dt^2} + 2\delta \frac{du_{cp}}{dt} + \omega_0 u_{cp} = \omega_{cp} u(t). \quad (3.49)$$

Mit den Ableitungen

$$\frac{du_{cp}}{dt} = j\omega B e^{j(\omega t - \varphi)} = -\omega^2 u_{cp} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u_{cp}}{dt^2} = -\omega^2 B e^{j(\omega t - \varphi)} = -\omega^2 u_{cp} \quad (3.50)$$

erhält man

$$-\omega^2 B e^{j(\omega t - \varphi)} + 2\delta j\omega B e^{j(\omega t - \varphi)} + \omega_0^2 B e^{j(\omega t - \varphi)} = \omega_0^2 u_0 e^{j\omega t} \quad (3.51)$$

bzw.

$$B [2\delta\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)] e^{j(\omega t - \varphi)} = -j\omega_0^2 e^{j\omega t} \quad (3.52)$$

bzw.

$$B [2\delta\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)] e^{j(\omega t - \varphi)} = -j\omega_0^2 e^{j(\varphi - \pi/2)}. \quad (3.53)$$

Mit $\varphi_1 = \varphi - \frac{\pi}{2}$ folgt

$$B \sqrt{(2\delta\omega)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (3.54)$$

und damit ist

$$B e^{\arctan\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\delta\omega}\right)} = \frac{\omega_0^2 u_0}{\sqrt{(2\delta\omega)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} e^{j\varphi_1}. \quad (3.55)$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$u_c(t) = \frac{\omega_0^2 u_0}{\sqrt{(2\delta\omega)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}. \quad (3.56)$$

3.3 Partielle Differentialgleichungen

Hier wollen wir nur die sogenannte Wellengleichung auf rein intuitivem Weg, wiederum unter Umgehung strenger mathematischer Überlegungen, entwickeln. Dabei soll nur eine Ortskoordinate betrachtet werden.

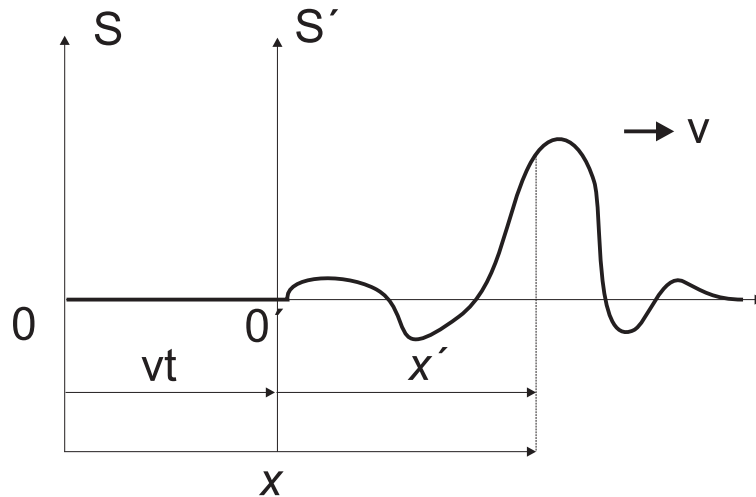


Abbildung 3.4: Das Koordinatensystem S' bewegt sich mit der Störung nach rechts.

Abbildung 3.4 zeigt eine Störung f , die sich mit v nach rechts bewegt. Das Koordinatensystem S' bewege sich mit der Störung, die Störung ist hier unabhängig von der Zeit. Zum Zeitpunkt $t = 0$ überlappen sich beide Koordinatensysteme, deshalb ändert sich das Profil in S' nicht und für die Wellenfunktion ψ können wir ansetzen

$$\psi(x, t) = f(x') = f(x - vt). \quad (3.57)$$

Gleichung (3.57) lässt sich verallgemeinern, indem wir auch Störungen betrachten, die sich nach links ausbreiten.

$$\psi(x, t) = f(x') = f(x \pm vt), \quad (3.58)$$

Der Zusammenhang für die x - bzw. x' -Koordinate ist

$$x' = x \pm vt, \quad (3.59)$$

woraus sich nach partieller Differentiation

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v \quad (3.60)$$

3 Differentialgleichungen (M. Bohling)

ergibt.

Die partielle Ableitung der Wellenfunktion nach dem Ort bei festgehaltener Zeit $t = \text{const.}$ liefert

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (3.61)$$

und nach der Zeit bei festgehaltenem Ort $x = \text{const.}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial x'}. \quad (3.62)$$

Aus den Gleichungen (3.61) und (3.62) erhält man

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial x'}. \quad (3.63)$$

Das „ \pm “ in der letzten Gleichung lässt sich eliminieren, indem wir die zweite Ableitung von Gleichung (3.61) und (3.62) bilden.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \pm v \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.65)$$

Wegen

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.66)$$

folgt

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \pm v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} \quad (3.67)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \pm v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) - v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} = 0. \quad (3.68)$$

Die Gleichungen (3.67) bzw. (3.68) werden als Wellengleichung bezeichnet. Das allgemeine Integral befriedigt jede beliebige Funktion $f(x - vt)$ und außerdem $f(t + vt)$, so dass die allgemeine Lösung lautet

$$\psi = f(x - vt) + f(x + vt). \quad (3.69)$$

4 Vektoren (S. Helfert)

4.1 Einleitung

Ein Vektor ist eine physikalische Größe, die neben ihrem Betrag auch eine Richtung aufweist. In der Mechanik sind z.B. die Kraft, der Weg oder auch die Geschwindigkeit solche Vektoren, aus der Elektrotechnik sollen hier die elektrischen und magnetischen Felder genannt werden.

Im Gegensatz zu diesen vektoriellen Größen, gibt es auch Skalare. Als Beispiel sollen hier Temperatur, Ladung, Strom Spannung genannt werden. Um Vektoren von skalaren Größen zu unterscheiden, werden sie besonders gekennzeichnet. In der Literatur finden sich verschiedene Darstellungen: z.B. mit mit einem Pfeil über diesen Größen, oder auch fett.

$$\vec{a} \quad \mathbf{a}$$

In älteren Büchern findet man auch häufiger die Verwendung altdeutscher Buchstaben; hier werden wir die Darstellung mit fetten Buchstaben benutzen.

Um uns den Unterschied zwischen Vektoren Skalaren deutlich zu machen überlegen wir uns den Unterschied zwischen den beiden folgenden Aussagen:

- a Die Temperatur ändert sich um 10° .
- b Er hat sich in gerader Linie 100 m von seinem Ausgangspunkt entfernt.

Da die Temperatur steigen oder sinken kann, führt die erste Aussage zu zwei diskreten Möglichkeiten für die neue Temperatur. Im zweiten Fall ist nur die Länge des Weges gegeben. Da keine Angabe über die Richtung gemacht wurde, liegt der Endpunkt auf einem Kreis, wie es in der Abb. 4.1 dargestellt wurde. Eingezeichnet sind dort einige mögliche Wege (s_1 bis s_4).

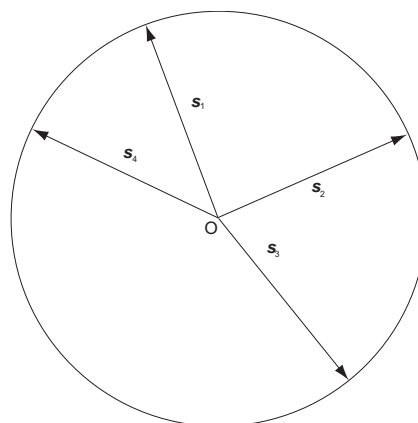


Abbildung 4.1: Vektoren mit gleicher Länge

4.2 Komponenten eines Vektors

Im folgenden werden wir insbesondere Vektoren im dreidimensionalen Raum, oder der Ebene (also einem zweidimensionalen Raum) betrachten. Z.B. können wir (in kartesischen Koordinaten) die Kraftwirkung aufteilen in Komponenten in x , y und z Richtung. In diesem Fall können wir auch schreiben

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Den oben dargestellten Vektor wollen wir als "physikalischen Vektor", weil eine physikalische Größe (hier die Kraft) auftritt, und diese aus drei Komponenten besteht.

Mathematisch können aber

Neben den Komponenten EINER physikalischen Größe können wir aber auch Größen in einem Vektor schreiben, die z.B. eine unterschiedliche Dimension haben, Z.B. könnten wir den Strom und die Spannung zu einem Vektor, den wir hier \mathbf{V} nennen, zusammenfassen:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}$$

Im Unterschied zu den oben genannten physikalischen Vektoren, bezeichnen wir diese als "mathematische Vektoren". Man erkennt, dass die Klasse der physikalischen Vektoren eine Untermenge der mathematischen Vektoren darstellt. Im folgenden werden uns aber mit den "physikalischen Vektoren" beschäftigen. Viele der zu nennenden Eigenschaften gelten aber auch allgemein.

Betrag eines Vektors

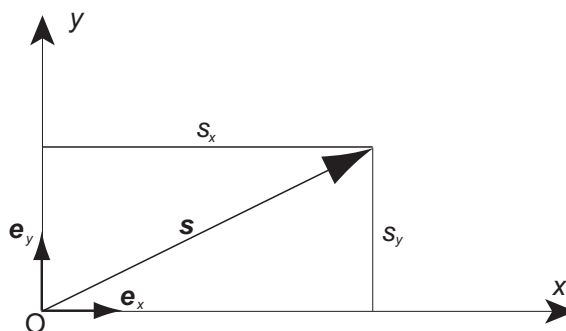


Abbildung 4.2: Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors lässt sich einfach mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen. Dazu werde der 2D-Vektor \mathbf{s} in der Abb. 4.2 betrachtet. Seine Länge ergibt sich einfach zu

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

Diese Formel lässt sich auf einen n -dimensionalen Vektor verallgemeinern:

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n s_k^2}$$

4.2 Komponenten eines Vektors

Es sollte hier angemerkt werden, dass so eine Summe nur sinnvoll ist, wenn alle Komponenten die gleiche Dimension aufweisen.

Einheitsvektoren

Ein Einheitsvektor \mathbf{e}_u ist ein Vektor der Länge 1 der in u -richtung zeigt. Der Gesamtvektor \mathbf{s} in der Abb. 4.2 lässt sich dann auch schreiben zu:

$$\mathbf{s} = s_x \mathbf{e}_x + s_y \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Die rechte Schreibweise entspricht der weiter oben angegebenen. Die Form mit Einheitsvektoren ist besonders vorteilhaft, wenn keine kartesischen Koordinaten verwendet werden sondern z.B. Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten.

Addition und Subtraktion zweier Vektoren

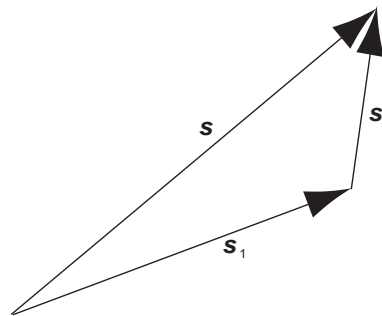


Abbildung 4.3: Addition zweier Vektoren

Abb. 4.3 zeigt anschaulich, wie zwei Vektoren addiert werden und sich ein neuer Vektor ergibt. Mathematisch muss man die zugehörigen skalaren Komponenten addieren. Mit:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} s_{x1} \\ s_{y1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} s_{x2} \\ s_{y2} \end{pmatrix}$$

folgt

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} s_{x1} + s_{x2} \\ s_{y1} + s_{y2} \end{pmatrix}$$

oder in der Schreibweise mit Einheitsvektoren

$$\mathbf{s} = (s_{x1} + s_{x2})\mathbf{e}_x + (s_{y1} + s_{y2})\mathbf{e}_y$$

Analog folgt für die Differenz zweier Vektoren

$$\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} s_{x1} - s_{x2} \\ s_{y1} - s_{y2} \end{pmatrix} = (s_{x1} - s_{x2})\mathbf{e}_x + (s_{y1} - s_{y2})\mathbf{e}_y$$

4.3 Inneres Produkt, Skalarprodukt

Das innere Produkt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist definiert durch:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) . \quad (4.3)$$

Im dreidimensionalen Fall ergibt sich

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 . \quad (4.4)$$

Das innere Produkt ist ein Skalar und als solcher invariant gegen Drehung des Koordinatensystems.

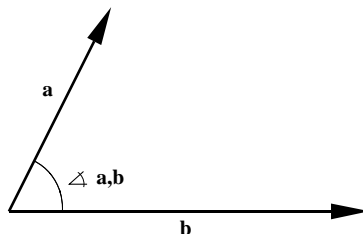


Abbildung 4.4: Zum Skalarprodukt

Das Skalarprodukt kann auf beliebigen n -dimensionalen Vektor erweitert werden; es gilt dann

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k .$$

Wegen der auftretenden Summe, gilt das oben gesagte bzgl. Einheiten der Komponenten ganz analog.

Orthogonalität zweier Vektoren

Wenn zwei Vektoren orthogonal zueinander sind ist ihr Skalarprodukt gleich Null. Dies lässt sich an der Definition (4.3) erkennen, denn in diesem Fall ist $\cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Das Produkt zweier skalarer Größen ist ja bekanntlich dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme den Wert Null hat. Im Fall von Vektoren muss nicht zwingend einer der Vektoren der Nullvektor sein. Als Beispiel betrachten wir die beiden Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als Wert für das Skalarprodukt erhalten wir

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 = 0$$

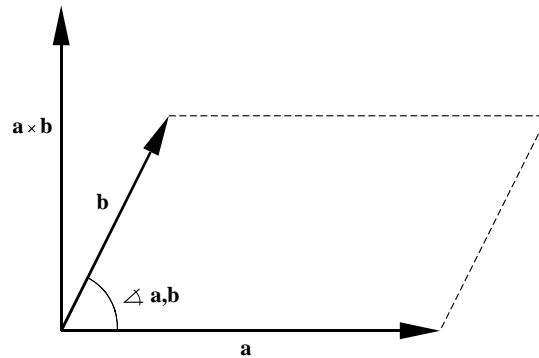


Abbildung 4.5: Zum äußeren Produkt

4.4 Äußeres Produkt, Vektorprodukt, Kreuzprodukt

Das äußere Produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist ein Vektor, dessen Betrag gleich der Fläche des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms ist und dessen Richtung den Richtungen von \mathbf{a} und \mathbf{b} im Sinne einer Rechtsschraube zugeordnet ist.

Es ist

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) .$$

Man erhält das äußere Produkt in Komponentendarstellung besonders bequem unter Benutzung der Determinantenschreibweise

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Das äußere Produkt ist nicht kommutativ:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

4.5 Spatprodukt

Das Spatprodukt entsteht durch skalare Multiplikation des äußeren Produkts $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zweier Vektoren mit einem dritten Vektor \mathbf{c} . In Komponentendarstellung ist

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

Durch Vertauschen von Zeilen der Determinanten zeigt man, dass

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \\ &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.7)$$

4 Vektoren (S. Helfert)

gilt. Zyklische Vertauschung der Faktoren ändert den Wert des Spatprodukts nicht. Der Betrag des Spatprodukts ist das Volumen den von den Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Parallelepiped.

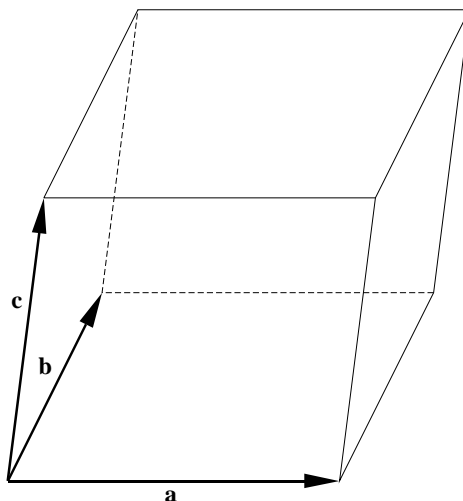


Abbildung 4.6: Zum Spatprodukt

4.6 Doppeltes Kreuzprodukt

Es ist

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} . \quad (4.8)$$

Beweis:

Es ist $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \perp \mathbf{c}$,
 $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \perp \mathbf{b}$
und $[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \perp (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Daraus folgt, dass der Vektor $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ in der von \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Ebene liegt.

Man kann also schreiben

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c} . \quad (4.9)$$

Zur Bestimmung von α und β wählt man o.B.d.A. das Koordinatensystem so, dass die x -Achse in Richtung von \mathbf{c} zeigt und \mathbf{b} in der x - y -Ebene liegt.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= c_x \mathbf{e}_x \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y \\ \mathbf{a} &= a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Es ist

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ b_x & b_y & 0 \\ c_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_y c_x \mathbf{e}_z$$

4.7 Beschreibung von Kurven und Flächen mit Ortsvektoren

und

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & -b_y c_x \end{vmatrix} = -a_x b_y c_x \mathbf{e}_z - a_y b_y c_x \mathbf{e}_x .$$

Das Ergebnis wird so umgeformt, dass ein Ausdruck der Form (4.9) entsteht:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_x c_x b_y \mathbf{e}_x \\ &= a_x c_x b_x \mathbf{e}_x + a_x c_x b_y \mathbf{e}_y - a_y b_y c_x \mathbf{e}_x \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} . \end{aligned}$$

Aufgaben

Beweisen Sie mittels der Eigenschaften von Spatprodukt und doppeltem Kreuzprodukt die Beziehungen

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (4.10)$$

und

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}] \mathbf{c} - [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}] \mathbf{d} . \quad (4.11)$$

4.7 Beschreibung von Kurven und Flächen mit Ortsvektoren

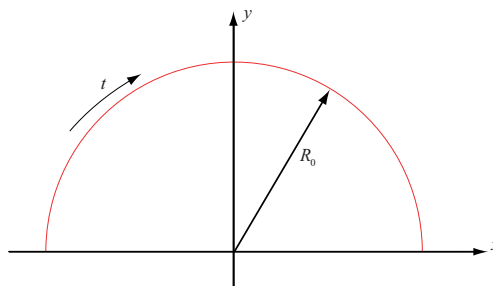


Abbildung 4.7: Darstellung eines Kreises mit Vektoren

In der Vektoranalysis müssen häufig Linienintegrale oder Flächenintegrale berechnet werden. Dabei werden Punkte im Raum durch Ortsvektoren beschrieben, die von einer (Linie) oder zwei (Flächen) Parametern abhängen. Als Beispiel betrachten wir einen Halbkreis in der $x - y$ Ebene (s. Abb. 4.7). Wir können hier z.B. y als Funktion von x schreiben:

$$y = \sqrt{R_0^2 - x^2} \quad -R_0 \leq x \leq R_0 \quad (4.12)$$

Bei der Beschreibung mit Ortsvektoren werden x und y parametrisiert, z.B. in der folgenden Weise:

$$x(t_1) = R_0 \cos t_1 \quad y(t_1) = -R_0 \sin t_1 \quad -\pi \leq t_1 \leq 0 \quad (4.13)$$

In Vektorschreibweise ergibt sich dann

$$\mathbf{r}(t_1) = \begin{pmatrix} R_0 \cos t_1 \\ -R_0 \sin t_1 \end{pmatrix} \quad -\pi \leq t_1 \leq 0 \quad (4.14)$$

4 Vektoren (S. Helfert)

Wie man sofort erkennen kann, ist dies nicht die einzige Möglichkeit den Halbkreis zu beschreiben. Wenn wir die "y(x)" Darstellung von oben umschreiben lässt sich der Halbkreis auch wie folgt darstellen

$$\mathbf{r}(t_2) = \begin{pmatrix} t_2 \\ \sqrt{R_0^2 - t_2^2} \end{pmatrix} \quad -R_0 \leq t_2 \leq R_0 \quad (4.15)$$

Tangentenvektor

In der Vektoranalysis werden bei den Linienintegralen häufiger den Tangentenvektor $d\mathbf{s}$ benötigen. Aus dem Ortsvektor \mathbf{r} können wir diesen wie folgt berechnen.

$$d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

Für die beiden Darstellungen des Halbkreises ergibt sich dann

$$d\mathbf{s}(t_1) = \frac{d\mathbf{r}}{dt_1} dt_1 = \begin{pmatrix} -R_0 \sin t_1 \\ -R_0 \cos t_1 \end{pmatrix} dt_1$$

und

$$d\mathbf{s}(t_2) = \frac{d\mathbf{r}}{dt_2} dt_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \\ \frac{t_2}{\sqrt{R_0^2 - t_2^2}} \end{pmatrix} dt_2$$

Aufgaben

Gegeben sei der folgende, von einem Strom durchflossene, Leiter. Geben Sie eine Parameterdarstellung des Leiterstücks an! (Hinweis: Es handelt sich um drei Abschnitte!) Berechnen Sie den Tangentenvektor!

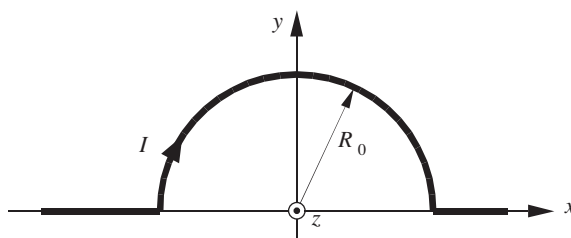


Abbildung 4.8: Stromdurchflossener Leiter

Parametrisierung einer Fläche

In Abb. 4.9 ist ein Zylinder als Beispiel einer Fläche im Raum dargestellt. Sein Mantel kann z.B. in der folgenden Weise parametrisiert werden:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} R_0 \cos u \\ R_0 \sin u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 \leq v \leq h$$

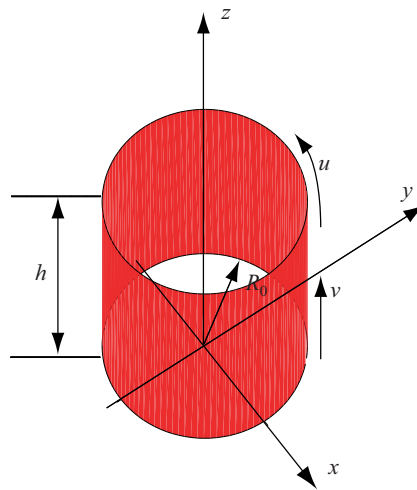


Abbildung 4.9: Parametrisierung eines Zylindermantels

Um also den kompletten Mantel zu beschreiben, müssen die beiden Parameter u und v in den angegebenen Grenzen variiert werden. Solch eine Parametrisierung werden wir ebenfalls in der Vektoranalysis benötigen.

4.8 Vektoranalysis

4.8.1 Gradient

Der Gradient einer skalaren Funktion $\Phi(\mathbf{r})$ des Ortes ist definiert durch

$$d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{r} \quad , \quad (4.16)$$

bzw. in häufig benutzter Schreibweise

$$d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot ds \quad .$$

Offenbar drückt das Skalarprodukt $ds \cdot \text{grad } \Phi$ die Änderung $d\Phi$ der skalaren Funktion $\Phi(\mathbf{r})$ aus, die diese erfährt, wenn man im Skalarfeld um die gerichtete Strecke ds fortschreitet.

In kartesischen Koordinaten gilt

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad . \quad (4.17)$$

4.9 Divergenz

Die Divergenz einer Vektorfunktion $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ des Ortes ist definiert durch

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \oint_{F(\Delta V)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} \quad . \quad (4.18)$$

Man erhält also die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, indem man die Komponente von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in Richtung der äußeren Normalen über die geschlossene Oberfläche $F(\Delta V)$ des Volumenelements

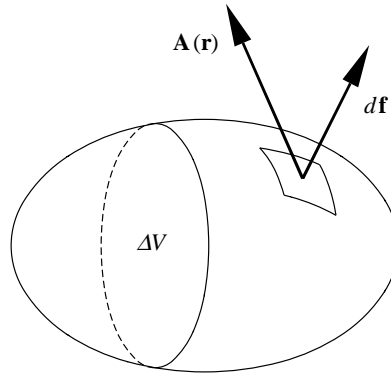


Abbildung 4.10: Zur Divergenz

ΔV integriert, durch ΔV dividieren und anschließend den Grenzübergang $\Delta V \rightarrow 0$ ausführt (s. Abb 4.10). In kartesischen Koordinaten gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} . \quad (4.19)$$

Das Hüllenintegral

$$\oint \oint_{F(\Delta V)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}$$

wird auch als Fluss des Vektorfeldes \mathbf{A} durch die Oberfläche von ΔV bezeichnet.

4.10 Rotation

Die Rotation einer Vektorfunktion $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ des Ortes ist definiert durch

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C(\Delta F)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} . \quad (4.20)$$

Man erhält die Komponente von $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ in Richtung der Flächennormalen \mathbf{n} , indem man das Linienintegral längs des Randes $C(\Delta F)$ der Fläche ΔF über die Komponente von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in Richtung des Linienelements $d\mathbf{s}$ bildet, durch ΔF dividiert und anschließend den Grenzübergang $\Delta F \rightarrow 0$ ausführt.

\mathbf{n} ist der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen und ist dem Linienelement $d\mathbf{s}$ im Rechtsschraubensinn zugeordnet (vgl. Abb. 4.11). In kartesischen Koordinaten gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z . \quad (4.21)$$

Formale Merkmregel:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

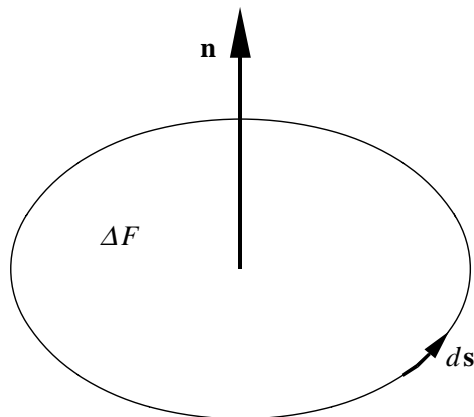


Abbildung 4.11: Zur Rotation; Zuordnung von \mathbf{n} und ds beachten!

Aufgaben

Weisen Sie unter Benutzung der koordinatenfreien Definition der Rotation Gl. 4.20 nach, dass $\text{rot } \mathbf{r} = 0$ gilt. Benutzen Sie zum Nachweis ein Flächenelement ΔF , das die Form einer Kreisscheibe hat.

4.11 Nabla-Operator (∇)

Eine formale Zusammenfassung der Differentialoperationen ist mit dem Nabla-Operator ∇ möglich.

$$\text{Es ist } \text{grad } \Phi = \nabla \Phi \quad (4.22)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (4.23)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.24)$$

In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.25)$$

4.12 Rechnen mit dem Nabla-Operator

Die Verwendung der Nabla-Schreibweise ist von Vorteil, wenn komplizierte vektoranalytische Ausdrücke auszuwerten sind. Man wendet zunächst die Regel für die Differentiation von Produkten an. Anschließend wird mittels der Formeln der Vektoralgebra so umgeformt, dass der Nabla-Operator nur noch auf den nicht konstanten gehaltenen Faktor des Produktes wirkt. Dabei ist zu beachten, dass der Nabla-Operator sowohl Träger von Differentiationsbefehlen ist als auch Vektorcharakter hat.

4.13 Formeln zur Vektoranalysis

Die Operationen grad, div und rot sind **lineare** Differentialoperationen, daher gilt

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(\Phi + \Psi) &= \text{grad} \Phi + \text{grad} \Psi \\
 \text{grad}(c\Phi) &= c \text{grad} \Phi \\
 \text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \text{div} \mathbf{A} + \text{div} \mathbf{B} \\
 \text{div}(c\mathbf{A}) &= c \text{div} \mathbf{A} \\
 \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \text{rot} \mathbf{A} + \text{rot} \mathbf{B} \\
 \text{rot}(c\mathbf{A}) &= c \text{rot} \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

Eine erste Anwendung für das über das Rechnen mit dem Nabla-Operator Gesagte finden wir, wenn wir grad $(\Phi \cdot \Psi)$ ausrechnen.

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(\Phi \cdot \Psi) &= \nabla(\Phi \cdot \Psi) \\
 &= \nabla(\Phi_c \cdot \Psi) + \nabla(\Phi \cdot \Psi_c) \quad (\text{Differentiation eines Produkts}) \\
 &= \Phi \Delta \Psi + \Psi \Delta \Phi \\
 \text{grad}(\Phi \cdot \Psi) &= \Phi \text{grad} \Psi + \Psi \text{grad} \Phi .
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Der Index c deutet an, dass der jeweilige Faktor konstant zu halten ist.

Oft wird grad r mit

$$r = \sqrt{r^2} = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gebraucht. Unter Benutzung der Definitionsgleichung des Gradienten findet man

$$\begin{aligned}
 dr &= d(\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \\
 &= \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= (\text{grad} r) \cdot d\mathbf{r}
 \end{aligned}$$

Daraus liest man ab, dass

$$\text{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r \tag{4.27}$$

gilt.

Durch eine ähnliche Argumentation findet man für grad $\Phi(r)$

$$\begin{aligned}
 d\Phi(r) &= \frac{d\Phi(r)}{dr} dr \\
 &= \frac{d\Phi(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \frac{d\Phi(r)}{dr} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \text{grad} \Phi(r) \cdot d\mathbf{r} .
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{grad} \Phi(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr} \mathbf{e}_r = \Phi'(r) \mathbf{e}_r . \tag{4.28}$$

Aufgaben

Beweisen Sie mit Gl. 4.28 die häufig gebrauchten Beziehungen

$$\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.29)$$

und

$$\text{grad } [\ln(r)] = \frac{1}{r} \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r^2} . \quad (4.30)$$

Für den Gradienten des Skalarprodukts aus einem konstanten Vektor \mathbf{a} mit dem Ortsvektor \mathbf{r} findet man aus

$$d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

die Beziehung

$$\text{grad } (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} . \quad (4.31)$$

Die Berechnung von $\text{grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ stellen wir zunächst zurück und berechnen die Divergenzen verschiedener Vektorfunktionen.

Aufgaben

Man beweise die Beziehung

$$\text{div } \mathbf{r} = 3 \quad (4.32)$$

unter Zuhilfenahme kartesischer Koordinaten.

Die Berechnung von $\text{div } (\Phi \mathbf{A})$ ergibt

$$\begin{aligned} \text{div}(\Phi \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) \\ &= \nabla \cdot (\Phi_c \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}_c) \\ &= \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \Phi \\ \text{div}(\Phi \mathbf{A}) &= \Phi \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } \Phi . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aufgaben

Beweisen Sie mit Hilfe von Gl. 4.33 die Beziehungen

$$\text{div } [\Phi(r) \mathbf{r}] = 3\Phi(r) + r\Phi'(r) \quad (4.34)$$

und

$$\text{div } \mathbf{e}_r = \frac{2}{r} \quad (4.35)$$

In der Physik ist häufig die Divergenz eines Gradienten zu bilden. Wegen seiner Bedeutung wird der Operator $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ mit einem eigenen Symbol „ Δ “ bezeichnet (Delta-Operator)¹

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \Delta \Phi . \quad (4.36)$$

Die Operationen Rotation und Divergenz nacheinander auf einen beliebigen Vektor \mathbf{A} angewandt, liefern stets das Ergebnis Null:

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 . \quad (4.37)$$

Formale Merkregel: Das Kreuzprodukt aus ∇ und \mathbf{A} steht senkrecht auf ∇ . Skalare Multiplikation mit ∇ liefert daher Null.

Als nächstes berechnen wir die Divergenz eines Kreuzprodukts.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) \\ &= -\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{Vertauschungsregeln für das Spatprodukt}) \\ \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ein Spezialfall dieser Formel ist (\mathbf{a} = konstanter Vektor)

$$\operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}}_{=0} - \underbrace{\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{r}}_{=0} = 0 .$$

Dass $\operatorname{rot} \mathbf{r}$ verschwindet, zeigt man am einfachsten in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (4.39)$$

Für $\operatorname{rot} (\Phi \mathbf{A})$ findet man

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\Phi \mathbf{A}) &= \nabla \times (\Phi \mathbf{A}) \\ &= \nabla \times (\Phi_c \mathbf{A}) + \nabla \times (\Phi \mathbf{A}_c) \\ &= \Phi \nabla \times \mathbf{A} + (\nabla \Phi) \times \mathbf{A} \\ \operatorname{rot} (\Phi \mathbf{A}) &= \Phi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Phi \times \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Aufgaben

Beweisen Sie mit Hilfe von Gl. 4.40 die Beziehungen

$$\operatorname{rot} [\Phi(r) \mathbf{r}] = 0 \quad (4.41)$$

und

$$\operatorname{rot} [\Phi(r) \mathbf{r}] = \Phi'(r) \mathbf{e}_r \times \mathbf{a} . \quad (4.42)$$

¹Der Delta-Operator wird auch als Laplace-Operator bezeichnet.

\mathbf{a} sei ein konstanter Vektor.

Die Rotation eines Gradienten verschwindet identisch:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = \nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad . \quad (4.43)$$

Formale Merkregel: Das Kreuzprodukt zweier paralleler Vektoren verschwindet.

Wir bilden nun die Rotation der Rotation eines Vektorfeldes. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Diese Gleichung liefert eine Vorschrift dafür, wie der Δ -Operator auf einen Vektor anzuwenden ist:

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (4.45)$$

Die nahe liegende Vermutung, dass man $\Delta \mathbf{A}$ berechnen kann, indem man den skalaren Δ -Operator auf die einzelnen Komponenten von \mathbf{A} anwendet, gilt nämlich nur in kartesischen Koordinaten.

Dort ist

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= (\Delta \mathbf{A})_x \mathbf{e}_x + (\Delta \mathbf{A})_y \mathbf{e}_y + (\Delta \mathbf{A})_z \mathbf{e}_z \\ &= \Delta A_x \mathbf{e}_x + \Delta A_y \mathbf{e}_y + \Delta A_z \mathbf{e}_z \quad . \end{aligned} \quad (4.46)$$

In krummlinigen Koordinatensystemen dagegen ist $\Delta \mathbf{A}$ nach oben angegebenen Vorschrift (4.44) zu berechnen.

Wir berechnen nun die Rotation eines Kreuzprodukts

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \times (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) \\ &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{B} \quad . \end{aligned} \quad (4.47)$$

In den beiden letzten Summanden taucht der sogenannte **Vektorgradient** auf, der einer besonderen Deutung bedarf. Schreiben wir den Vektor $(\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{B}$ - gesprochen „ \mathbf{A} -Vektorgradient von \mathbf{B} “ - in kartesischen Koordinaten an, so ergibt sich zunächst formal

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{B} &= \left[\left(A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \left(B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z \right) \\ &= \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z \right) \quad . \end{aligned}$$

Da die Einheitsvektoren \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z ortsunabhängig sind, liefert die Anwendung der Regel für die

4 Vektoren (S. Helfert)

Differentiation von Produkten

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} &= \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x \\
 &+ \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y \\
 &+ \left(A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z .
 \end{aligned}$$

In der 1. Klammer rechts steht das Skalarprodukt $(\mathbf{A} \cdot \text{grad } B_x)$, in der 2. Klammer $(\mathbf{A} \cdot \text{grad } B_y)$, in der 3. Klammer $(\mathbf{A} \cdot \text{grad } B_z)$.

Demnach können wir schreiben:

$$(\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \text{grad } B_x)\mathbf{e}_x + (\mathbf{A} \cdot \text{grad } B_y)\mathbf{e}_y + (\mathbf{A} \cdot \text{grad } B_z)\mathbf{e}_z . \quad (4.48)$$

Wir wollen nun versuchen, zu einer anschaulichen Deutung der Operation Vektorgradient zu kommen. Zu diesem Zwecke ersetzen wir den Vektor \mathbf{A} durch das gerichtete Wegelement ds :

$$(ds \cdot \text{grad})\mathbf{B} = (ds \cdot \text{grad } B_x)\mathbf{e}_x + (ds \cdot \text{grad } B_y)\mathbf{e}_y + (ds \cdot \text{grad } B_z)\mathbf{e}_z .$$

Nach den Bemerkungen zu Gl. 4.16 liefert aber $ds \cdot \text{grad } B_x$ die Änderung dB_x der Komponente B_x des Vektors \mathbf{B} beim Fortschreiten um die gerichtete Strecke ds

$$dB_x = ds \cdot \text{grad } B_x$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}
 dB_y &= ds \cdot \text{grad } B_y \\
 dB_z &= ds \cdot \text{grad } B_z .
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst also

$$(ds \cdot \text{grad})\mathbf{B} = dB_x \mathbf{e}_x + dB_y \mathbf{e}_y + dB_z \mathbf{e}_z = d\mathbf{B} .$$

Offenbar drückt der Vektor $(ds \cdot \text{grad})\mathbf{B}$ die Änderung $d\mathbf{B}$ des Vektors $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ aus, die dieser erfährt, wenn man im Vektorfeld um die gerichtete Strecke ds fortschreitet. Es entspricht also $(ds \cdot \text{grad})\mathbf{B}$ im Vektorfeld dem Ausdruck $ds \cdot \text{grad } \Phi$ im Skalarfeld.

Nach diesen Bemerkungen kehren wir zurück zu Gl. 4.48. Wir fügen noch an, dass sich für die Komponenten des Vektors $(\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B}$ in anderen Koordinatensystemen wesentlich kompliziertere Ausdrücke ergeben, da die Einheitsvektoren dann i.a. ortsabhängig sind. Eine Berechnungsmöglichkeit ist auch über die Zusammenhänge von Vektorkomponenten in unterschiedlichen Koordinatensystemen gegeben (s. Tabellen).

Als Beispiel zu Anwendung von Gl. 4.48 berechnen wir

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{r} &= (\mathbf{A} \cdot \text{grad } x)\mathbf{e}_x + (\mathbf{A} \cdot \text{grad } y)\mathbf{e}_y + (\mathbf{A} \cdot \text{grad } z)\mathbf{e}_z \\
 &= A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \\
 &= \mathbf{A} .
 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Aus Gl. 4.48 zusammen mit Gl. 4.26 folgt ferner

$$(\mathbf{A} \cdot \text{grad})\Phi \mathbf{B} = \Phi (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} + \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \text{grad} \Phi) . \quad (4.50)$$

Aufgaben

Beweisen Sie mit Hilfe von Gl. 4.47 und Gl. 4.49 die Beziehung

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a} .$$

\mathbf{a} sei ein konstanter Vektor.

Aufgaben

Zeigen Sie, dass

$$(\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad})(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r} ,$$

wenn \mathbf{a} ein konstanter Vektor ist.

Aufgaben

Beweisen Sie die Beziehung

$$(\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{A}}{r} - \frac{A_r}{r}\mathbf{e}_r .$$

Wir haben noch die Berechnung von $\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ durchgeführt, die wir zunächst zurückgestellt hatten.

Es ist

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_c) .$$

Nun ist

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

und

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_c) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} ,$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.14 Integralsätze der Vektoranalysis

Gauß'scher Satz:

Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ist gleich dem Fluss durch die geschlossene Oberfläche des Volumens

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) dv = \oiint_{F(V)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} . \quad (4.52)$$

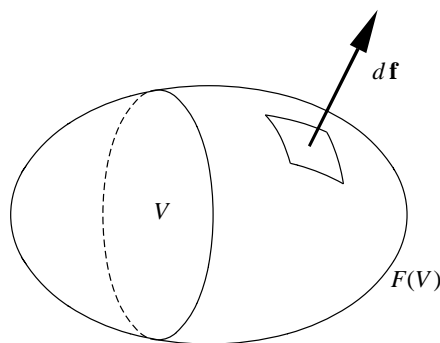


Abbildung 4.12: Zum Gauß'schen Satz

Lässt man das Volumen infinitesimal klein werden, so erhält man aus dem Gaußschen Satz die koordinatenfreie Darstellung der Divergenz ($V \rightarrow \Delta V$)

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{F(V)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} . \quad (4.12)$$

Durch geeignete Wahl von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ lassen sich aus dem Gaußschen Satz weitere nützliche Integralsätze gewinnen.

a) Setzt man $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\Phi(\mathbf{r})$ mit einem beliebigen konstanten Vektor \mathbf{a} , so erhält man

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} [\mathbf{a}\Phi(\mathbf{r})] dv &= \iiint_V \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) dv \\ &= \mathbf{a} \cdot \iiint_V \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) dv \\ &= \oiint_{F(V)} [\mathbf{a}\Phi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{f} \\ &= \mathbf{a} \oiint_{F(V)} \Phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} . \end{aligned}$$

Da

$$\mathbf{a} \cdot \left[\iiint_V \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) dv - \oiint_{F(V)} \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{f} \right] = 0$$

für einen beliebigen konstanten Vektor \mathbf{a} ist, folgt

$$\iiint_V \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) dv = \oiint_{F(V)} \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{f} . \quad (4.13)$$

Aufgaben

b) Leiten Sie aus dem Gaußschen Satz Gl. 4.52 die Beziehung

$$\iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv = \oiint_{F(V)} d\mathbf{f} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

ab, indem Sie $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{a}$ mit konstantem Vektor \mathbf{a} einsetzen und geeignet umformen.

c) Setzt man $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = F_i(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r})$, wobei $F_i(\mathbf{r})$ die i -te Komponente des Vektors

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 F_i(\mathbf{r})\mathbf{e}_i$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} (F_i \mathbf{G}) dv &= \iiint_V \left[F_i \operatorname{div} \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla F_i \right] dv \\ &= \oiint_{F(V)} F_i \mathbf{G} d\mathbf{f} . \end{aligned}$$

Multiplikation mit \mathbf{e}_i und anschließende Summation über i liefert

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \iiint_V \left[F_i \operatorname{div} \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla F_i \right] dv \\ &= \iiint_V \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i F_i \operatorname{div} \mathbf{G} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{G} \cdot \nabla F_i) \mathbf{e}_i \right] dv \\ &= \iiint_V \left[\mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{F} \right] dv = \oiint_{F(V)} \mathbf{F} (\mathbf{G} \cdot d\mathbf{f}) \end{aligned}$$

4 Vektoren (S. Helfert)

unter Beachtung der Definition des Vektorgradienten.

Mit $df = \mathbf{n}df$ lässt sich das auch in der Form

$$\iiint_V \left[\mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{F} \right] dv = \iint_{F(V)} \mathbf{F} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}) df \quad (4.15)$$

schreiben.

- d) Setzt man $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \Phi \operatorname{grad} \Psi$, so erhält man mit $\operatorname{div} (\Phi \operatorname{grad} \Psi) = \Phi \Delta \Psi + \operatorname{grad} \Psi \cdot \operatorname{grad} \Phi$ das **1. Green'sche Theorem**

$$\begin{aligned} \iiint_V (\Phi \Delta \Psi + \operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \Psi) dv &= \iint_{F(V)} \Phi \operatorname{grad} \Psi \cdot d\mathbf{f} \\ &= \iint_{F(V)} \Phi \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \Psi df . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Vertauscht man Φ und Ψ , so erhält man das 1. Green'sche Theorem in der Form

$$\iiint_V (\Psi \Delta \Phi + \operatorname{grad} \Psi \cdot \operatorname{grad} \Phi) dv = \iint_{F(V)} \Psi \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \Phi df . \quad (4.17)$$

Subtraktion beider Gleichungen liefert das

2. Green'sche Theorem

$$\iiint_V (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dv = \oiint_{F(V)} (\Phi \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} \Phi) \cdot \mathbf{n} df . \quad (4.18)$$

Stokes'scher Satz:

Das Flächenintegral über die Komponente von $\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ in Richtung der Flächennormalen ist gleich dem Linienintegral längs des Randes der Fläche über die Komponente von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in Richtung des Linienelements.

$$\iint_F \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_{C(F)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad (4.19)$$

Das Linienintegral $d\mathbf{s}$ und das Flächenelement $d\mathbf{f}$ sind einander im Rechtsschraubensinne zugeordnet. Lässt man die betrachtete Fläche infinitesimal klein werden, so erhält man aus dem sto-

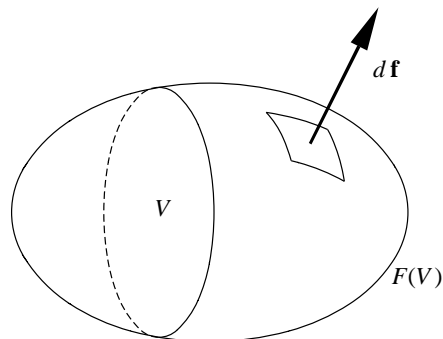


Abbildung 4.13: Zum Stokes'schen Satz

kesschem Satz die koordinatenfreie Darstellung der Rotation ($F \rightarrow \Delta F$; $d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$)

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C(\Delta F)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad (4.20)$$

a) Setz man $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\Phi(\mathbf{r})$ mit einem konstanten Vektor \mathbf{a} , so folgt mit $d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$ aus dem

4 Vektoren (S. Helfert)

stokesschen Satz

$$\begin{aligned}\iint_F \operatorname{rot}(\mathbf{a}\Phi) \cdot d\mathbf{f} &= \iint_F (\operatorname{grad} \Phi \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{f} \\ &= \mathbf{a} \cdot \iint_F \mathbf{n} \times \operatorname{grad} \Phi d\mathbf{f} \\ &= \oint_{C(F)} \mathbf{a}\Phi \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{a} \cdot \oint_{C(F)} \Phi d\mathbf{s} .\end{aligned}$$

Da

$$\mathbf{a} \left[\iint_F \mathbf{n} \times \operatorname{grad} \Phi d\mathbf{f} - \oint_{C(F)} \Phi d\mathbf{s} \right] = 0$$

für einen beliebigen konstanten Vektor \mathbf{a} ist, folgt

$$\iint_F \mathbf{n} \times \operatorname{grad} \Phi d\mathbf{f} = \oint_{C(F)} \Phi d\mathbf{s} . \quad (4.21)$$

5 Matrizen (C.A. Jones)

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<http://xkcd.com/>

5.1 Einführung

Eine (m, n) -Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschema, das aus $m \cdot n$ Zahlen *Elemente* genannt - besteht, die in m *Zeilen* (Zeilenvektoren) und n *Spalten* (Spaltenvektoren) angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad (5.1)$$

Das Element a_{ij} steht in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte. i heißt *Zeilenindex* und j heißt *Spaltenindex*, m heißt *Zeilenzahl* und n heißt *Spaltenzahl* der Matrix A .¹

Bekanntlich haben Matrizen eine Menge Eigenschaften (Rang, Ähnlichkeit Singularität u.s.w.) die für die unterschiedlichsten Anwendungen von Interesse sind. Wichtig im Bereich der Photonik sind für uns insbesondere einfache Rechenmethoden für Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix und das Lösen von Gleichungssystemen.

5.2 Matrixmultiplikation

Gegeben seien 2 Matrizen A und B mit den Dimensionen (m, n) und (k, l) . Für das Produkt $A \cdot B$ ergibt sich die Dimension (m, l) . Es muss also immer beachtet werden dass man nicht immer zwei beliebige Matrizen miteinander Multiplizieren kann. Man spricht davon dass die inneren Dimensionen zueinander passenmüssen, das heißt die Spaltenzahl des ersten Faktors n muss gleich sein der Zeilenzahl des zweiten Faktors k . Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ! Für die Matrix Multiplikation gilt im Allgemeinen für jede Zelle a_{ij} der Ergebnismatrix, dass man die entsprechende i te Zeile des ersten Faktors mit der j ten Spalte des zweiten Faktors Vektoren multipliziert werden muss.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

¹Merziger & Wirth, Repitorium der Höheren Mathematik

5.3 Transposition

Bei der Transposition handelt es sich um einen Matrixoperator bei dem die Elemente einer Matrix entlang der Hauptdiagonalen gespiegelt werden. Notiert wird dies üblicherweise mit einem Index an der Matrix A^t , A^T oder auch A' man spricht dann von einer Transponierten Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

5.4 Lösen von Gleichungssystemen

In der Elektrotechnik ganz allgemein steht oft das Lösen von Gleichungssystemen auf der Tagesordnung, die Photonik bildet da keine Ausnahme. Besondere beim Lösen von Mehrdimensionalen Wellengleichungen kann dabei eine Matrizenschreibweise zu elegante Lösungswegen führen. Gehen wir zum Beispiel mal von dem aus den Maxwellgleichungen bekannten Induktionsgesetz Gleichung 5.4 aus.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \quad (5.4)$$

Dabei enthalten \mathbf{E} und \mathbf{H} im allgemeinen die Feldkomponenten in alle drei Raumrichtungen und die Rotation $\nabla \times$ ein Matrixoperator den man besonders einprägsam als Determinante aufschreiben kann.

5.4.1 Determinante

Einer Quadratischen Matrix kann man eine Zahl oder *Determinante* zuordnen. Für zweidimensionale Matrizen sieht das wie folgt aus.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (5.5)$$

Wie bereits erwähnt lässt sich auch der Rotationsoperator durch eine Determinante aufschreiben.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

Um eine dreidimensionale Determinante zu lösen braucht man etwa die Regel von Sarrus, dadurch ergibt sich dann für eine 3-Dimensionale Matrix folgende Determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) + a_{12} \cdot (a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \quad (5.7)$$

Mit der Hilfe dieser Regel lässt sich also das Induktionsgesetz sehr leicht in seine Einzelnen Raumteile zerlegen.

5.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Von einer quadratischen Matrix A lassen sich Eigenwerte λ und Eigenvektoren \vec{x} bestimmen. Diese beschreiben oft wichtige Zustände für physikalische Systeme. Etwa bei Musikinstrumenten das Schwingen einer Seite oder aber auch die Resonanzschwingungen von Gebäuden. Rein Mathematisch beschreibt folgendes eine Eigenwertgleichung.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (5.8)$$

Anschaulich kann man die Gleichung als Vektoren darstellen, es muss gelten dass die beiden Vektoren auf der jeweiligen Seite der Gleichung in die gleiche Richtung zeigen, wobei die Länge des einen gerade ein skalares Vielfaches des anderen ist. Von Interesse sind selbstverständlich immer nur nichttriviale Lösungen also $\vec{x} \neq \vec{0}$, darüberhinaus können die Eigenwerte und Eigenvektoren im Allgemeinen natürlich auch komplex sein, selbst wenn die Matrix A rein reell ist.

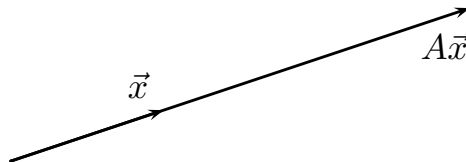


Abbildung 5.1: Eigenwertgleichung als Vektoren dargestellt.

Für "kleine" Dimensionen von A lassen sich die Eigenwerte und Eigenvektoren noch gut händisch ausrechnen, in der Praxis wird man aber für gewöhnlich auf numerische Verfahren oder bereits implementierte Methoden zurückgreifen. Etwa bei MATLAB wäre der folgende Befehl.

$$[L, x] = \text{eig}(A)$$

Zum analytischen Lösen der Eigenwertgleichung stellt man sie um in die charakteristische Gleichung

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0 \quad (5.9)$$

wobei I der Einheitsvektor ist welcher die gleiche Dimension haben muss wie A . Die Nullstellen der Determinante des Klammerausdrucks $|A - \lambda I|$ ergeben dann die Eigenwerte λ von A . Und zum Berechnen der Eigenvektoren wird dann die charakteristische Gleichung für jeden Eigenwert gelöst.

5.6 Übungsaufgaben

5.6.1 Matrixmultiplikation

Gegeben seien folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \\ \pi & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 10 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \pi & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Führen sie alle möglichen Matrixmultiplikationen zweier der gegebenen Matrizen durch.

5.6.2 Transposition

Transponieren sie alle vier Matrizen aus Gleichung 5.10.

5.6.3 Gleichungssystem lösen

Schreiben sie das Induktionsgesetz aus Gleichung 5.4 aus, unter der annahme dass die permeabilität konstant ist und die Felder y -Unabhängig sind.

5.6.4 Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Bestimmen sie für die Matrix D aus Gleichung 5.10 die Eigenwerte und Eigenvektoren.

5.7 Lösungen

5.7.1 Matrixmultiplikation

Mögliche Permutationen:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 22 + 3\pi & 44 \\ 11 + 10\pi & 56 \\ 37 & 52 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 21 + \pi & 12 + 2\pi & 10\pi \\ 25 & 20 & 23 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 8 + 3\pi & 21 \\ 6 & 12 + 4\pi & 30 \\ 4 & 8 + \pi^2 & 12 + 3\pi \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 16 & 36 \\ 8 + \pi & 16 + 3\pi \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 6 + \pi & 12 \\ 4 & 8 + 2\pi & 18 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

5.7.2 Transposition

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \pi \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 10 & 0 \end{pmatrix}; \quad C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

5.7.3 Gleichungssystem lösen

Im ersten schritt sollte man Gleichung 5.4 ohne Berücksichtigung weiterer Randbedingungen aus-schreiben.

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Im nächsten schritt kann überlegt werden was ggf vereinfacht werden kann. In diesem Fall folgt aus der y -unabhängigkeit dass die Ableitung in y -Richtung zu null wird. Auf der rechten Seit der Gleichung kann man das Skalarprodukt auflösen

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y + \vec{e}_z H_z) \quad (5.18)$$

Nun wird die Determinante ausgeschrieben, dabei können terme welche mit $\frac{\partial}{\partial y}$ multipliziert würden natürlich wegfallen.

$$\vec{e}_x \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial z} E_y\right) + \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z\right) + \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y\right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y + \vec{e}_z H_z) \quad (5.19)$$

Der Übersichtlickeits halber kann man die Gleichung wieder in eine Matrixschreibweise bringen, wobei jede Zeile einer Raumrichtung entspricht

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

5.7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Zunächst muss Charakteristisches Polynom bestimmt werden

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 \quad (5.21)$$

daraus folgen dann die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 + 2} \approx \begin{cases} 5.37228 \\ 0.37228 \end{cases} \quad (5.22)$$

Nun kann man für beide Eigenwerte jeweils die Charakteristische Gleichung lösen

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_{1,2} & 3 \\ 2 & 4 - \lambda_{1,2} \end{pmatrix} \vec{x}_{1,2} = \vec{0} \quad (5.23)$$

und erhält die folgenden Eigenvektoren

$$\vec{x}_1 \approx \begin{pmatrix} 0.6861 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2 \approx \begin{pmatrix} -2.186 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

5 Matrizen (C.A. Jones)

6 Fourier-Transformation (J. Jahns)

6.1 Definition

Die Fourier-Transformation stellt eine der wichtigsten Signaltransformationen dar. Sie eignet sich sowohl für kontinuierliche wie diskrete Signale. Die Fourier-Transformation wird u.a. in der Signalanalyse, -verarbeitung und -kodierung verwendet. Eine der bekanntesten modernen Anwendungen liegt im Bereich der Signalkodierung von Audio- und Videosignalen gemäß dem MPEG-Format sowie von statischen Bildern als JPEG-Dateien. Diese Formate beruhen auf der diskreten Kosinus-Transformation, einer Variante der Fourier-Transformation.

Allgemein stellt die Fourier-Transformation einer Funktion $f(x)$ deren Entwicklung nach Sinus- und Kosinus-Funktionen dar. Im eindimensionalen Fall und unter Verwendung einer komplexen Schreibweise lautet die Fourier-Entwicklung von $f(x)$ wie folgt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk = \mathcal{F}_k^{-1} [\tilde{f}(k)] \quad (6.1)$$

$\tilde{f}(k)$ ist die *Fourier-Transformierte* von $f(x)$ und wird auch als *Fourier-Spektrum* bezeichnet:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \mathcal{F}_x [f(x)] \quad (6.2)$$

Hierbei stellt der Ausdruck $1/\sqrt{2\pi}$ einen Normierungsfaktor dar, welcher sicherstellt, dass

$$\mathcal{F}_k^{-1} \mathcal{F}_x [f(x)] = f(x) \quad (6.3)$$

Bemerkungen:

1. Zunächst ein paar Anmerkungen zur Terminologie: der Ausdruck *Fourier-Transformation* bezeichnet die mathematische Operation, während die *Fourier-Transformierte* die mathematische Funktion bezeichnet. Der Operator \mathcal{F}_x bezeichnet die *Vorwärts-Transformation* bezüglich der x -Variablen, \mathcal{F}_k^{-1} die *inverse* Fourier-Transformation bezüglich der Variablen k . x und k werden als *Fourier-konjugierte* Koordinaten bezeichnet.

2. Die Normierungskonstante ergibt sich aus der Bedingung, dass sich nach sukzessiver Anwendung von Vorwärts- und Rückwärts-Transformation wieder die ursprüngliche Funktion ergeben soll, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right] e^{ikx'} dk \stackrel{!}{=} \frac{1}{C} f(x') \quad (6.4)$$

Dabei ist C eine zu bestimmende Konstante, welche zur Normierung verwendet wird. Wir berechnen hierzu das Zweifachintegral auf der linken Seite. Durch Ändern der Reihenfolge bei der Integration erhält man zunächst::

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x')} dk \right] dx \quad (6.5)$$

6 Fourier-Transformation (J. Jahns)

Das innere Integral ergibt die sog. Dirac'sche Delta-Funktion für das Argument $x - x'$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x')} dk = 2\pi \delta(x - x') \quad (6.6)$$

Damit ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right] e^{ikx'} dk = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx = 2\pi f(x') \quad (6.7)$$

In (6.6) tritt hier also $C = 1/(2\pi)$ als Normierungsfaktor auf. Dieser Faktor wird nun bei der Definition der Fourier-Transformation meist symmetrisch auf die Vorwärts- und die Rückwärts-Transformation aufgeteilt, woher der Term $1/\sqrt{2\pi}$ resultiert.

6.2 Alternative Definition

Als Koordinate im Fourier-Raum kann man statt der Kreisfrequenz k auch die Oszillationsfrequenz ν verwenden, die sich um den Faktor 2π unterscheidet:

$$k = 2\pi\nu \quad (6.8)$$

Bei Verwendung von ν als der Fourier-konjugierten Variablen ergibt sich für die Fourier-Transformationals eine andere Darstellung als in (6.1), nämlich:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu_x) e^{+i2\pi\nu x} d\nu_x \quad (6.9)$$

und für die Rückwärts-Transformation:

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \quad (6.10)$$

Beim Vergleich von (6.1) bzw. (6.2) mit (6.9) bzw. (6.10) fällt auf, dass der Normierungsfaktor gleich 1 ist. Frage: warum ist das so?

6.3 Beispiel 1: Transformation der rect-Funktion

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \text{rect}(x)$ (in der englisch-sprachigen Literatur i.a. als *rect-Funktion*) bezeichnet. Sie wird definiert als

$$f(x) = \text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (6.11)$$

Wir berechnen nun die Fourier-Transformation von $f(x) = \text{rect}(ax)$ for $a > 0$. Zunächst berücksichtigen wir, dass die rect-Funktion für $|x| > 1/(2a)$ gleich Null ist, so dass wir beim Integral endliche Integrationsgrenzen eintragen können:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(ax) e^{-i2\pi\nu x} dx = \int_{-1/2a}^{1/2a} e^{-i2\pi\nu x} dx \quad (6.12)$$

Nun spalten wir das Integral in Real- und Imaginärteil auf:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(ax) e^{-i2\pi\nu x} dx = \int_{-1/2a}^{1/2a} \cos(2\pi\nu x) dx + i \int_{-1/2a}^{1/2a} \sin(2\pi\nu x) dx \quad (6.13)$$

Wegen der Antisymmetrie der Sinus-Funktion ist das zweite Integral Null, so dass wir mit dem Integral über die Kosinus-Funktion fortfahren können:

$$\int_{-1/2a}^{1/2a} \cos(2\pi\nu x) dx = \frac{1}{2\pi\nu} \sin(2\pi\nu x) \Big|_{-1/2a}^{1/2a} \quad (6.14)$$

Mit ...

$$\sin(2\pi\nu x) \Big|_{-1/2a}^{1/2a} = \sin(\pi\nu/a) - \sin(-\pi\nu/a) = 2 \sin(\pi\nu/a) \quad (6.15)$$

...erhält man ...

$$\int_{-1/2a}^{1/2a} \cos(2\pi\nu x) dx = \frac{\sin(\pi\nu/a)}{\pi\nu} = \frac{1}{a} \frac{\sin(\pi\nu/a)}{\pi\nu/a} \quad (6.16)$$

Die Funktion

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (6.17)$$

wird als *sinc-Funktion* bezeichnet. Damit können wir schreiben:

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(ax) e^{-i2\pi\nu x} dx = \frac{1}{a} \text{sinc}(\nu/a) \quad (6.18)$$

Das Ergebnis ist in Abb. (6.1) für $a = 1$ and $a = 2$ dargestellt.

6.3 Beispiel 1: Transformation der rect-Funktion

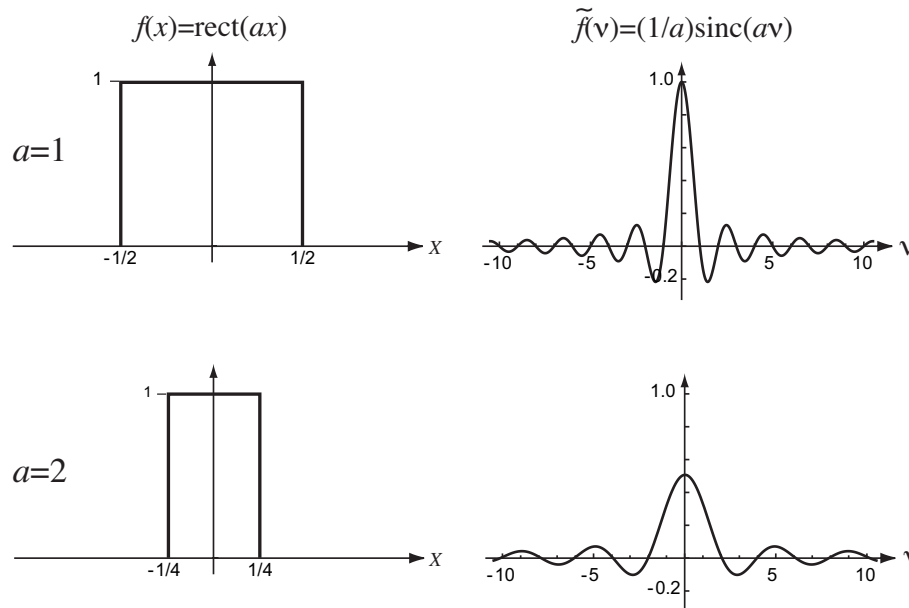


Abbildung 6.1: Fourier-Transformation einer rect-Funktion: die Transformierte skaliert in Abhängigkeit von der Breite der Funktion, gegeben durch den Wert von a .

Wir erkennen aus der Abbildung eine wesentliche Eigenschaft der Fourier-Transformation bei Skalierung: je „schmäler“ die Funktion, um so „breiter“ die Transformierte. Dieses Skalierungsverhalten kann wie folgt mathematisch ausgedrückt werden:

$$f(x) \rightarrow f(ax) \Rightarrow \tilde{f}(k) = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right), \quad a > 0 \quad (6.19)$$

denn mit $x' = ax$ kann man schreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{ikx} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{i(k/a)x'} dx' \quad (6.20)$$

Hinweis: Die oben beschriebene und in der Abbildung dargestellte sinc-Funktion¹ spielt in der Optik immer wieder eine Rolle, z.B. bei Spalt- und Gitterbeugung.

¹In der Literatur findet man auch die Definition $\text{sinc}(x) = \sin x/x$, also ohne den Faktor π . Hier verwenden wir die Definition wie in (6.17) mit dem Faktor π , der bewirkt, dass die Funktion ihre Nullstellen bei $x = \pm 1, \pm 2, \dots$ hat.

6.4 Transformation bezüglich Raum- und Zeitkoordinate

Bisher haben wir keine Aussage darüber gemacht, was die Variablen x und k darstellen sollen. Im Bereich der Optik behandeln wir Wellen und Wellenfelder. Eine Welle ist eine Oszillation in Raum und Zeit, d.h. die Wellenfunktion hängt von Orts- wie auch Zeitkoordinate ab. Verwenden wir nun also x als Bezeichnung für eine Raumkoordinate, dann wird zum Beispiel eine ebene Welle, welche sich in x -Richtung ausbreitet, folgendermaßen beschrieben:

$$u(x, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.21)$$

Wegen der unterschiedlichen Vorzeichen im Exponenten für x und t ist es sinnvoll, für die Fourier-Transformation eines Wellenfeldes $u(x, t)$ bezüglich der Raumkoordinate x und der Zeitkoordinate t unterschiedliche Vorzeichen zu verwenden. Wir bezeichnen den ortsabhängigen Anteil des Wellenfeldes mit $w(x)$ und den zeitabhängigen mit $v(t)$ und schreiben:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(k) e^{ikx} dk = \mathcal{F}_k^{-1} [\tilde{w}(k)] \quad (6.22)$$

und

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \mathcal{F}_\omega [\tilde{v}(\omega)] \quad (6.23)$$

Die inverse Transformation bezüglich der Zeit lautet dann also:

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}_t^{-1} [v(t)] \quad (6.24)$$

6.5 Mehrdimensionale Fourier-Transformation

In der Optik betrachtet man häufig mehrdimensionale Wellenfelder. Wir betrachten die Erweiterung der Fourier-Transformation auf zwei Dimensionen für die Funktion $f(x, y)$:

$$\mathcal{F}_{xy} [f(x, y)] = \tilde{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (6.25)$$

Ein Spezialfall tritt auf, wenn die Funktion $f(x, y)$ separabel ist, d.h., wenn man sie als Produkt zweier eindimensionaler Funktionen schreiben kann: $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Dann ist wegen der Separabilität des Exponential-Terms auch die Fourier-Transformierte separabel in k_x und k_y :

$$\mathcal{F}_{xy} [f_1(x)f_2(y)] = \mathcal{F}_x [f_1(x)] \mathcal{F}_y [f_2(y)] = \tilde{f}_1(k_x)\tilde{f}_2(k_y) \quad (6.26)$$

6.6 Beispiel 2: Beugung an zweidimensionaler Rechteckblende

Wir berechnen die Fourier-Transformation einer 2D rect-Funktion:

$$f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{w_x}, \frac{y}{w_y}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq w_x/2 \text{ und } |y| \leq w_y/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.27)$$

Die Funktion ist separabel, d.h.

$$\text{rect}\left(\frac{x}{w_x}, \frac{y}{w_y}\right) = \text{rect}\left(\frac{x}{w_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{w_y}\right) \quad (6.28)$$

Daher ergibt sich die 2D Fourier-Transformierte als das Produkt der 1D Transformierten, d.h.:

Wir berechnen nun die Fourier-Transformation von $f(x) = \text{rect}(ax)$ for $a > 0$. Zunächst berücksichtigen wir, dass die rect-Funktion für $|x| < 1/(2a)$ gleich Null ist, so dass wir beim Integral endliche Integrationsgrenzen eintragen können:

$$\tilde{f}(\nu_x, \nu_y) = w_x \text{sinc}(w_x \nu_x) \cdot w_y \text{sinc}(w_y \nu_y) \quad (6.29)$$

Das Ergebnis ist in Abb. 6.2 dargestellt. Die Abbildung zeigt den 2D Spalt sowie das Fourier-Spektrum, hier in den Koordinaten $x = \lambda f \nu_x$ und $y = \lambda f \nu_y$.

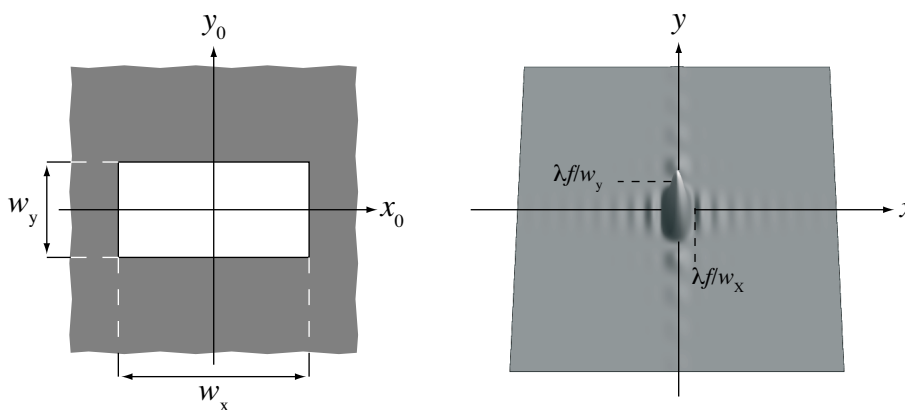


Abbildung 6.2: Fourier-Transformation einer 2D rect-Funktion. Links: Objekt $f(x, y)$. Rechts: 2D Plot der Fourier-Transformierten $\tilde{f}(\nu_x, \nu_y)$.

6.7 Fourier-Transformation in Polarkoordinaten

Gelegentlich betrachtet man Situationen, die ein Kreissymmetrie aufweisen. Ein Beispiel ist die Beugung an einer Kreisapertur oder die Erzeugung von sog. Bessel-Strahlen. In diesem Fall ist es dann i.a. günstig die Berechnungen in Kreiskoordinaten durchzuführen. Die ebenen Kreiskoordinaten r und ϕ sind mit den kartesischen Koordinaten wie folgt verknüpft:

$$x = r \cos \phi \quad \text{and} \quad y = r \sin \phi \quad (6.30)$$

bzw. umgekehrt: $r^2 = x^2 + y^2$ und $\tan \phi = y/x$. Für den Fourier-Bereich sind die Frequenzkoordinaten analog gegeben:

$$\nu_x = \rho \cos \theta \quad \text{und} \quad \nu_y = \rho \sin \theta \quad (6.31)$$

mit $\rho^2 = \nu_x^2 + \nu_y^2$ and $\tan \theta = \nu_y/\nu_x$. Damit können wir in (6.25) den Exponenten wie folgt darstellen:

$$\nu_x x + \nu_y y = r \rho (\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta) = r \rho \cos(\phi - \theta) \quad (6.32)$$

Somit ergibt sich für ein Objekt $u(r, \phi)$ die 2D Fourier-Transformierte in ebenen Kreiskoordinaten zu:

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} u(r, \phi) e^{-i2\pi r \rho \cos(\phi-\theta)} r dr d\phi \\ &= \int_{r=0}^{\infty} r \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} u(r, \phi) e^{-i2\pi r \rho \cos(\phi-\theta)} d\phi \right] dr \end{aligned} \quad (6.33)$$

Im speziellen Fall, dass das Objekt rein zirkular-symmetrisch ist, also unabhängig von ϕ , ergibt sich:

$$u(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} u(r) r J_0(2\pi r \rho) dr \quad (6.34)$$

Hier wurde ein wichtige Identität benutzt:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} e^{-i2\pi r \rho \cos(\phi-\theta)} d\phi = 2\pi J_0(2\pi r \rho) \quad (6.35)$$

$J_0(\cdot)$ ist die Bessel-Funktion nullter Ordnung (erster Gattung). Die Integraltransformation in (6.34) wird auch als *Hankel-Transformation* der Funktion $u(r)$ bezeichnet.

Empfohlene Literatur: [6]

6 *Fourier-Transformation* (J. Jahns)

Literaturverzeichnis

- [1] L. Papula, *Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure Bd. 1* (Vieweg, Wiesbaden, 2004).
- [2] R. Ansorge, H. J. Oberle, *Mathematik für Ingenieure Bd. 1* (Akademie-Verlag, Berlin, 2000).
- [3] K. Weltner, *Mathematik für Physiker Bd. 1* (Springer, Berlin, 2006).
- [4] R. Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1,2* (Springer, 1971).
- [5] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch; Auflage: 5., überarb. u. erw. Aufl. (2000)).
- [6] W. Stöbel, *Fourieroptik* (Springer, Berlin (1993)).