Musterlösung zur Einsendearbeit zum Kurs 00692, KE 2, „Theorie der öffentlichen Zwischenprodukte“, Sommersemester 2011

a) Aus dem Maximierungsproblem

$$\max_{a_x, V, A_v, k} X = kx(a_x, V)$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$V = V(A_v)$$

$$\overline{A} = ka_x + A_v$$

folgt die entsprechende Lagrangefunktion:

$$L = kx(a_x, V) + \lambda[V - V(A_v)] + \theta[\overline{A} - ka_x - A_v]$$

(10 Punkte für die Lagrangefunktion)

Leitet man diese nun nach den Entscheidungsvariablen ab, so erhalten wir:

$$\frac{\partial L}{\partial a_x} = k\frac{\partial x}{\partial a_x} - \theta k = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial V} = k\frac{\partial x}{\partial V} + \lambda = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_v} = -\lambda\frac{dV}{dA_v} - \theta = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = x - \theta a_x = 0 \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = V - V(A_v) = 0 \qquad \text{(V)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \overline{A} - ka_x - A_v = 0 \qquad \text{(VI)}$$

(25 Punkte: je 5 Punkte für die Ableitungen (I)-(IV) sowie je 2,5 Punkte für (V) und (VI))

Aus (I) und (II) folgt nun

$$\theta = \frac{\partial x}{\partial a_x}$$

sowie

$$\lambda = -k\frac{\partial x}{\partial V}$$

Ersetzt man die Lagrangemultiplikatoren entsprechend in den Gleichungen (III) und (IV), so erhält man:

$$\frac{\partial L}{\partial A_v} = k\frac{\partial x}{\partial V}\frac{dV}{dA_v} - \frac{\partial x}{\partial a_x} = 0 \qquad (\mathrm{III}')$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = x - \frac{\partial x}{\partial a_x}a_x = 0 \qquad (\mathrm{IV}')$$

Aus diesen beiden Gleichungen ermittelt man die Bedingungen erster Ordnung für ein Pareto-Optimum:

$$k\frac{\partial x}{\partial V}\frac{dV}{dA_v} = \frac{\partial x}{\partial a_x} \qquad (1)$$

$$1 = \frac{\partial x}{\partial a_x}\frac{a_x}{x} \qquad (2)$$

Dazu werden die Terme umgeordnet und die Gleichung (IV') wird durch x dividiert. Darüber hinaus muss der Faktor Arbeit gemäß Gleichung (VI) vollbeschäftigt werden.

(25 Punkte für die Herleitung)

60 Punkte

b) Die Gleichung (1) bestimmt den optimalen Einsatz des öffentlichen Zwischenproduktes. Auf der linken Seite der Bedingung steht die Grenzproduktivität des in der Zwischenproduktbranche eingesetzten Faktors Arbeit bezüglich des Gutes X. Eine Erhöhung des Arbeitseinsatzes erhöht also indirekt über das Gut V die Produktion des privaten Gutes X. Auf der rechten Seite der Gleichung ist die Grenzproduktivität der direkt in der Branche X eingesetzten Arbeit. In der effizienten Allokation müssen die beiden Grenzproduktivitäten übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, so dass beispielsweise die linke Seite der Gleichung größer ist, so würde eine erhöhter Einsatz von Arbeit in der Zwischenproduktbranche (statt in der privaten Branche) zu einer höheren Menge von X führen. Dies kann nicht optimal sein. Im umgekehrten Fall wäre der direkte Einsatz der Arbeit in der Branche X relativ produktiver, so dass die Allokation des Faktors Arbeit ebenfalls nicht effizient wäre. Die Gleichung (2) bestimmt dagegen die optimale Unternehmensgröße. Diese ist erreicht, wenn die Produktionselastizität des Faktors Arbeit den Wert eins annimmt.

5 Punkte

c) Bei einer Bereitstellung des öffentlichen Zwischenproduktes über einen Markt, lautet das Gewinnmaximierungsproblem der Unternehmen aus Branche X:

$$\max_{a_x, v} g = p_x x(a_x, V) - p_a a_x - p_v v$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$V = v + v_{-i}$$

Leitet man nun die Zielfunktion nach a_x und v ab, so ergibt sich

$$\frac{\partial g}{\partial a_x} = p_x \frac{\partial x}{\partial a_x} - p_a = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = p_x \frac{\partial x}{\partial V} - p_v = 0 \qquad \text{(II)}$$

Um nun diese Bedingungen mit der Effizienzbedingung (2) aus a) vergleichen zu können, ist die langfristige Marktgleichgewichtsbedingung zu berücksichtigen. Da Markteintrittskosten in Höhe von $m = p_x^2$ unterstellt wurden lautet diese:

$$p_x x - p_a a_x - p_v v = p_x^2 \qquad \text{(III)}$$

Aus (I), (II) und (III) folgt nun:

$$\frac{\partial x}{\partial a_x}\frac{a_x}{x} = 1 - \frac{\partial x}{\partial V}\frac{v}{x} - p_x \qquad (3)$$

(20 Punkte für die Herleitung)

Ein Vergleich der Bedingung (3) mit der Bedingung (2) aus a) zeigt, dass eine ineffiziente Unternehmensgröße realisiert wird, da in (3)

$$\frac{\partial x}{\partial a_x}\frac{a_x}{x} < 1$$

bei Marktbereitstellung gilt.

(5 Punkte für Vergleich)

25 Punkte

d) Gilt für die Markteintrittskosten $m = 0$, so lautet die Nullgewinnbedingung im langfristigen Marktgleichgewicht:

$$p_x x - p_a a_x - p_v v = 0$$

Als Bedingung erster Ordnung für die Unternehmensgröße ergibt sich nun:

$$\frac{\partial x}{\partial a_x}\frac{a_x}{x} = 1 - \frac{\partial x}{\partial V}\frac{v}{x}$$

Da vor diesem Hintergrund ebenfalls

$$\frac{\partial x}{\partial a_x}\frac{a_x}{x} < 1$$

gilt, wird auch bei Markteintrittskosten von null keine effiziente Unternehmensgröße realisiert. Die Höhe der Markteintrittskosten spielt somit keine Rolle für die Ineffizienz der Marktbereitstellung öffentlicher Zwischenprodukte.

10 Punkte