Musterlösung zur Einsendearbeit zur Erlangung der Teilnahmeberechtigung an der Abschlussklausur zum

Kurs 00522 „Allokationstheorie“, KE2

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Ökonomie mit zwei Gütern (X und Y), zwei Produktionsfaktoren (Arbeit A und Kapital K) und zwei Konsumenten (1 und 2). Die allgemeinen Produktions- und Nutzenfunktionen seien wie folgt spezifiziert:

$$X = F(A_X; K_X)$$
$$Y = G(A_Y; K_Y)$$
$$U_1 = U_1(x_1 + \frac{\bar{x}}{2}; y_1 + \frac{\bar{y}}{2})$$
$$U_2 = U_2(x_2 + \frac{\bar{x}}{2}; y_2 + \frac{\bar{y}}{2})$$

X und Y bezeichnen die Produktionsmengen und A_X, A_Y, K_X, K_Y die Faktoreinsätze. U_1 und U_2 sind die Nutzenfunktionen der Konsumenten. Zur Sicherstellung des Existenzminimums teilt der Staat die fixen Mengen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ zu gleichen Teilen auf die Konsumenten auf. Nehmen Sie an, dass beide Konsumenten im Gleichgewicht von beiden Gütern mehr konsumieren, als ihnen vom Staat zugeteilt wird.

Die insgesamt zur Verfügung stehenden Mengen an Arbeit und Kapital seien fix und mit $\bar{A}$ bzw. $\bar{K}$ bezeichnet.

Die Produktions- und Nutzenfunktionen weisen positive aber abnehmende Grenzproduktivitäten, bzw. Grenznutzen auf.

I

a. Stellen Sie den Lagrange-Ansatz zur Bestimmung der Optimalbedingungen auf. 11 Punkte

$$
\begin{aligned}
L = {} & U_1(x_1 + \frac{\bar{x}}{2}, y_1 + \frac{\bar{y}}{2}) + \lambda[U_2(x_2 + \frac{\bar{x}}{2}, y_2 + \frac{\bar{x}}{2}) - \overline{U_2}] + \mu_A(A_x + A_y - \bar{A}) \\
& + \mu_K(K_x + K_y - \bar{K}) + \mu_x(x_1 + x_2 + \bar{x} - X) + \mu_y(y_1 + y_2 + \bar{y} - Y) \\
& + \theta_x[F(A_x, K_x) - X] + \theta_y[G(A_y, K_y) - Y]
\end{aligned}
$$

15 Punkte

b. Leiten Sie die Bedingungen erster Ordnung ab.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \mu_x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + \mu_y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \mu_x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = \lambda \frac{\partial U_2}{\partial y_2} + \mu_y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_x} = \mu_A + \theta_x \frac{\partial F}{\partial A_x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_y} = \mu_A + \theta_y \frac{\partial G}{\partial A_y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_x} = \mu_K + \theta_x \frac{\partial F}{\partial K_x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_y} = \mu_K + \theta_y \frac{\partial G}{\partial K_y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = -\mu_x - \theta_x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -\mu_y - \theta_y = 0$$

c. Im Optimum gelten die folgenden drei Bedingungen:
(NICHT ZU ZEIGEN!)

i. $-\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dy_2}{dx_2}$

ii. $-\frac{dA_Y}{dK_Y} = -\frac{dA_X}{dK_X}$

iii. $-\frac{dy_i}{dx_i} = -\frac{dY}{dX}; \quad i = 1, 2$

24 Punkte

Interpretieren Sie die Bedingungen ökonomisch.

Bedingung i:

Die Bedingung besagt, dass im Optimum die Grenzraten der Gütersubstitution für beide Konsumenten gleich sein müssen.

Bedingung ii:

Die Bedingung besagt, dass im Optimum die Grenzraten der Faktorsubstitution zwischen den beiden Sektoren und für alle Unternehmen innerhalb der Sektoren gleich sein müssen.

Bedingung iii:

Die Bedingung besagt, dass im Optimum die Grenzrate der Gütersubstitution der gesamtwirtschaftlichen Grenzrate der Transformation entsprechen muss.

II

Zur Finanzierung der Transfers an die Konsumenten besteuert der Staat den Verbrauch der beiden Konsumgüter mit den unterschiedlichen Mehrwertsteuersätzen t_x und t_y (beides Wehrsteuern).

Es gilt: $t_x = \tau \cdot t_y;\ \tau > 1$

a. Überprüfen Sie rechnerisch ob die unter I.c. genannten Bedingungen erfüllt sind. Gehen Sie davon aus, dass alle Akteure Mengenanpasser sind. 30 Punkte

Bedingung i:

Die Konsumenten maximieren Nutzen unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion:

$$L = U_i(x_i + \frac{\bar{x}}{2}, y_i + \frac{\bar{y}}{2}) + \lambda[(1+\tau t_y) p_x x_i + (1+t_y) p_y y_i - E_i]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \lambda(1+\tau t_y) p_x = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\lambda(1+\tau t_y) p_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial U_i}{\partial y_i} + \lambda(1+t_y) p_y = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U_i}{\partial y_i} = -\lambda(1+t_y) p_y$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial y_i}} = \frac{(1+\tau t_y)p_x}{(1+t_y)p_y}$$

Wegen $dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial y_i}dy_i = 0$ gilt $-\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial y_i}} = \frac{(1+\tau t_y)p_x}{(1+t_y)p_y}$. Da die Preise und die Steuern für alle Konsumenten gleich sind, ist auch $-\frac{dy_i}{dx_i}$ für alle Konsumenten gleich. Die Bedingung i. ist somit erfüllt.

Bedingung ii:

Die Gewinnmaximierung der Unternehmen führt zu

$$\pi_x = p_x F(A_x, K_x) - wA_x - rK_x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi_x}{\partial A_x} = p_x \frac{\partial F}{\partial A_x} - w = 0 \Leftrightarrow w = p_x \frac{\partial F}{\partial A_x}$$

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial K_x} = p_x \frac{\partial F}{\partial K_x} - r = 0 \Leftrightarrow r = p_x \frac{\partial F}{\partial K_x}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial F}{\partial K_x}}{\frac{\partial F}{\partial A_x}} = \frac{r}{w}$$

Das totale und gleich Null gesetzte Differential der Produktionsfunktion liefert $dF = \frac{\partial F}{\partial K_x}dK_x + \frac{\partial F}{\partial A_x}dA_x = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{dA_x}{dK_x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial K_x}}{\frac{\partial F}{\partial A_x}} = \frac{r}{w}$$

Analog lässt sich für den Y-Sektor der Ausdruck $-\frac{dA_y}{dK_y} = \frac{\frac{\partial G}{\partial K_y}}{\frac{\partial G}{\partial A_y}} = \frac{r}{w}$ ermitteln. Da der Lohn- und Zinssatz für alle Unternehmen gleich ist, ist auch die Bedingung ii erfüllt.

Bedingung iii:

Die totalen Differentiale der beiden Produktionsfunktionen sind

$$dX = dF = \frac{\partial F}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F}{\partial A_x} dA_x$$
$$dY = dG = \frac{\partial G}{\partial K_y} dK_y + \frac{\partial G}{\partial A_y} dA_y$$

Berücksichtigt man, dass die Bestände der beiden Produktionsfaktoren fest vorgegeben sind, so lässt sich dX schreiben als $dX = -\frac{\partial F}{\partial K_x} dK_y - \frac{\partial F}{\partial A_x} dA_y$. Dividiert man die beiden Ausdrücke, so erhält man einen Ausdruck für die Grenzrate der Transformation.

$$-\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial G}{\partial K_y} dK_y + \frac{\partial G}{\partial A_y} dA_y}{\frac{\partial F}{\partial K_x} dK_y + \frac{\partial F}{\partial A_x} dA_y}$$
$$= \frac{\frac{\partial G}{\partial A_y}\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial K_y}}{\frac{\partial G}{\partial A_y}} dK_y + dA_y\right)}{\frac{\partial F}{\partial A_x}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial K_x}}{\frac{\partial F}{\partial A_x}} dK_y + dA_y\right)}$$
$$= \frac{\frac{w}{p_y}\left(\frac{r}{w} dK_y + dA_y\right)}{\frac{w}{p_x}\left(\frac{r}{w} dK_y + dA_y\right)}$$
$$= \frac{p_x}{p_y}$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich kleiner als derjenige für die Grenzrate der Gütersubstitution. Die Bedingung iii ist daher nicht erfüllt.

b. Wie ändert sich Ihre Antwort, wenn $\tau = 1$ gelten würde? 5 Punkte

Durch die Änderung von τ ändert sich nichts an der Gültigkeit der ersten beiden Bedingungen. Allerdings würde der Ausdruck für $-\frac{dy_i}{dx_i}$ zu $\frac{(1+t_y)p_x}{(1+t_y)p_y} = \frac{p_x}{p_y}$. Dies entspricht dem Ausdruck für die Grenzrate der Transformation. Die Bedingung iii wäre im Falle von $\tau = 1$ also auch erfüllt.

15 Punkte

c. Stellen Sie die Situation für $\tau > 1$ grafisch dar. Die Bedingung ii. kann dabei vernachlässigt werden.