Musterlösung zur Einsendearbeit zur Erlangung der Teilnahmeberechtigung an der Abschlussklausur zum

Kurs 00522 „Allokationstheorie“, KE2

Wintersemester 2010/11

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Ökonomie mit zwei Individuen (1 und 2), zwei Konsumgütern (X und Y) und zwei Produktionsfaktoren (Arbeit A und Kapital K). Der Kapitelstock $\overline{K}$ sei fest vorgegeben. Den Individuen steht jeweils ein Zeitkontingent $\overline{T}_i,\ i=1;2$ zur Verfügung, welches sie in Freizeit F_i und Arbeitsangebot A_i aufteilen. Das gesamte Arbeitsangebot A ist somit variabel.

Die Nutzenfunktion der Individuen sei $U_i = U_i\left(x_i, y_i, F_i\right)$, wobei positive aber abnehmende Grenznutzen für den Konsum der Güter, wie für die Freizeit angenommen werden.

Die Produktionsfunktionen seien $X = F\left(A_X, K_X\right)$ und $Y = G\left(A_Y, K_Y\right)$, wobei positive aber abnehmende Grenzproduktivitäten unterstellt werden.

I.

a) Stellen Sie das Optimierungsproblem zur Ermittlung der Bedingungen für ein Pareto-Optimum auf. 10 Punkte

$$\boxed{\begin{aligned} L = {} & U_1(x_1, y_1, F_1) + \lambda[U_2(x_2, y_2, F_2) - \overline{U_2}] + \mu_A(A_X + A_Y + F_1 + F_2 - \overline{T}) \\ & + \mu_K(K_X + K_Y - \overline{K}) + \mu_X(x_1 + x_2 - X) + \mu_Y(y_1 + y_2 - Y) \\ & + \theta_X[F(A_X, K_X) - X] + \theta_Y[G(A_Y, K_Y) - Y] \end{aligned}}$$

20 Punkte

b) Leiten Sie die Bedingungen erster Ordnung ab.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \mu_X = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + \mu_Y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_1} = \frac{\partial U_1}{\partial F_1} + \mu_A = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \mu_X = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = \lambda \frac{\partial U_2}{\partial y_2} + \mu_y = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_2} = \lambda \frac{\partial U_2}{\partial F_2} + \mu_A = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_X} = \mu_A + \theta_X \frac{\partial F}{\partial A_X} = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_Y} = \mu_A + \theta_Y \frac{\partial G}{\partial A_Y} = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_X} = \mu_K + \theta_X \frac{\partial F}{\partial K_X} = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_Y} = \mu_K + \theta_Y \frac{\partial G}{\partial K_Y} = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = -\mu_X - \theta_X = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -\mu_Y - \theta_Y = 0 \qquad (12)$$

10 Punkte

c) Zeigen Sie, wie sich aus den Produktions- und Nutzenfunktionen Ausdrücke für die Grenzraten der (Güter- und Faktor-) Substitution herleiten lassen.

Nutzenfunktion:

$$dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U_i}{\partial F_i} dF_i = 0$$

$\Rightarrow$

• für $dF_i = 0$:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} dy_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_i} dx_i = -\frac{\partial U_i}{\partial y_i} dy_i$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dy_i}{dx_i}\bigg|_{F_i=\overline{F_i}} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial y_i}}$$

- für $dy_i = 0$:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial F_i} dF_i = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial U_i}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial U_i}{\partial F_i} dF_i$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dx_i}{dF_i}\bigg|_{y_i=\overline{y_i}} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial F_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}$$

- für $dx_i = 0$:

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U_i}{\partial F_i} dF_i = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial U_i}{\partial y_i} dy_i = \frac{\partial U_i}{\partial F_i} dF_i$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dy_i}{dF_i}\bigg|_{x_i=\overline{x_i}} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial F_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial y_i}}$$

Produktionsfunktionen:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial A_X} dA_X + \frac{\partial F}{\partial K_X} dK_X = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial F}{\partial A_X} dA_X = \frac{\partial F}{\partial K_X} dK_X$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dA_X}{dK_X} = \frac{\frac{\partial F}{\partial K_X}}{\frac{\partial F}{\partial A_X}}$$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial A_Y} dA_Y + \frac{\partial G}{\partial K_Y} dK_Y = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial G}{\partial A_Y} dA_Y = \frac{\partial G}{\partial K_Y} dK_Y$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dA_Y}{dK_Y} = \frac{\frac{\partial G}{\partial K_Y}}{\frac{\partial G}{\partial A_Y}}$$

30 Punkte

d) Zeigen Sie, dass für ein Pareto-Optimum die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen:

i. $$-\frac{dy_1}{dx_1}\Big|_{F_1=\overline{F_1}} = -\frac{dy_2}{dx_2}\Big|_{F_2=\overline{F_2}}, \quad -\frac{dy_1}{dF_1}\Big|_{x_1=\overline{x_1}} = -\frac{dy_2}{dF_2}\Big|_{x_2=\overline{x_2}}, \quad -\frac{dx_1}{dF_1}\Big|_{y_1=\overline{y_1}} = -\frac{dx_2}{dF_2}\Big|_{y_2=\overline{y_2}}$$

ii. $$-\frac{dA_X}{dK_X} = -\frac{dA_Y}{dK_Y}$$

iii. $$-\frac{dy_i}{dx_i}\Big|_{F_i=\overline{F_i}} = -\frac{dY}{dX}, \quad -\frac{dy_i}{dF_i}\Big|_{x_i=\overline{x_i}} = \frac{\partial G}{\partial A_Y}, \quad -\frac{dx_i}{dF_i}\Big|_{y_i=\overline{y_i}} = \frac{\partial F}{\partial A_X}$$

Bedingung i:

(1)/(2) = (4)/(5):

$$\frac{\mu_X}{\mu_Y} = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial U_1}{\partial y_1}} = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\frac{\partial U_2}{\partial y_2}} = -\frac{dy_i}{dx_i}\Big|_{F_i=\overline{F_i}} \quad ; \ i = 1,2$$

(3)/(2) = (6)/(5)

$$\frac{\mu_A}{\mu_Y} = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial F_1}}{\frac{\partial U_1}{\partial y_1}} = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial F_2}}{\frac{\partial U_2}{\partial y_2}} = -\frac{dy_i}{dF_i}\Big|_{x_i=\overline{x_i}} \quad ; \ i = 1,2$$

(3)/(1) = (6)/(4)

$$\frac{\mu_A}{\mu_X} = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial F_1}}{\frac{\partial U_1}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial F_2}}{\frac{\partial U_2}{\partial x_2}} = -\frac{dx_i}{dF_i}\Big|_{y_i=\overline{y_i}} \quad ; \ i = 1,2$$

Bedingung ii:

(10)/(8) = (9)/(7)

$$\frac{\mu_K}{\mu_A} = \frac{\frac{\partial G}{\partial K_y}}{\frac{\partial G}{\partial A_y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial K_x}}{\frac{\partial F}{\partial A_x}} = -\frac{dA_i}{dK_i}; \ i = Y, X$$

Bedingung iii:

Es gilt $\frac{\mu_X}{\mu_Y} = -\frac{dy_i}{dx_i}\Big|_{F_i=\overline{F_i}}$

(11)/(12):

$$\frac{\mu_X}{\mu_Y} = \frac{\theta_X}{\theta_Y}$$

$$-\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial G}{\partial A_Y} dA_Y + \frac{\partial G}{\partial K_Y} dK_Y}{\frac{\partial F}{\partial A_X} dA_Y + \frac{\partial F}{\partial K_X} dK_Y}$$

$$= \frac{\frac{\partial G}{\partial A_Y}}{\frac{\partial F}{\partial A_X}} \frac{dA_Y + \cancel{\frac{\partial G / \partial K_Y}{\partial G / \partial A_Y}} dK_Y}{dA_Y + \cancel{\frac{\partial F / \partial K_X}{\partial F / \partial A_X}} dK_Y}$$

$$= \frac{\frac{\partial G}{\partial A_Y}}{\frac{\partial F}{\partial A_X}}$$

(7) = (8):

$$\theta_X \frac{\partial F}{\partial A_X} = \theta_Y \frac{\partial G}{\partial A_Y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta_X}{\theta_Y} = \frac{\frac{\partial G}{\partial A_Y}}{\frac{\partial F}{\partial A_X}}$$

Somit ist:

$$-\frac{dY}{dX} = \frac{\theta_X}{\theta_Y} = \frac{\mu_X}{\mu_Y} = -\frac{dy_i}{dx_i}\bigg|_{F_i=\overline{F_i}}$$

Aus (8):

$$\frac{\partial G}{\partial A_Y} = -\frac{\mu_A}{\theta_Y} \qquad \Big| \text{aus (12) } \theta_Y = -\mu_Y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial A_Y} = \frac{\mu_A}{\mu_Y} = -\frac{dy_i}{dF_i}\bigg|_{x_i=\overline{x_i}}$$

Aus (7):

$$\frac{\partial F}{\partial A_X} = -\frac{\mu_A}{\theta_X} \qquad \Big| \text{aus (11) } \theta_X = -\mu_X$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial A_X} = \frac{\mu_A}{\mu_X} = -\frac{dx_i}{dF_i}\bigg|_{y_i=\overline{y_i}}$$

30 Punkte

II. Nehmen Sie an die Regierung erwäge zur Generierung von Steuereinnahmen die Einführung einer Pauschalsteuer S oder die Einführung einer proportionalen Lohnsteuer t – es gilt dann $p_A^b = (1+t)\,p_A^n$ mit p_A^b als Bruttolohn und p_A^n als Nettolohn. Welche Steuer ist unter dem Gesichtspunkt der Allokationseffizienz zu wählen? Erläutern Sie dazu den Einfluss der Steuern auf die unter Aufgabe **I**.d) genannten Bedingungen. Gehen Sie davon aus, dass alle am Markt agierenden Unternehmen und Individuen Preisnehmer sind. Argumentieren Sie verbal.

Lohnsteuer:

Da alle Individuen Preisnehmer sind, werden sich die Preisverhältnisse, welche sich aus der Nutzenmaximierung der Individuen als Ausdrücke für Grenzraten der Substitution ergeben für alle Individuen gleich sein. Die in i. genannten Bedingungen wären somit erfüllt. Gleiches gilt für die Unternehmen, weshalb die Bedingung unter ii. erfüllt ist. Die Steuer bewirkt nur einen Unterschied zwischen Brutto- und Nettolohn, aber hat keine Auswirkungen auf die Güterpreise. Daher ist die Abstimmung zwischen der individuellen Grenzrate der Substitution der Konsumgüter und der Grenzrate der Transformation, welche über die Güterpreise erfolgt, nicht von der Steuer betroffen. Für die beiden anderen unter iii. genannten Bedingungen gilt dies allerdings nicht, da das Grenzprodukt der Arbeit dem Realbruttolohn entspricht, während sich die Grenzraten der Substitution zwischen der Freizeit und je einem der beiden Konsumgüter am Nettolohn orientieren. Die Lohnsteuer verhindert daher ein Pareto-Optimum.

Pauschalsteuer:

Die Pauschalsteuer wirkt wie eine exogene Verminderung des Einkommens, auf die der Haushalt keinen Einfluss hat. Im Zuge der Nutzenmaximierung der Haushalte wird sie in den Optimalbedingungen, welche zur Ermittlung der Ausdrücke für die unter I.d) genannten Bedingungen dienen, nicht berücksichtigt. Da die Unternehmen die Steuer ebenfalls nicht berücksichtigen, ist sie allokationsneutral.

Aus Allokationsgesichtspunkten sollte die Regierung die Pauschalsteuer einführen.