Musterlösung zur Einsendearbeit zum Kurs 00692, KE 1, „Theorie der öffentlichen Konsumgüter“, Wintersemester 2010/11

Aufgabe 1 – Öffentliche Konsumgüter

a)

Die Bowen-Samuelson-Bedingung lautet im Falle zweier Konsumenten:

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial y}}{\frac{\partial U_1}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial U_2}{\partial y}}{\frac{\partial U_2}{\partial x_2}} = -\frac{dX}{dY}$$

Auf Grund der identischen Nutzenfunktionen ergibt sich für die Ableitungen:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{x_1^{0,5}}{2y^{0,5}} \qquad bzw. \qquad \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{x_2^{0,5}}{2y^{0,5}}$$

sowie

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{y^{0,5}}{2x_1^{0,5}} \qquad bzw. \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{y^{0,5}}{2x_2^{0,5}} \quad .$$

Weiter muss die Produktionsfunktion nach Y abgeleitet werden, um

$$-\frac{dX}{dY} = 2$$

zu erhalten. Setzt man die Ergebnisse schließlich in die Bowen-Samuelson-Bedingung ein, so gilt für die pareto-optimale Menge des öffentlichen Gutes:

$$y^* = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{X}{2}$$

30 Punkte

b)

Herleitung der individuellen Reaktionsfunktionen wie folgt.

$L_1 = x_1^\alpha * (y_1 + y_2)^\beta + \mu_1(\bar{E}_1 - \bar{p}_x * x_1 - \bar{p}_y * y_1)$ → Lagrangefunktion für Ind. 1

Ableitung der Lagrangefunktion nach x_1, y_1 sowie μ_1 und Nullsetzen:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1}: \quad \alpha x_1^{\alpha-1} * (y_1 + y_2)^\beta - \mu_1 * \bar{p}_x = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y_1}: \quad \beta * (y_1 + y_2)^{\beta-1} * x_1^\alpha - \mu_1 * \bar{p}_y = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mu_1}: \quad \bar{E}_1 - \bar{p}_x * x_1 - \bar{p}_y * y_1 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Aus (I) und (II) folgt:

$$\frac{\bar{p}_x}{\bar{p}_y} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} * (y_1 + y_2)^\beta}{\beta * (y_1 + y_2)^{\beta-1} * x_1^\alpha}$$

Aus (III) folgt:

$$\frac{\bar{p}_x}{\bar{p}_y} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{p}_y * x_1} - \frac{y_1}{x_1}$$

Setzt man nun diese beiden Ausdrücke gleich und stellt um, so erhält man:

$$y_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\frac{\bar{E}_1}{\bar{p}_y} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_2$$

Somit ergibt sich die Reaktionsfunktion für das Individuum 1. Für das zweite Individuum erfolgt die Herleitung analog und man erhält:

$$y_2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\frac{\bar{E}_2}{\bar{p}_y} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_1$$

Setzt man nun die erforderlichen Werte in die beiden Gleichungen ein, so erhält man:

$$y_1 = 6 - \frac{1}{2} y_2 \qquad bzw. \qquad y_2 = 4 - \frac{1}{2} y_1$$

Anhand der beiden Gleichungen kann nun die Menge für das öffentliche Gut im Marktgleichgewicht ermittelt werden:

$$y_1 = 6 - \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{2}y_1\right) \qquad |\ y_2\ in\ y_1\ eingesetzt$$

$$y_1 = 5{,}33$$

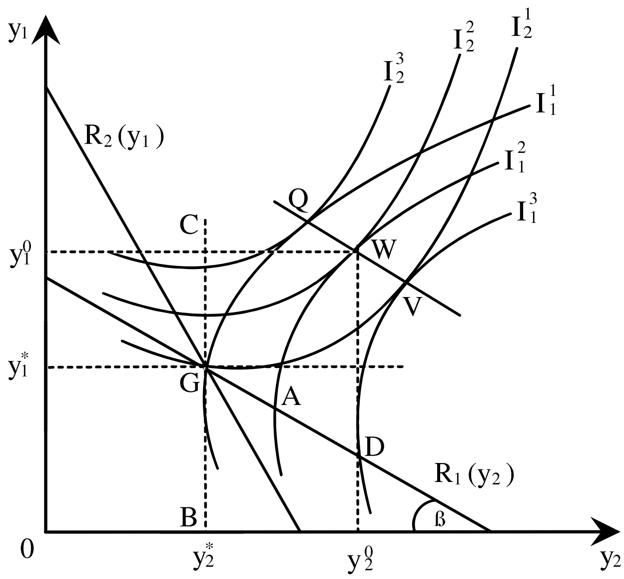
Setzt man dies in die Gleichung für y_2 ein ergibt sich:

$$y_2 = 1{,}33$$

Für die im Marktgleichgewicht bereitgestellte Menge des öffentlichen Gutes bekommt man also:

$$Y = y_1 + y_2 = 6{,}66$$

Skizze (S.14, Skript):



Das Markt-Gleichgewicht ergibt sich im Schnittpunkt G der beiden Reaktionsfunktionen. Dieser Punkt kann nicht effizient sein, da die GRS der beiden Konsumenten ungleich sind. Anhand der Indifferenzkurven lässt sich zeigen, dass Nutzengewinne mindestens eines Individuums möglich sind, ohne den Nutzen des anderen Individuums zu verringern.

60 Punkte

c)

Verglichen werden soll die Bowen-Samuelson-Bedingung (bei 2 Konsumenten)

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial y}}{\frac{\partial U_1}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial U_2}{\partial y}}{\frac{\partial U_2}{\partial x_2}} = -\frac{dX}{dY}$$

mit der Bedingung erster Ordnung bei einer Marktbereitstellung des öffentlichen Gutes (bei 2 Konsumenten)

$$\frac{1}{2} * \left[\frac{\frac{\partial U_1}{\partial y}}{\frac{\partial U_1}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial U_2}{\partial y}}{\frac{\partial U_2}{\partial x_2}}\right] = -\frac{dX}{dY}$$

Interpretiert man die Summe der individuellen GRS als Summe der „Zahlungsbereitschaften“ für das öffentliche Gut, so sieht man, dass die gesamte „Zahlungsbereitschaft“ bei einer privaten Bereitstellung des Gutes größer sein muss als die „Kosten“ für das öffentliche Gut, repräsentiert durch die GRT. Die Konsumenten wären also bereit mehr für das öffentliche Gut zu „zahlen“, als dieses „kostet“ (jeweils in Einheiten des privaten Gutes). Durch eine Erhöhung der Menge des öffentlichen Gutes ließe sich der gesamte Nutzen also steigern (bis Summe GRS=GRT, wie durch die Bowen-Samuelson-Bedingung charakterisiert, also die gesamte „Zahlungsbereitschaft“ für das öffentliche Gut den „Kosten“ entspricht). Folglich kann die Situation nicht effizient sein und es kommt zu einer Unterversorgung mit dem öffentlichen Gut bei Marktbereitstellung. Der Grund dafür ist, dass die Existenz des öffentlichen Gutes eine positive Externalität darstellt. Das Individuum 1 berücksichtigt bei seiner Entscheidung lediglich die Menge y_1 als Kontrollvariable. Dabei führt die Menge y_2 auch zu einem Nutzen für Individuum 1, da unweigerlich die Menge Y konsumiert wird. Diesen externen Effekt berücksichtigt das Individuum 1 nicht bei seiner Entscheidung über die Menge des öffentlichen Gutes. Schließlich fällt auch die Zahlungsbereitschaft von Individuum 1 für das öffentliche Gut zu gering aus. Analog lässt sich natürlich für das zweite Individuum argumentieren.

10 Punkte