Musterlösung zur Einsendearbeit zum Kurs 00692, KE 2, „Theorie der öffentlichen Zwischenprodukte“, Wintersemester 2010/2011

a) Nutzenmöglichkeitsgrenze und Pareto-Optima:

Aus

$$nc_r + mc_a = C = X - R = \bar{A} + \sqrt{c_a} + \sqrt{R} - R$$

erhält man

$$c_r = \frac{\bar{A} + \sqrt{c_a} + \sqrt{R} - R - mc_a}{n}$$

Zur Ermittlung der Nutzen- bzw. Konsummöglichkeitengrenze und der Pareto-Optima maximieren wir den Nutzen bzw. Konsum c_r eines repräsentativen reichen Einwohners für gegebenen Nutzen bzw. Konsum $\bar{c}_a$ eines repräsentativen armen Einwohners, indem wir bestimmen, welcher Anteil der Produktion in Maßnahmen R zur Stabilisierung des Marktsystems zu investieren ist:

$$c_r = \frac{\bar{A} + \sqrt{\bar{c}_a} + \sqrt{R} - R - m\bar{c}_a}{n} \to \max_R.$$

Die Bedingung erster Ordnung[1] lautet:

$$\frac{dc_r}{dR} = \frac{1}{2n\sqrt{R}} - \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad R^* = \frac{1}{4} \quad .$$

Somit erhält man als Konsummöglichkeitengrenze:

$$c_r{}^* = \frac{\bar{A} + \sqrt{c_a} + \sqrt{R^*} - R^* - mc_a}{n} = \frac{\bar{A} + \sqrt{c_a} - mc_a + 0{,}25}{n}$$

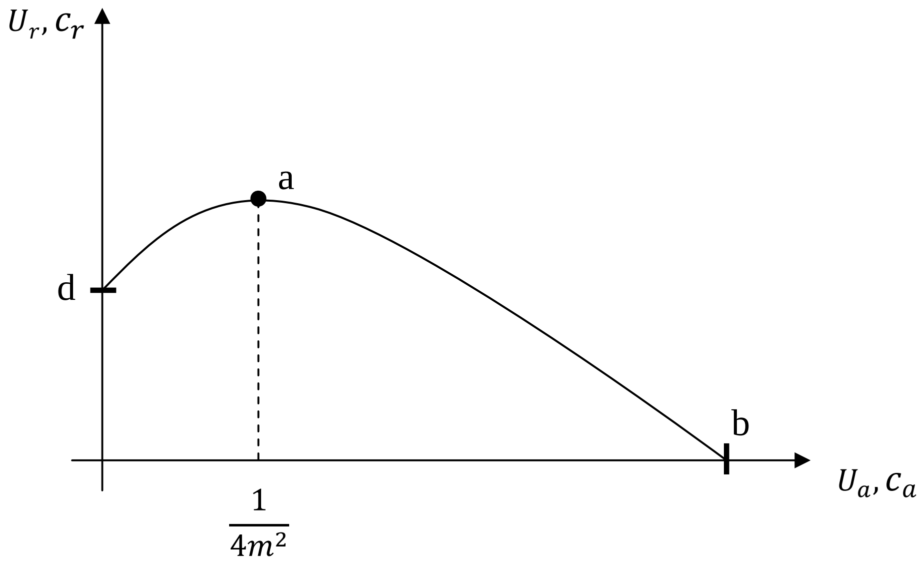
bzw. wegen $U_r = c_r$ und $U_a = c_a$ als Nutzenmöglichkeitsgrenze

[1] Die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung für ein Maximum ist erfüllt: $\frac{d^2c_r}{dR^2} = -\frac{1}{4nR^{1,5}} < 0$.

$$U_r = \frac{\bar{A} + \sqrt{U_a} - mU_a + 0{,}25}{n}$$

Sie ist streng konkav und hat ein Maximum bei $U_a = c_a = \frac{1}{4m^2}$:

10 Punkte



10 Punkte

Die Linie „ab“ gibt die gesuchten Pareto-Optima an.

5 Punkte

b) Staatlich organisiertes System: Alle n reichen Konsumenten mit Faktoreinkommen X/n beteiligen sich mit einem gleichen Betrag z pro Kopf an der Finanzierung der Transfers und Repressionsmaßnahmen. Das staatliche Budget ist somit ausgeglichen, wenn

$$mc_a + R = zn \qquad (1)$$

gilt. Die Parteien maximieren den Nutzen des Medianwählers. Dies ist ein (repräsentativer) reicher Einwohner mit der Budgetbedingung

$$\frac{X}{n} = c_r + z$$

Einsetzen von (1) und $X = \bar{A} + \sqrt{c_a} + \sqrt{R}$ sowie Umformen ergibt für den Nutzen bzw. Konsum des Medianwählers

$$c_r = \frac{\bar{A} + \sqrt{c_a} + \sqrt{R} - mc_a - R}{n} \quad .$$

Maximieren über c_a und R ergibt die Bedingungen[2]

$$\frac{\partial c_r}{\partial R} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{R}} - 1\right) = 0$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial c_a} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{c_a}} - m\right) = 0$$

aus denen man

$$R^+ = 0{,}25$$

$$c_a^+ = \frac{1}{4m^2}$$

25 Punkte

erhält. In der Abbildung wird der Punkt „a“ erreicht. Dies ist ein Pareto-Optimum und zwar dasjenige mit dem höchsten Nutzenniveau der reichen Einwohner.

5 Punkte

[2] Die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum sind erfüllt.

c) **Freiwillige Transfers:** Die staatliche Organisation der Repressionsmaßnahmen sorgt annahmegemäß für ein effizientes Niveau dieser Maßnahmen:

$$R = R^* = 0{,}25.$$

Jeder Reiche trägt ein n-tel der dadurch entstehenden Kosten. Somit lautet sein Budget

$$\frac{X}{n} = c_r + \frac{R^*}{n} + s_i = c_r + \frac{1}{4n} + s_i \qquad (2)$$

Hier bezeichnet s_i den Beitrag, den er als Transfer an die arme Bevölkerung geben will. Das Konsumniveau der armen Bevölkerung erhält man als Gesamttransfer pro Kopf der armen Bevölkerung

$$c_a = \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{m}$$

Für die Produktionsmöglichkeiten gilt

$$X = \bar{A} + \sqrt{c_a} + \sqrt{R}$$

Setzt man die beiden Gleichungen in (2) ein, so folgt für das Entscheidungsproblem des reichen Einwohners

$$c_r = \frac{X}{n} - \frac{1}{4n} - s_i = \frac{\bar{A} + \sqrt{c_a} + \sqrt{R}}{n} - \frac{1}{4n} - s_i$$

$$= \frac{\bar{A} + \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{m}} + 0{,}5}{n} - \frac{1}{4n} - s_i$$

$$= \frac{\bar{A} + \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{m}}}{n} + \frac{1}{4n} - s_i \rightarrow \max_{s_i}.$$

Der Einwohner maximiert seinen Nutzen bzw. Konsum durch Wahl von s_i. Die Beiträge s_j der übrigen Konsumenten betrachtet er als gegeben. Als Bedingung erster Ordnung erhält man[3]

$$\frac{\partial c_r}{\partial s_i} = \frac{1}{2nm\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{m}}} - 1 = \frac{1}{2nm\sqrt{c_a}} - 1 = 0\,.$$

Hieraus folgt

$$\hat{c}_a = \frac{1}{4n^2m^2}\ .$$

25 Punkte

Bei $n = 1$, also nur einem Reichen, erhält man $\hat{c}_a = \frac{1}{4m^2} = c_a^+$ und man landet im Punkt „a“ der Abbildung aus Aufgabenteil a).

Anders sieht es aus, wenn es mehr als nur einen reichen Einwohner gibt, also $n > 1$ gilt. Die Transferzahlungen wirken wie ein öffentliches Zwischenprodukt. Bei der Festlegung von s_i berücksichtigt der reiche Einwohner i nicht, dass sein Transfer auch die Einkommen der übrigen Reichen erhöht. Daher werden zu wenig Transfers an die arme Bevölkerung gezahlt. Es wird kein Pareto-Optimum erreicht. Wegen

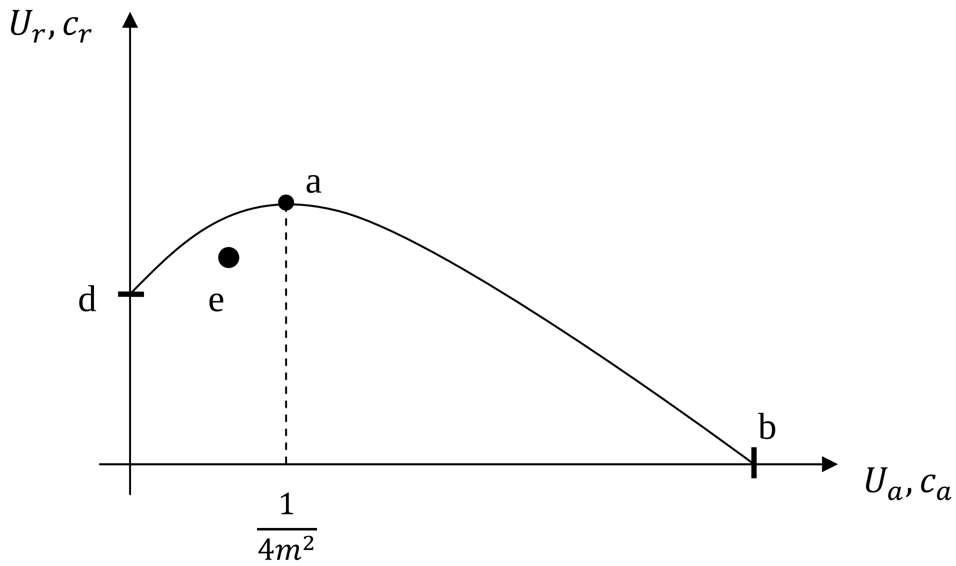
$$\hat{c}_a = \frac{1}{4n^2m^2} < \frac{1}{4m^2} = c_a^+$$

wird in der Abbildung ein Punkt links von „a“ erreicht. Da der Staat für ein effizientes Niveau der Repressionsmaßnahmen sorgt, landet man in einem Punkt auf der Kurve zwischen „d“ und „a“.

10 Punkte

[3] Die hinreichende Bedingung für ein Maximum ist erfüllt.

d) In diesem Modell gibt es zwei öffentliche Zwischenprodukte. Dies sind zum einen die Transfers an die armen Einwohner, die stabilisierend auf das Marktgeschehen wirken. Zum anderen sind dies aber auch die Investitionen R in sonstige Maßnahmen, die die Funktionsfähigkeit des Systems sichern sollen. Wenn die n reichen Einwohner jeweils für sich entscheiden, wie viel sie zu dem einen oder dem anderen dieser öffentlichen Zwischenprodukte beitragen sollen, wird von beiden Zwischenprodukten zu wenig bereitgestellt. Es liegt hier somit eine doppelte Ineffizienz vor. Zunächst sind die Transferleistungen zu gering (daher landet man in der Abbildung links von Punkt „a“). Ferner wird in die weiteren Maßnahmen zur Sicherung der Funktionsfähigkeit des Marktsystems zu wenig investiert. Daher wird ein Punkt unterhalb der Kurve erreicht. In der Abbildung ist dieser mit „e“ bezeichnet.



10 Punkte