Musterlösung zur Einsendearbeit 00692, KE 2, Theorie der öffentlichen Zwischenprodukte, Wintersemester 2009/2010

a) Konsummöglichkeitengrenze und Pareto-Optima:

Aus

$$nc_r + mc_a = C = X = \bar{A}\sqrt{c_a}$$

erhält man

$$c_r = \frac{\bar{A}\sqrt{c_a} - mc_a}{n}.$$

Damit erhält man für die Konsummöglichkeitengrenze:

$$c_r = c_r(c_a) = \frac{1}{n}\left[\bar{A}\sqrt{c_a} - mc_a\right]$$ 14 Punkte

Für ihre Steigung gilt:

$$\frac{dc_r}{dc_a} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}\bar{A}c_a^{-\frac{1}{2}} - m\right].$$

Bestimmung des Maximums:

$$\frac{dc_r}{dc_a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\bar{A}c_a^{-\frac{1}{2}} - m = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_a^{-\frac{1}{2}} = \frac{2m}{\bar{A}}$$

$$\Rightarrow \quad c_a = \left(\frac{2m}{\bar{A}}\right)^{-2} = \frac{\bar{A}^2}{4m^2}$$

10 Punkte

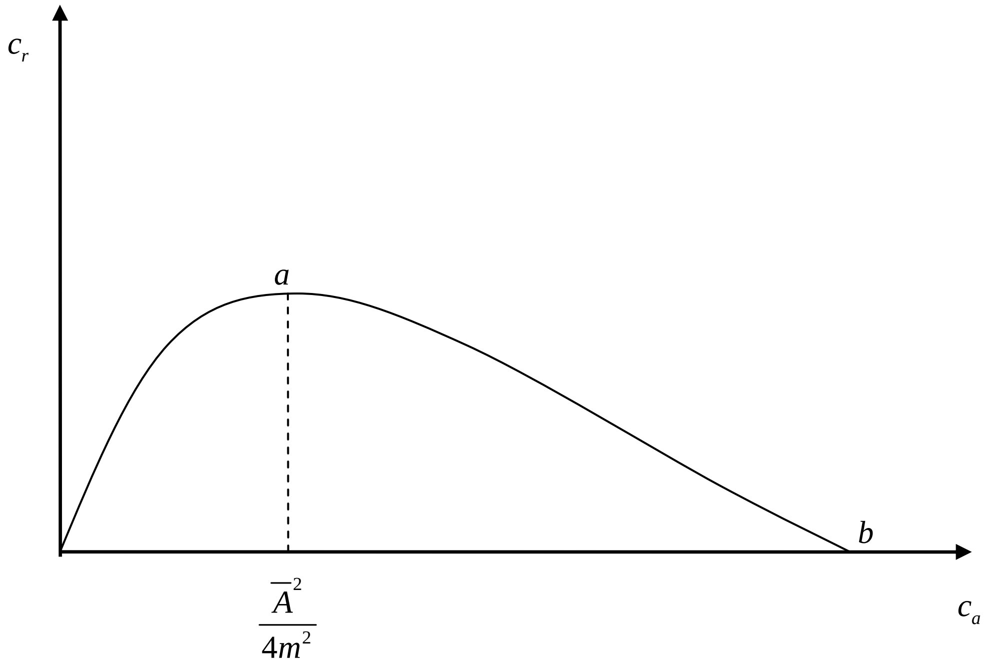
Bestimmung der Bedingung 2. Ordnung für ein Maximum:

$$\frac{\partial\left(\frac{dc_r}{dc_a}\right)}{\partial c_a} = -\frac{1}{4n}\bar{A}c_a^{-\frac{3}{2}} < 0$$

Die Konsummöglichkeitengrenze verläuft streng konkav. Die Bedingung 2. Ordnung für ein Maximum ist erfüllt.

6 Punkte

Grafische Darstellung:



Die Linie "ab" gibt die gesuchten Pareto-Optima an.

20 Punkte

b) Freiwillige Transfers: Wir analysieren das Entscheidungsproblem eines typischen reichen Einwohners. Dieser Einwohner erhält als Einkommen $^1/_n$-tel der Produktion, das er selbst konsumieren (c_r) oder als Transfer (s_i) an die arme Bevölkerung geben kann:

(1) $\frac{X}{n} = c_r + s_i$.

14 Punkte

Für die Produktionsmöglichkeiten gilt:

(2) $X = \overline{A}\sqrt{c_a}$.

Das Konsumniveau der armen Bevölkerung erhält man als Gesamttransfer pro Kopf der armen Bevölkerung

(3) $c_a = \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{m}$

14 Punkte

Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so folgt für das Entscheidungsproblem des reichen Einwohners

$$c_r = \frac{X}{n} - s_i = \frac{\overline{A}\sqrt{c_a}}{n} - s_i = \frac{\overline{A}\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{m}}}{n} - s_i \quad \rightarrow \quad \max_{s_i}.$$

Der Einwohner maximiert seinen Konsum (und damit seinen Nutzen) durch Wahl von s_i. Als Bedingungen erster Ordnung erhält man[1]

$$\frac{\partial c_r}{\partial s_i} = \frac{\overline{A}}{2nm\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{m}}} - 1 = \frac{\overline{A}}{2nm\sqrt{c_a}} - 1 = 0 .$$

Auflösen nach dem Konsum der armen Einwohner ergibt:

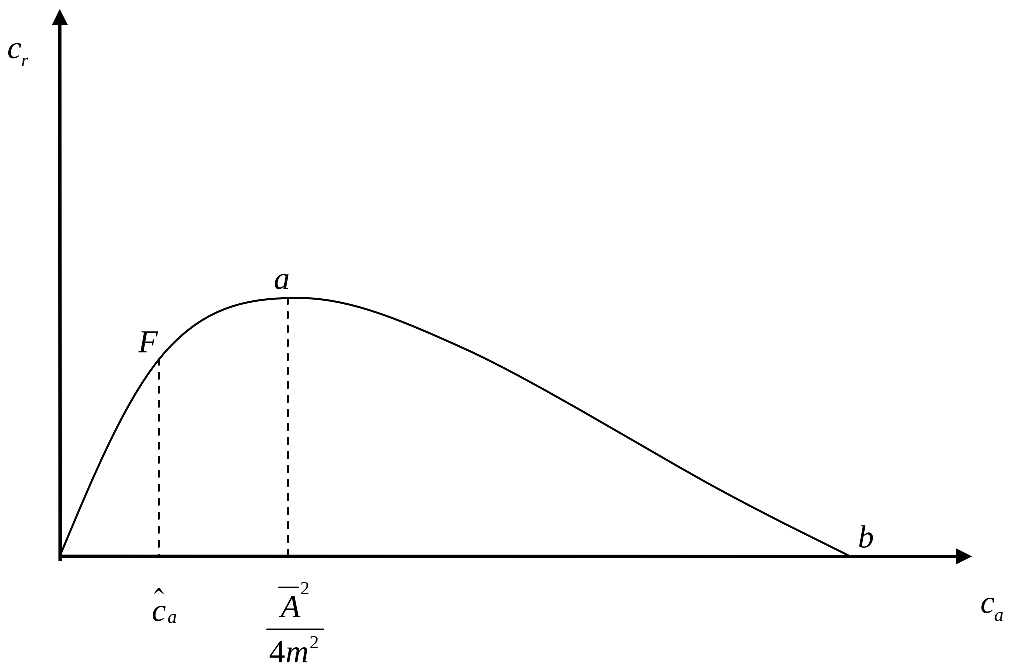
$$\hat{c}_a = \frac{\overline{A}^2}{4n^2m^2}$$

14 Punkte

[1] Die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung für ein Maximum sind erfüllt.

Bei n=1, also nur einem Reichen, landet man im Punkt a. Anders sieht es aus, wenn es mehr als nur einen reichen Einwohner gibt, also $n > 1$ gilt.

In diesem Modell kann das öffentliche Zwischenprodukt c_a stabilisierend auf das Marktgeschehen wirken. Wenn die n reichen Einwohner jeder für sich entscheiden, wieviel sie zu dem öffentlichen Zwischenprodukt beitragen sollen, wird zu wenig bereitgestellt. Es liegt hier eine Ineffizienz und die Transfers sind zu gering: Es gilt nämlich $\hat{c}_a < \frac{\overline{A}^2}{4m^2}$, so dass man in der Abbildung *links* von Punkt *a* landet. In der Abbildung wurde dieser Punkt mit *F* bezeichnet.



8 Punkte