Musterlösung zur Einsendearbeit zum Kurs 0693, KE 1, „Theorie der Kollektivgüter II“, Wintersemester 2006/2007

a)

Die Maximierungsaufgabe lautet:

$$\begin{aligned}
&\max_{T_i}: \quad U(x_i, y_i),\\
&udN: \quad F_i^N\left[K_i(T_i,\bar{T}_j), \bar{N}_i\right] = w_i,\\
&\qquad F_i^K\left[K_i(T_i,\bar{T}_j), \bar{N}_i\right] = r(T_i,\bar{T}_j) + T_i,\\
&\qquad E_i = w_i + r\left(T_i,\bar{T}_j\right)\frac{\bar{K}_i}{\bar{N}_i},\\
&\qquad E_i = x_i,\\
&\qquad y_i = T_i \cdot K_i(T_i,\bar{T}_j).
\end{aligned}$$

Einsetzen der Nebenbedingungen in die Zielfunktion liefert:

$$\max_{T_i} \quad U\left\{\frac{1}{\bar{N}_i}\left\{F\left[K_i(T_i,\bar{T}_j), \bar{N}_i\right] + r(T_i,\bar{T}_j)\cdot\left[\bar{K}_i - K_i(T_i,\bar{T}_j)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left. -T_i \cdot K_i(T_i,\bar{T}_j)\right\}, T_i \cdot K_i(T_i,\bar{T}_j)\right\}.$$

15 Punkte

b)

Die Bedingung erster Ordnung für ein Maximum erhält man durch Nullsetzen der ersten Ableitung nach T_i:

$$\frac{1}{\bar{N}_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left\{F_i^K\frac{\partial K_i}{\partial T_i} + \frac{\partial r}{\partial T_i}\left(\bar{K}_i - K_i\right) - r\frac{\partial K_i}{\partial T_i} - T_i\frac{\partial K_i}{\partial T_i} - K_i\right\}$$

$$+\ \frac{\partial U}{\partial y_i}\left\{K_i + \frac{\partial K_i}{\partial T_i}T_i\right\} = 0.$$

Verwendung der Gewinnmaximierungsbedingung der Unternehmen (2.10) führt zu:

$$(2.23)\quad \bar{N}_i \frac{\frac{\partial U}{\partial y_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_i}} = \frac{1 - \frac{1}{K_i}\frac{\partial r}{\partial T_i}\left(\bar{K}_i - K_i\right)}{1 + \frac{\partial K_i}{\partial T_i}\frac{T_i}{K_i}}$$

15 Punkte

c)

In der Bedingung erster Ordnung für ein Maximum (2.23) gilt:

$\frac{\partial r}{\partial T_i} < 0$,

$\frac{\partial K_i}{\partial T_i} < 0$ und

$\left(\bar{K}_i - K_i\right) \gtreqless 0.$

Für den Kapitalexportstaat gilt:

$\left(\bar{K}_1 - K_1\right) > 0$

Dann ist in der Optimalitätsbedingung der Zähler größer als eins, der Nenner kleiner als eins, und es gilt:

$$\bar{N}_1 \frac{\frac{\partial U}{\partial y_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_1}} > 1.$$

Es kommt also zu einer Unterversorgung mit dem öffentlichen Konsumgut.

Für den Kapitalimportstaat gilt:

$\left(\bar{K}_2 - K_2\right) < 0$

Sowohl Zähler als auch Nenner sind in der Optimalitätsbedingung kleiner als eins. Über das Vorzeichen kann ohne weitere Annahmen keine eindeutige Aussage getroffen werden:

$$\bar{N}_2 \frac{\frac{\partial U}{\partial y_2}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} \gtreqless 1.$$

Es kann also in diesem Fall auch zu einer Überversorgung mit dem öffentlichen Konsumgut kommen.

25 Punkte

d)

Der optimale Steuersatz ergibt sich aus den beiden Bedingungen erster Ordnung für ein Maximum, (2.23) und (2.24):

(2.25) $T_i = F_j^{KK} \left(\bar{K}_i - K_i\right) \gtreqless 0$

Der Kapitalexportstaat wählt einen negativen, der Kapitalimportstaat einen positiven Steuersatz:

Für den Kapitalexportstaat gilt:

$$T_1 = F_2^{KK} \left(\bar{K}_1 - K_1\right) < 0.$$

Für den Kapitalimportstaat gilt:

$$T_2 = F_1^{KK} \left(\bar{K}_2 - K_2\right) > 0.$$

15 Punkte

e)

Das Maximierungsproblem der Regierung lautet nun:

$$\max_{T_i, t_i} \quad U \left\{ \frac{1}{\bar{N}_i} \left\{ F\left[K_i(T_i, \bar{T}_j), \bar{N}_i \right] + r(T_i, \bar{T}_j) \cdot \left[\bar{K}_i - K_i(T_i, \bar{T}_j) \right] \right.\right.$$

$$\left.\left. -T_i \cdot K_i(T_i, \bar{T}_j) \right\} - t_i , T_i \cdot K_i(T_i, \bar{T}_j) + t_i \cdot \bar{N}_i + s_i(T_i) \right\}.$$

Die Bedingungen erster Ordnung für ein Maximum erhält man durch Ableiten nach T_i und t_i:

Ableiten nach T_i und Nullsetzen der Ableitung liefert:

$$\frac{1}{\bar{N}_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left\{F_i^K\frac{\partial K_i}{\partial T_i}+\frac{\partial r}{\partial T_i}\left(\bar{K}_i-K_i\right)-r\frac{\partial K_i}{\partial T_i}-T_i\frac{\partial K_i}{\partial T_i}-K_i\right\}$$

$$+\frac{\partial U}{\partial y_i}\left\{K_i+\frac{\partial K_i}{\partial T_i}T_i+\frac{\partial s_i}{\partial T_i}\right\}=0.$$

Verwenden der Gewinnmaximierungsbedingung (2.10), Division durch K_i und Umstellen führt zu:

$$\bar{N}_i\frac{\frac{\partial U}{\partial y_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_i}}=\frac{1-\frac{1}{K_i}\frac{\partial r}{\partial T_i}\left(\bar{K}_i-K_i\right)}{1+\frac{\partial K_i}{\partial T_i}\frac{T_i}{K_i}+\frac{\partial s_i}{\partial T_i}\frac{1}{K_i}}$$

Ableiten der Maximierungsfunktion nach t_i und Nullsetzen der Ableitung führt zu:

$$\bar{N}_i\frac{\frac{\partial U}{\partial y_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_i}}=1.$$

Da beide Bedingungen erfüllt sein müssen, erhält man den optimalen Steuersatz durch Gleichsetzen der beiden Bedingungen:

$$\frac{1-\frac{1}{K_i}\frac{\partial r}{\partial T_i}\left(\bar{K}_i-K_i\right)}{1+\frac{\partial K_i}{\partial T_i}\frac{T_i}{K_i}+\frac{\partial s_i}{\partial T_i}\frac{1}{K_i}} = 1$$

Vereinfachen führt zu:

$$\frac{1}{K_i}\frac{\partial r}{\partial T_i}\left(K_i-\bar{K}_i\right) = \frac{\partial K_i}{\partial T_i}\frac{T_i}{K_i}+\frac{\partial s_i}{\partial T_i}\frac{1}{K_i}$$

Multiplikation mit K_i und Auflösen nach $\frac{\partial K_i}{\partial T_i} T_i$ liefert:

$$\frac{\partial K_i}{\partial T_i} T_i = \frac{\partial r}{\partial T_i}\left(K_i - \bar{K}_i\right) - \frac{\partial s_i}{\partial T_i}$$

Für

$$\frac{\partial s_i}{\partial T_i} = \left(K_i - \bar{K}_i\right)\frac{\partial r}{\partial T_i}$$

ergibt sich T_i (i=1,2) = 0.

Für $T_1 = T_2 = 0$ ist, wie ein Blick auf die Gleichgewichtsbedingung (2.19) zeigt, die internationale Kapitalallokation effizient.

30 Punkte