

# Hinweis zur Berechnung und Interpretation der Grenzvermeidungskosten (GVK):

Aufgrund von Nachfragen einiger Studentinnen und Studenten, sowie aufgrund von Fehlern welche bei der Bearbeitung der Klausuren der Ökonomie der Umweltpolitik im Sommer-Semester 2009 (21.09.2009) aufgefallen sind, wird an dieser Stelle die korrekte Darstellung und Berechnung der Grenzvermeidungskosten (GVK) noch einmal theoretisch und auch praktisch an Hand eines Beispiels ausführlich erörtert.

## Theoretisch:

Die Vermeidungskosten sind diejenigen Kosten, welche bei der Vermeidung von Emissionen anfallen. Die Funktion der Vermeidungskosten,  $VK(v)$  gibt also an, welche Kosten insgesamt bei der Vermeidung von Emissionen in Höhe von  $v$  anfallen.

Alternativ kann man auch angeben, wie viele Kosten bei einer Emission von  $x = x^* - v$  Einheiten anfallen, wobei  $x^*$  die Emissionen ohne Vermeidung, also bei  $v = 0$  darstellen, und  $x$  die tatsächlich emittierte Menge angibt. Mathematisch bedeutet dies,  $x$  ist selbst eine Funktion von  $v$ , also  $x = x(v)$ , ist. Durch dieses ersetzen erhält man also die neue Funktion:  $VK(x(v))$ . Leitet man diese Funktion ab, muss man jedoch nach  $v$  ableiten und nicht nach  $x$ .

Daher der „Tipp“: Wenn die Funktion  $VK(v)$  als Funktion von  $x$ ,  $VK(x)$  angegeben ist, ist diese vor dem Ableiten in die entsprechende Funktion von  $v$  umzuformen. Macht man dies nicht, sondern leitet stattdessen die Funktion  $VK(x)$  ab, muss man zwingend beachten das  $x$  selbst eine Funktion von  $v$  ist. Das heißt man substituiert  $v$  beim Ableiten durch  $x$ :

$$V(v) = V(x(v))$$

$$\Rightarrow V'(x(v)) = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} = V'(v)$$

Der letzte Term,  $\frac{dx}{dv}$ , darf nicht unterschlagen werden.

### Praktisch (Beispiel):

Um das ganze noch einmal deutlich zu machen, hier nun ein Beispiel aus der ersten Einsendeaufgabe des Wintersemester 2009/2010:

„Die Ratterndes Rollband GmbH verursacht Lärmemissionen  $x$ , die bei den umliegenden Anwohnern insgesamt Schäden in Höhe von  $S(x) = \frac{3}{250}x^2$  (für  $x \geq 0$ ) verursachen. Die Vermeidungskosten des Unternehmens seien gegeben durch  $VK(x) = \frac{1}{50}(200 - x)^2$  für  $0 \leq x \leq 200$ . Das unkorrigierte Ausgangsniveau liegt bei  $x^* = 200$ .“

Die Vermeidungskosten  $VK$  sind als Funktion von  $x$ ,  $VK(x)$  angegeben. Wir wissen jedoch, dass die Funktion eigentlich von  $v$  abhängt, den vermiedenen Emissionen. Je mehr Emissionen vermieden werden, desto größer sind die Vermeidungskosten.  $VK$  muss also in jedem Fall positiv von  $v$  abhängen. Andererseits bedeutet dies, dass sie negativ von  $x$  abhängen muss, denn je mehr emittiert wird, desto weniger wird – logischer Weise – vermieden. Mathematisch heißt das:

$$\frac{dVK(x)}{dx} < 0 \text{ und } \frac{dVK(x)}{dv} > 0$$

Der Ausdruck „Grenz“ steht nun im Allgemeinen für die erste Ableitung zur unabhängigen Variable. Die unabhängige ist in diesem Fall  $v$ . Die Grenzkosten der Vermeidung,  $GKV$ , entsprechen somit der ersten Ableitung von  $VK(x)$  nach  $v$ .

Da dies nun geklärt ist, kehren wir zurück zur Aufgabe:

„Ermitteln Sie die Grenzvermeidungskostenfunktion. Tipp: Drücken Sie dazu zunächst die Vermeidungskostenfunktion als Funktion in Abhängigkeit der vermiedenen Emissionen  $v = 200 - x$  aus.“

In der Aufgabe wird der Tipp gegeben, die Vermeidungskostenfunktion als Funktion von  $v$  auszugeben. Mit Beherrigung des Tipps lässt sich ganz einfach die korrekte Ableitung bilden:

$$VK(x) = \frac{1}{50}(200-x)^2 \quad | \quad x = x(v) = 200-v$$

$$\Leftrightarrow VK(v) = \frac{1}{50}v^2$$

$$\Rightarrow \frac{dVK(v)}{dv} = GVK(v) = \frac{1}{25}v \quad | \quad x(v) = 200-v$$

$$\Leftrightarrow GVK(x) = 8 - \frac{1}{25}x$$

Beherrigt man diesen Tipp jedoch nicht und leitet nach  $x$  ab, ergibt sich folgendes Bild:

$$VK(x) = \frac{1}{50}(200-x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dVK(x)}{dv} = \frac{dVK(x)}{dx} \frac{dx}{dv} = \frac{1}{50} \cdot 2 \cdot (200-x) \cdot (-1) \cdot \frac{x}{dv}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dVK(x)}{dx} \frac{dx}{dv} = \left( \frac{1}{25}x - 8 \right) \cdot \frac{x}{dv}$$

$$\Leftrightarrow GVK(x) = \left( \frac{1}{25}x - 8 \right) \cdot \frac{x}{dv}$$

Der Fehler, welcher nun passieren kann, ist den Term  $\frac{x}{dv}$  einfach zu unterschlagen und somit einen Vorzeichenfehler bei der Ableitung zu haben (Die Substitutions-Regel beim Ableiten nicht richtig anzuwenden), denn:

$$GVK(x) = \left( \frac{1}{25}x - 8 \right) \cdot \frac{x}{dv} \quad | \quad \frac{dx}{dv} = \frac{x(v)}{dv} = \frac{200-v}{dv} = -1$$

$$\Leftrightarrow GVK(x) = \left( \frac{1}{25}x - 8 \right) \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow GVK(x) = 8 - \frac{1}{25}x$$

Bei der kausalen Interpretation müsste einem dieser Fehler auch auffallen, so bedeutet der Ausdruck:

$GVK(x) = 8 - \frac{1}{25}x$ , dass die Grenzkosten der Vermeidung, also die Kosten zur Vermeidung einer zusätzlichen Emissionseinheit, dann am höchsten sind, wenn  $x$  am kleinsten ist, dass heißt wenn bereits eine große Menge an Emissionen vermieden wird.