

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Andreas Thies

**Überdeckungen durch
Bewegung eines
Liniensegments**

14. Februar 2008

Diplomarbeit

Betreuer: Prof. Dr. Rolf Klein

Erklärung

Mit der Abgabe der Diplomarbeit versichere ich gemäß § 20 Absatz 6 der DPO vom 14. März 2003, dass ich die Arbeit selbstständig durchgeführt habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, und Zitate kenntlich gemacht habe.

Bonn, den 14. Februar 2008

Andreas Thies

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Bisherige Erkenntnisse	5
2.1	Keakeya's Nadelproblem	5
2.2	Bahnplanung in hindernisbesetzten Umgebungen	7
2.3	Kürzeste Wege für Liniensegmente	8
2.4	Überdeckungsprobleme	8
2.5	Zusammenfassung	9
3	Kostenmaße	11
3.1	Bewegung von Liniensegmenten	11
3.2	Das natürliche Kostenmaß d_∞	12
3.3	Das kumulative Kostenmaß k_μ	14
3.3.1	Das kumulative Maß k_μ als Abstandsmaß	15
3.4	Überdeckungen durch Liniensegmente	16
4	Optimale Überdeckungen	19
4.1	Der einfache Fall $\mu = 0$	19
4.1.1	Einige Beispiele	19
4.1.2	Lösungsverfahren für beliebige Umgebungen	23
4.1.3	NP-Härte	24
4.1.4	Zusammenfassung	34
4.2	Der einfache Fall $\mu \rightarrow \infty$	34
4.2.1	Wege in Rechtecken	34
4.2.2	Wege in Polygonen	39
4.3	Ein gleichgewichteter Fall: $\mu = \frac{1}{8}$	41
4.3.1	Wege in Kreisen	42
4.3.2	Wege im Einheitsquadrat	44
5	Ein allgemeines Näherungsverfahren	47
5.1	Der Algorithmus	47
5.2	Korrektheit	48
5.3	Laufzeit	49

5.4	Güte	51
5.5	Optimierungsmöglichkeiten	52
5.6	Zusammenfassung und Kritik	54
6	Das Partyfotografenproblem	57
6.1	Kosten	59
6.2	Wege im Einheitskreis	59
6.2.1	Der gleichgewichtete Fall: $\mu = \frac{1}{2}$	59
6.2.2	Ein ungleichgewichteter Fall: $\mu = 1$	62
6.3	NP-Härte	67
6.4	Ein Näherungsverfahren	74
7	Schlussbemerkungen	79
	Bibliography	81
	Bildnachweise	83
	Index	84

Kapitel 1

Einführung

Angenommen, ein Bauer möchte seinen Acker umpflügen. An seinem Traktor hängt dazu ein Pflug, welcher rechts und links des Traktors in einer gewissen Breite die Erde umgräbt. Wie sieht zu einem gegebenen Acker eine möglichst gute Rundtour aus, welche das gesamte Feld umgräbt? Und was ist dabei überhaupt eine „möglichst gute Rundtour“?



Abbildung 1.1: Ein Traktor bearbeitet ein Feld.

Wenn wir dieses Problem abstrahieren, können wir den Traktor mit- samt Pflug als ein Liniensegment betrachten, dessen Bezugspunkt sein Mit-

telpunkt - also der Standort des Traktors - ist. Mittels dieses Liniensegments soll eine gegebene Fläche - der Acker - komplett überdeckt werden. Gefragt ist nun nach einem minimalen Pfad, wobei es von der Anwendung abhängt, wie hier die Kosten für verschiedene Pfade zu beziffern sind.

Als allgemeinen bisherigen Ansatz zur Kostenmessung hat sich das sogenannte *natürliche Kostenmaß* durchgesetzt, welches die menschliche Intuition für Kosten bei Bewegungen von Objekten im Raum gut widerspiegelt, aber kaum Möglichkeit bietet, zu komplexen Pfaden die genauen Kosten zu beziffern. Darüber hinaus lässt das natürliche Maß kaum Variationsmöglichkeiten. Für ein schnell bewegtes Objekt mit Beschleunigungs- und Bremsverhalten ist ein Pfad mit vielen Geraden und wenigen Kurven schneller zu absolvieren als geschlungene Pfade, auch wenn diese eventuell eine kürzere Gesamtstrecke ergeben würden. Für ein sehr langsames Arbeitsgerät, welches sich dafür schnell auf der Stelle drehen lässt, ist hingegen nur die Gesamtstrecke von Bedeutung, die einzelnen Rotationen fallen hierbei kaum mehr ins Gewicht. Derartige Ausgangsparameter sollten Einfluss auf die Kosten nehmen können.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein neues Kostenmaß - das kumulative Kostenmaß - entwickelt und untersucht. Grundidee ist, die durch ein Liniensegment ausgeführten Bewegungen in einen Rotations- und einen Translationsanteil aufzugliedern, je nach Anwendung unterschiedlich zu gewichten und aufzusummieren. So können mit einheitlichem Kostenmaß durch entsprechende Wahl des Gewichtungsfaktors unterschiedliche Anwendungen untersucht werden.

Um eine Grundlage hierfür zu schaffen, fasst Kapitel zwei bisherige Erkenntnisse zu zweidimensionalen Überdeckungsproblemen sowie zur Bewegung von Polygonen allgemein zusammen und gibt einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung.

Kapitel drei führt das kumulative Kostenmaß ein. Nachdem zunächst zur besseren Vergleichbarkeit das natürliche Kostenmaß dargestellt wird, schaffen die dort gegebenen Definitionen die Basis für das weitere Vorgehen. Weiterhin werden allgemeine Eigenschaften des kumulativen Maßes untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass ein aus dem kumulativen Kostenmaß abgeleitetes Abstandsmaß eine Metrik bildet.

Das vierte Kapitel untersucht optimale Wege in vorgegebenen Umgebungen. Hierzu werden unter anderem auch zwei Spezialfälle untersucht: zum einen der Fall einer kostenlosen Rotation, welcher auch als „Rasenmäherproblem“ bekannt ist, zum anderen der Spezialfall einer sehr teuren Rotation, so dass optimale Wege auf Translationsbewegungen beschränkt sind. Beide Spezialfälle sind schon für einfache Umgebungen schwer zu lösen, zum Rasenmäherproblem wird ein Beweis der NP-Härte vorgestellt.

Das fünfte Kapitel setzt sich mit Approximationsverfahren auseinander. Es wird ein in akzeptabler Polynomzeit arbeitendes kompetitives Verfahren vorgestellt, welches für einen konstanten Gewichtungsparemeter zwischen

Rotation und Translation um höchstens einen linearen Faktor schlechtere Wege als ein optimales Verfahren liefert.

Nachdem das Grundproblem weitgehend untersucht ist, stellt Kapitel sechs mit dem „Partyfotografenproblem“ ein verwandtes Problem vor, bei welchem ebenfalls nach einer Überdeckung durch ein Liniensegment gefragt ist. Dabei befindet sich der Bezugspunkt allerdings nicht mehr mittig sondern am Rand des Segments. Wir werden sehen, dass dieses Problem unabhängig von der Gewichtung zwischen Rotation und Translation NP-hart ist.

Kapitel sieben fasst schließlich die wichtigsten Erkenntnisse zusammen und listet die offen gebliebenen Probleme auf.

Kapitel 2

Bisherige Erkenntnisse

Fragestellungen zur Bahnplanung von geometrischen Objekten lassen sich dem Themengebiet der algorithmischen Geometrie, einem Teilgebiet der Informatik, zuordnen. Während diese, an einfachen Beispielen illustrierbaren Probleme vermutlich schon im Altertum zu Zeiten von Euklid und Pythagoras die gelehrten beschäftigt haben mögen, so wurden die Grundlagen der heute möglichen Beweise erst sehr viel später gelegt. Insbesondere die Entwicklung der kartesischen Koordinaten durch *René Descartes*, aber auch die Entwicklung des Stetigkeitsbegriffs im 19. Jahrhundert waren nötig. Der Begriff der *Algorithmischen Geometrie* selbst wurde nochmals sehr viel später durch *Preparata* und *Shamos* geprägt, welche mit ihrer Veröffentlichung [16] unter diesem Titel für die nächsten Jahre ein Standardwerk dieser Disziplin geschaffen haben. Mittlerweile existieren zahlreiche Veröffentlichungen zur Algorithmischen Geometrie. Dieses Kapitel gibt einen Überblick über bisherige Forschungen, welche zu dem Problem der Überdeckung durch Liniensegmente Zusammenhänge aufweisen.

2.1 Kakeya's Nadelproblem

Der Japaner *Soichi Kakeya* hat 1917 erstmals die Frage nach der kleinsten Fläche aufgeworfen, welche eine Nadel der Länge 1 bei einer Umdrehung um 360° überdecken muss, wenn ihr dabei beliebige Bewegungen gestattet sind [13].

Die einfachste Lösung wäre eine Rotation am Mittelpunkt der Nadel. Dabei wird ein Kreis mit Flächeninhalt von $\frac{\pi}{4} \approx 0,78$ überdeckt (siehe Abbildung 2.1 (i)). Geschickter wäre es schon, ein gleichseitiges Dreieck der Höhe 1 zu verwenden, welches auch genügend Platz für eine Rotation lässt und dabei nur eine Fläche von 0,5 abdeckt (Abbildung 2.1 (ii)). Diese Idee weiterverfolgend vermutete *Kakeya* selbst, dass eine untere Schranke von $\frac{\pi}{8}$ gelte: es sei mindestens ein Hypocycloid (Abbildung 2.1 (iii)) nötig, um die Nadel zu drehen. Die Endpunkte des Liniensegments laufen die Ränder des

Hypocycloids ab, während der Mittelpunkt des Liniensegments genau den kleinsten einschließenden Kreis des Hypocycloids beschreibt.

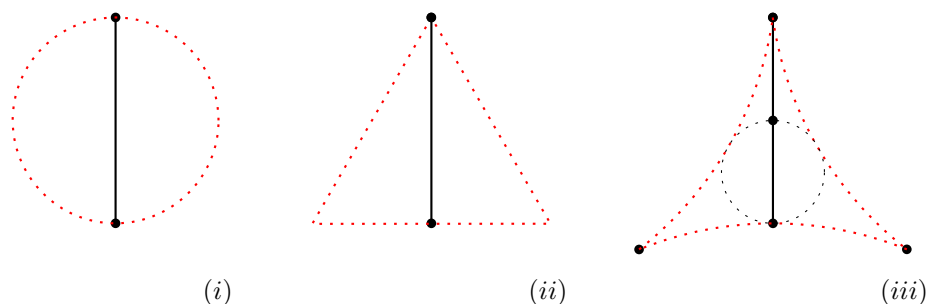


Abbildung 2.1: Drei verschiedene Flächen, auf denen eine Nadel der Länge 1 um sich selbst gedreht werden kann. (i) Ein Kreis mit Radius 0,5. (ii) Ein gleichseitiges Dreieck mit Höhe 1. (iii) Ein Hypocycloid.

Doch nur drei Jahre später gelang dem Russen *A. S. Besicovitch* 1920, einen Beweis für die Nichtexistenz einer oberen Schranke zu erbringen, indem er ein äquivalentes Problem [3] löste, ohne von den Überlegungen *Kakeyas* zu wissen. 1928 veröffentlichte *Besicovitch* dann nochmals einen speziell die Fragestellung von *Kakeya* aufgreifenden Beweis [4].

Grundidee hierbei war ebenfalls das Dreieck. Allerdings wurde nicht versucht, es an den Seiten schlanker zu machen, sondern es stattdessen in einzelne Teilflächen zu unterteilen. Diese wurden so verschoben, dass sie sich einerseits überlappen, also die Grundfläche insgesamt abnimmt, andererseits eine Drehung der Nadel weiterhin möglich bleibt. Durch eine beliebig kleine Unterteilung des Dreiecks kann so die überdeckte Fläche insgesamt beliebig verkleinert werden. Solche Flächenkonstruktionen sind mittlerweile auch unter dem Begriff der *Besicovitch-Menge* bekannt. Abbildung 2.2 zeigt das Grundprinzip solcher Unterteilung.

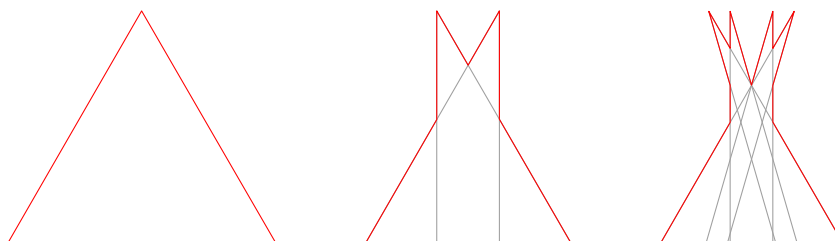


Abbildung 2.2: Die Grundidee im Beweis von *Besicovitch*: Durch beliebig kleine Teilung und Verschiebung der Menge ineinander entsteht eine *Besicovitch-Menge* mit beliebig kleiner Fläche.

Wie können uns diese Ergebnisse aber nun bei der eigentlichen Fragestellung weiterhelfen? Während *Takeya* Liniensegmente so bewegen möchte, dass die Fläche möglichst klein bleibt, liegt uns ja genau am Gegenteil: die abgedeckte Fläche soll maximiert werden. Und während *Besicovitch* sich in seinem Beweis eine stattliche Anzahl an Hin- und Rückbewegungen erlaubt, möchten wir bei all unseren Bemühungen die Bewegung unseres Liniensegments nach Möglichkeit gering ausfallen lassen.

Dennoch können wir zumindest eine wichtige Erkenntnis mitnehmen: die abgedeckte Fläche steht in keinem festen Verhältnis zu der ausgeführten Bewegung. Was reine Translationsbewegungen angeht, ist diese Aussage trivial. Durch eine Translation entlang der Geraden, auf welcher ein Liniensegment liegt, können wir beliebig lange Strecken zurücklegen, ohne die abgedeckte Fläche zu vergrößern. Dies gilt unter Zuhilfenahme der Ergebnisse aus dem Nadelproblem auch für Rotationen. Es folgt insgesamt, dass sich kein für uns geeignetes Kostenmaß für die Bewegung eines Liniensegments allein aus der überdeckten Fläche ergeben kann. Es macht also Sinn, sich mit dem Zusammenhang zwischen verschiedenen Bewegungen und den überdeckten Flächen überhaupt näher auseinanderzusetzen.

2.2 Bahnplanung in hindernisbesetzten Umgebungen

Eine zum Nadelproblem gegenteilige Fragestellung probiert das Teilgebiet der *Bahnplanung* zu beantworten. In einer weiten Spanne von bisherigen Veröffentlichungen wird hier versucht, für Objekte in einer hindernisbesetzten Umgebung einen Weg zwischen festgelegten Start- und Zielkonfigurationen zu ermitteln. Klassische Anwendung ist das sog. *Piano movers' problem*. Gibt es einen Weg, ein Klavier durch eine gegebene Wohnung von der Eingangstür bis zum Wohnzimmer zu tragen? Frühe Arbeiten, welche sich dieser Fragestellung annehmen (z.B. [18]), können mit geeigneten Einschränkungen bezüglich der Umgebung und des Objekts die Frage der Existenz eines solchen Weges beantworten. Die Beantwortung der Frage nach einem kürzesten Weg hingegen gestaltet sich weitaus schwieriger. Je nach Art des zu bewegenden Objekts sind aus dem zurückgelegten Weg zugehörige Kosten einfach oder schwierig zu definieren und ermitteln.

Für einen Kreis in der Ebene sind Wege im Allgemeinen einfach zu beschreiben: eine Rotation macht keinen Sinn, die erfolgte Bewegung ergibt sich allein aus dem Weg, den der Kreismittelpunkt zurücklegt. Dabei ist es einfach, unter mehreren Bewegungen zu unterscheiden, welche die kürzere ist: ein Weg mit minimalen Kosten ergibt sich bei minimaler Wegstrecke des Kreismittelpunktes. Eingehend wurde dieses Problem in [2] untersucht.

Soll aber ein beliebiges Polygon bewegt und hierfür ein Kostenmaß angegeben werden, gestaltet sich dies schwieriger: es können sowohl Translationen

und Rotationen als auch beliebige Kombinationen aus beidem gleichzeitig ausgeführt werden. Ein allgemeingültiges und naheliegendes Kostenmaß für Bewegungen existiert nicht. Dennoch findet sich in verschiedenen Arbeiten (z.B. [14], [15] und [10]) ein gemeinsamer Ansatz. Das dort beschriebene *natürliche Kostenmaß* nimmt als Kosten die durchschnittliche Weglänge eines jeden Punkts des bewegten Objekts. Durch eine solche Definition erhalten wir ein einfach zu beschreibendes Maß, welches die Intuition des Menschen für das Bewegen und Verschieben eines Objekts gut widerspiegelt. Umgekehrt ist die Frage nach den Kosten für bestimmte Bewegungen keineswegs einfach zu beantworten, weswegen in den entsprechenden Arbeiten zumeist bestimmte Einschränkungen gemacht wurden. Einerseits kann man die Anzahl der betrachteten Punkte reduzieren und beispielsweise nur noch bestimmte Eckpunkte für die Berechnung heranziehen [10]. Andererseits kann man auch die erlaubten Bewegungen einschränken, indem nur noch Drehungen um $\pm 90^\circ$ sowie reine Translationsbewegungen erlaubt werden [14]. Auch Kombinationen aus beidem wurden bislang in Betracht gezogen [15].

Umfassendere Erkenntnisse kürzester Wege ohne Einschränkungen bezüglich der Bewegungsfreiheit mit dem natürlichen Kostenmaß konnten bislang nicht gewonnen werden.

2.3 Kürzeste Wege für Liniensegmente

Speziell auf die Bewegung von Liniensegmenten sind in unabhängig voneinander veröffentlichten Arbeiten *Gurevich* und *Dubovitskij* [6] sowie *Icking*, *Rote*, *Welzl* und *Yap* in [10] eingegangen. Sie untersuchten, wie ein Liniensegment mit minimalen Kosten zwischen zwei vorgegebenen Platzierungen bewegt werden kann. Im Gegensatz zum oben genannten Problem der Bahnplanung existiert hierbei keine äußere Begrenzung der Bewegungsfläche. Auch sind bisher keine weiteren Hindernisse berücksichtigt worden.

Als Kostenmaß wurde eine Variante des natürlichen Maßes herangezogen: lediglich die Strecken der beiden Endpunkte wurden berücksichtigt. Als Ergebnis obiger Arbeiten konnten genaue Beschreibungen optimaler Wege für gegebene Startsituationen ermittelt werden. Darüber hinaus ergeben sich aber kaum Ansätze für die Berechnung optimaler Wege unter Hinzunahme einfacher Hindernisse.

2.4 Überdeckungsprobleme

Die Fragestellung, eine Fläche durch Bewegung mittels eines Polygons zu überdecken, ist unter dem Begriff *Rasenmäherproblem* bekannt (siehe Abbildung 2.3). In [1] wurden dabei Überdeckungen durch Einheitsquadrate und Einheitskreise untersucht. Neben dem Beweis der NP-Vollständigkeit für

einen Spezialfall finden sich für verschiedene weitere Einschränkungen Approximationsalgorithmen, welche nur um konstante Faktoren längere Wege als das Optimum liefern. Einzelne Erkenntnisse daraus werden uns insbesondere in Kapitel 4.1 weiterhelfen, wo der Spezialfall einer sehr günstigen Rotation betrachtet wird.

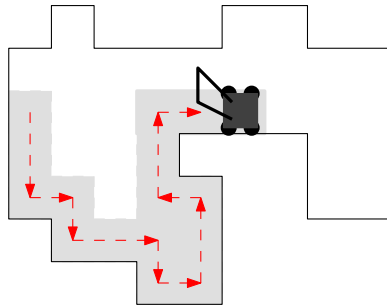


Abbildung 2.3: Das Rasenmäherproblem für einen quadratischen Mäher in rechteckiger Umgebung; mit dem Mäher soll die gesamte Rasenfläche überdeckt werden.

2.5 Zusammenfassung

Insgesamt kann auf mehrere Veröffentlichungen zurückgegriffen werden, welche die Bewegung von zweidimensionalen Objekten in der Ebene beschreiben. Insbesondere Polygone standen hier im Mittelpunkt, Liniensegmente als Spezialfall solcher wurden ebenso betrachtet. Schwierigkeiten bereitete vor allem die Angabe von Kosten der Bewegungen. Meist wurde das natürliche Kostenmaß herangezogen, wobei aufgrund der Komplexität dessen bisher nur für einfache Sonderfälle oder unter wesentlichen Einschränkungen bezüglich der Bewegungsfreiheit Erkenntnisse gewonnen werden konnten.

Die Frage nach der überdeckten Fläche von bewegten Objekten hat vergleichsweise weniger Beachtung gefunden. Eine Überdeckung durch die Bewegung von Liniensegmenten wurde nach derzeitigem Wissensstand noch nicht untersucht.

Kapitel 3

Kostenmaße

Bevor wir näher auf konkrete Fragestellungen zur Bewegung von Liniensegmenten eingehen können, muss ein geeignetes *Kostenmaß* definiert werden. In diesem Kapitel definieren wir dazu zunächst formal die Begriffe Liniensegment, Platzierung und Bewegung. Anschließend wird der Übersicht und besseren Vergleichbarkeit halber hier noch einmal das natürliche Kostenmaß definiert. Weiterhin wird ein neues Kostenmaß - das kumulative Maß - mit seinen wesentlichen Eigenschaften vorgestellt sowie der Begriff der Überdeckung definiert.

3.1 Bewegung von Liniensegmenten

Betrachten wir ein *Liniensegment* $s = \overline{AB}$ zwischen den beiden Endpunkten $A = (x, y)$ und $B = (x', y')$ in der Ebene mit seinem Mittelpunkt $m = (\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Länge auf 1 normiert ist, also $\|AB\| = 1$.¹

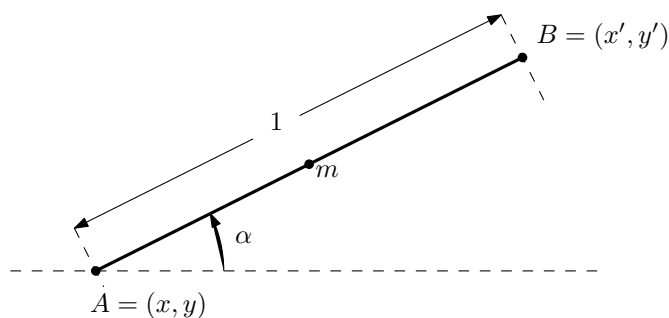


Abbildung 3.1: Ein Liniensegment $s = \overline{AB}$ in der Platzierung (x, y, α) .

¹Diese Bezeichnungen sowie die folgenden beiden Definitionen decken sich im Wesentlichen mit denen bei [10].

Definition 1 Wir nennen $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \times S$ die Menge der *Platzierungen*, wobei \mathbb{R}^2 die Ebene und S die Winkelmenge $[0, 2\pi]$ des Einheitskreises darstellt. Jede einzelne Platzierung $P = (x, y, \alpha) \in \mathcal{P}$ gibt eine Transformation der Euklidischen Ebene an, wobei jeder Punkt $q = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ auf einen neuen Punkt $q[P] \in \mathbb{R}^2$ wie folgt abgebildet wird:

$$q[P] = (x + a \cos \alpha - b \sin \alpha, y + a \sin \alpha + b \cos \alpha)$$

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ der Ebene wird nach $S[P] = \{q[P] : q \in S\}$ abgebildet.

Mittels der Definition der Platzierung können wir nun Bewegungen formal als eine stetige Funktion zwischen zwei Platzierungen definieren:

Definition 2 Eine *Bewegung* bzw. ein *Pfad* p eines Liniensegments s zwischen zwei Platzierungen P_0 und P_1 ist eine stetige Funktion

$$p : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{P}$$

wobei $p(t_0) = P_0$ und $p(t_1) = P_1$. Wir schreiben alternativ auch

$$P_0 \xrightarrow{p} P_1$$

3.2 Das natürliche Kostenmaß d_∞

Wie in Kapitel 2 deutlich wurde, ist das natürliche Kostenmaß d_∞ das bisher übliche Verfahren, um aus einer Bewegung eines Körpers Kosten abzuleiten. Grob gesprochen beziffert das natürliche Kostenmaß die durchschnittliche Weglänge, welche die einzelnen Punkte des bewegten Objekts zurücklegen.

Damit deckt sich diese Definition im Wesentlichen mit der Intuition des Menschen bezüglich der aufzuwendenden Kraft, um einen auf dem Boden liegenden Körper zu verschieben. Ein reines Verschieben - also Translation - kostet gleich viel Kraft, egal in welche Richtung verschoben wird. Eine Drehung des Körpers ist indessen unterschiedlich kräftezehrend, je nachdem wie nahe der Rotationspunkt dem Schwerpunkt des Körpers ist. Genau dieses Verhalten findet sich im natürlichen Maß.

Der besseren Übersicht halber geben wir eine gängige Definition hier erneut an:

Definition 3 Zu einer Bewegung p zwischen zwei Platzierungen P_0 und P_1 geben wir die Weglänge $d_n(p)$ nach dem natürlichen Kostenmaß als das Supremum über eine endliche Unterteilung $s_0 < s_1 < \dots < s_l$ des Intervalls $[t_0, t_1]$ an:

$$d_n(p) = \sup_{t_0=s_0 < s_1 < \dots < s_l=t_1} \sum_{i=0}^{l-1} \rho_n(p(s_{i+1}), p(s_i))$$

Dabei beschreibt $\rho_n(P, Q)$ den durchschnittlichen Abstand der einzelnen Punkte A_k eines Liniensegments in den beiden Platzierungen P und Q zueinander.

$$\rho_n(P, Q) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|A_k[P] - A_k[Q]\|$$

Wählt man in obiger Definition l hinreichend groß, kann man sich dem natürlichen Kostenmaß d_∞ beliebig gut annähern. Aber wie können wir nun Kosten für eine bestimmte Bewegung angeben?

Grundsätzlich kann man bei der Bewegung eines Liniensegments zwei verschiedene Bewegungstypen ausmachen: Translation und Rotation. Soweit diese isoliert auftreten, sind die Kosten nach dem natürlichen Kostenmaß leicht zu ermitteln.

Bei reinen Translationsbewegungen zwischen zwei Platzierungen $P = (x, y, \alpha)$ und $P' = (x', y', \alpha')$ wobei $\alpha = \alpha'$ ist es gleichgültig, ob man lediglich die Weglänge eines Referenzpunktes oder die durchschnittliche Weglänge aller Punkte betrachtet. Alle Punkte legen den gleichen, um ihre relative Lage zueinander verschobenen Weg zurück.

Für reine Rotationsbewegungen ist es ähnlich einfach, die Kosten nach dem d_∞ -Maß anzugeben. Wählt man als Rotationpunkt einen der Endpunkte, so dass das Liniensegment wie ein Uhrzeiger rotiert wird, verändert der innere Endpunkt des Liniensegments seine Position nicht. Der äußere Endpunkt würde bei einem auf die Länge 1 normierten Liniensegment eine Strecke von 2π zurücklegen. Da der Umfang eines Kreises linear mit seinem Durchmesser wächst, brauchen wir an dieser Stelle schon nicht mehr weitere Punkte in der Mitte zu betrachten. Uns genügt der Durchschnitt beider Werte, welcher uns Kosten von π für eine volle Umdrehung angibt.

Weit weniger einfach gestaltet sich die Berechnung der Kosten, wenn wir es wie in Abbildung 3.2 mit einer gleichzeitigen Rotation und Translation zu tun haben.

Für eine solche Bewegung die Kosten anzugeben, ist nicht mehr trivial. Insofern liegt es nahe, das Kostenmaß zu modifizieren, indem nicht mehr das d_∞ -Maß als Grundlage dient, sondern nur noch mit dem d_2 -Maß die beiden Endpunkte des Liniensegments bewertet werden, wie es in den Arbeiten [10] von *Icking* et al. geschehen ist. Wie man leicht nachprüfen kann, verlieren wir zumindest bei den reinen Translations- und Rotationsbewegungen nichts, hier macht es wie oben angemerkt keinen Unterschied, ob nur die beiden Endpunkte oder alle Punkte des Liniensegments berücksichtigt werden. Bei kombinierten Translations- und Rotationsbewegungen ist hingegen mit Abweichungen zu rechnen.

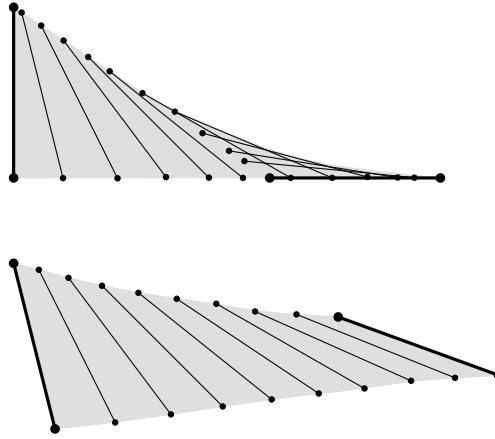


Abbildung 3.2: Zwei Beispiele für gleichzeitige Translation und Rotation eines Liniensegments. Die überdeckte Fläche ist hellgrau dargestellt.

3.3 Das kumulative Kostenmaß k_μ

In dieser Arbeit soll von der Familie der d_i -Maße Abstand genommen werden und ein eigenes Kostenmodell - das kumulative Kostenmaß - vorgestellt werden. Motivationsgrund ist einerseits, eine weitere Vereinfachung zu schaffen, um auch komplexere Probleme angehen zu können. Andererseits nutzen wir die Möglichkeiten aus, einen Gewichtungsparmeter einzubauen, welcher die unterschiedliche Wertung zwischen verschiebender und drehender Bewegung ermöglicht. Dazu werden die während der Bewegung getätigten Rotationen und Translationen voneinander unabhängig bewertet und aufsummiert.

Für die Translation nehmen wir allein den Mittelpunkt m des Liniensegments als Referenzpunkt, und erhalten zu einer Bewegung p einen Kostenanteil

$$k_{trans}(p) = \sup_{t_0=s_0 < s_1 < \dots < s_l=t_1} \sum_{i=0}^{l-1} (dist(p(s_i), p(s_{i+1})))$$

Dabei bezeichne die Funktion $dist(s = (x, y, \alpha), s' = (x', y', \alpha'))$ den Euklidischen Abstand $\|m - m'\|$ der beiden Mittelpunkte m und m' zweier Liniensegmente in den Platzierungen s und s' .

Zum Ermitteln der Rotationskosten verfahren wir ähnlich. Hier ermitteln wir den Kostenanteil durch

$$k_{rot}(p) = \sup_{t_0=s_0 < s_1 < \dots < s_l=t_1} \sum_{i=0}^{l-1} (ang(p(s_i), p(s_{i+1})))$$

Dabei bezeichne die Funktion $ang(s = (x, y, \alpha), s' = (x', y', \alpha'))$ die Winkel-differenz

$$|\alpha - \alpha'| \quad \text{mod } 2\pi$$

zweier Liniensegmente in den Platzierungen s und s' .

Um je nach weiterer Anwendung eine unterschiedliche Gewichtung von Rotation und Translation zuzulassen, führen wir den Gewichtungsparemeter $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein. Insgesamt erhalten wir das kumulative Kostenmaß k_μ .

Definition 4 Sei p eine Bewegung eines Liniensegments zwischen zwei Platzierungen P_0 und P_1 . Dann definieren wir die Kosten für diese Bewegung durch

$$k_\mu(p) = k_{trans}(p) + \mu k_{rot}(p)$$

3.3.1 Das kumulative Maß k_μ als Abstandsmaß

Neben der Eigenschaft von k_μ , zu einem gegebenen Pfad p zugehörige Kosten anzugeben, kann das kumulative Maß auch als Abstandsmaß zwischen zwei Platzierungen gesehen werden.

Definition 5 Als k_μ -Abstand zweier Platzierungen P_0 und P_1 bezeichnen wir den nach dem k_μ -Kostenmaß günstigsten Pfad:

$$k_\mu(P_0, P_1) = \inf_{P_0 \xrightarrow{w} P_1} k_\mu(p)$$

Der kumulative Abstand bildet dabei ebenso wie das natürliche Kostenmaß² d_∞ und seine Vereinfachungen d_n eine Metrik.

Theorem 6 Für beliebige Gewichte $\mu \geq 0$ bildet der kumulative Abstand k_μ eine Metrik:

1. $k_\mu(P_0, P_1) \geq 0$ und $k_\mu(P_0, P_1) = 0 \Leftrightarrow P_0 = P_1$
2. $k_\mu(P_0, P_1) = k_\mu(P_1, P_0)$
3. $k_\mu(P_0, P_1) + k_\mu(P_1, P_2) \geq k_\mu(P_0, P_2)$

Beweis. Metriken sind unter der Addition untereinander und der Multiplikation mit einer positiven Konstante abgeschlossen. Für uns bedeutet dies, dass es genügt, die Funktionen $k_{trans}(p)$ und $k_{rot}(p)$ auf ihre Eigenschaften als Metrik zu überprüfen.

Erstere entspricht genau dem Euklidischen Abstand zwischen den beiden Mittelpunkten der Liniensegmente, welcher eine Metrik bildet.

Die Rotationskomponente $k_{rot}(p)$ misst die insgesamt ausgeführten Rotationen des Liniensegments im Intervall $[0, 2\pi]$ modulo 2π , was wiederum dem (hier eindimensionalen) Euklidischen Abstand entspricht. \square

Im Gegensatz zu Euklidisch kürzesten Wegen sind kürzeste Wege bei den kumulativen Abständen nicht eindeutig. Zwar ist der Pfad des Mittelpunkts

²Ein Beweis findet sich bei [10]

des Liniensegments festgelegt und auch die Rotation kann nur einen festgelegten Winkelradius ablaufen, es spielt aber keine Rolle, in welcher Reihenfolge beides ausgeführt wird. Abbildung 3.3 zeigt zu gleichen Start- und Endkonfigurationen zwei unterschiedliche optimale Pfade.

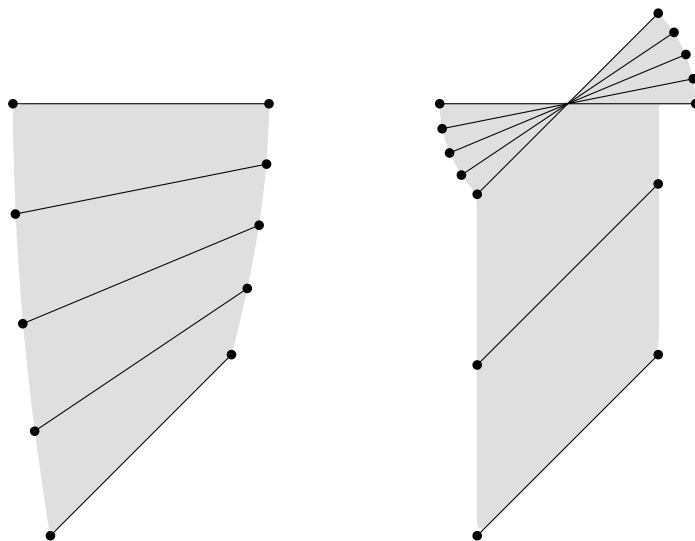


Abbildung 3.3: Zwei unterschiedliche k_μ -optimale Pfade zu identischen Start- und Endkonfigurationen. Die überdeckte Fläche ist hellgrau hervorgehoben.

Hier zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zu den natürlichen Maßen. Zwar sind die Wege bei diesen auch nicht immer eindeutig, die Uneindeutigkeit tritt aber nur bei Spezialfällen auf, in denen Symmetrien der Ausgangssituation mehrere zueinander symmetrische kürzeste Wege erzwingen.

3.4 Überdeckungen durch Liniensegmente

Bisher haben wir unser Liniensegment, seine Bewegungen und die entstehenden Kosten definiert. Weiterhin sei auch eine abgeschlossene Fläche F gegeben, welche durch das Liniensegment überdeckt werden soll. Überdeckung bedeutet dabei, dass jeder Punkt der Fläche zu einem bestimmten Zeitpunkt im bewegten Liniensegment enthalten ist.

Definition 7 Wir sagen, ein Pfad p überdeckt eine Fläche F , wenn

$$\forall x \in F : \exists t_i \in [t_0, t_1] : x \subset S[p(t_i)]$$

und bezeichnen die durch p überdeckte Fläche mit $f(p)$.

Zu beachten ist dabei, dass wir sowohl bei F als auch bei unserem Liniensegment s von einer abgeschlossenen Menge ausgegangen sind. Daher ist auch $f(p)$ eine abgeschlossene Menge. Berührt das Liniensegment mit einem seiner Endpunkte den Rand von F , gilt dieser als erkundet. Weiterhin betrachten wir nur zusammenhängende Flächen F . Zu einer Kompaktheit der zu überdeckenden Fläche machen wir keine Aussage, wir behandeln im Folgenden sowohl Flächen mit Löchern, als auch solche, deren Inneres komplett ausgefüllt ist.

Bezüglich einer doppelten Überdeckung haben wir keine Einschränkungen gemacht. Jeder Punkt von F darf beliebig oft vom Liniensegment überfahren werden. Wir wünschen uns also eine Verhaltensweise ähnlich einem Rasenmäher: ein doppeltes Mähen über eine bestimmte Stelle macht keinen Unterschied.

Ebenfalls keine Einschränkungen machen wir zur Bewegung des Liniensegments bezüglich der Umgebung F . Diese stellt für unser Liniensegment keine Einzäunung dar. Der Rand von F darf frei überfahren werden. Um auf das Beispiel des Rasenmähers zurückzukommen: den eingeschalteten Rasenmäher kurzzeitig über den neben der Rasenfläche gelegenen Plattenweg zu schieben, soll erlaubt sein.

Der Umstand, sich auch außerhalb unserer abzudeckenden Fläche bewegen zu dürfen, macht in den meisten einfachen Anwendungsfällen nur geringe Unterschiede aus, sondern erspart lediglich weitere Randbedingungen prüfen zu müssen. Nur wenn μ groß ist, also unser Liniensegment wenig drehfreudig ist oder die Umgebung stark zerklüftet ist, kommen Übertretungen der Ränder häufiger vor.

Als letzte Nebenbedingung soll im Weiteren immer eine *Rundtour* gefunden werden, also unser Rasenmäher wieder dort abgestellt werden, wo wir mit ihm gestartet sind. Dies ist einerseits eine Einschränkung: ohne diese Bedingung können je nach gegebener Startkonfiguration und Fläche kürzere Wege gefunden werden. Umgekehrt ist die Forderung nach einer Rundtour in der Anwendung nicht unüblich. Ein Fahrzeug soll nach getaner Arbeit zurück in die Ausgangssituation kehren und diesen Umstand am besten schon bei der Bahnplanung berücksichtigen. Auch für Überwachungsaufgaben sind Rundtouren zweckmäßig, wenn das Fahrzeug laufend in Betrieb ist. Weiterhin ist es oftmals einfacher, Rundtouren zu konstruieren, da man in diesen aufgrund des bekannten Zielpunktes weniger unbekannte Faktoren hat.

Eine ebenfalls interessante Problemstellung - welche in dieser Arbeit aber nicht weiter untersucht werden soll - würde man erhalten, wenn man obige beiden Forderungen umkehrt, also weder eine doppelte Überdeckung noch ein Überfahren des Randes erlaubt. Dann hätte man das Verhalten einer Farbsprühdose. Es ist nicht gewünscht, mehrfach dieselbe Stelle zu besprühen, da sonst zu viel Farbe aufgetragen wird, welche Tropfen bildet. Ebenfalls sollte man aus Rücksicht auf die Umgebung tunlichst nicht an

seinem Objekt vorbeisprühen. Für eine gegebene Umgebung ist bei diesem Problem nicht nur die Frage zu beantworten, wie eine optimale Lösung aussieht, sondern auch, ob überhaupt eine Lösung existiert. Während einzusehen ist, dass beim Rasenmäherproblem für eine endliche Fläche immer eine Rundtour existiert, kann die Farbsprühdose schon einfache Umgebungen - beispielsweise ein schmales Rechteck - nicht mit einer Rundtour abdecken, ohne die Fläche zu verlassen oder eine Stelle doppelt zu besprühen.

Arkin et al. haben das Farbsprühdosenproblem mit weiteren Einschränkungen unter dem Begriff *Milling Problem* in [1] untersucht. Für Überdeckungen durch ein Einheitsquadrat konnten sie für allgemeine Umgebungen die NP-Härte nachweisen, ein Beweis für einfache Umgebungen (ohne Löcher) steht hingegen noch aus.

Kapitel 4

Optimale Überdeckungen

Mit unserem im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Kostenmodell wollen wir nun für bestimmte μ optimale Wege untersuchen.

4.1 Der einfache Fall $\mu = 0$

Der einfachste Fall für unser k_μ -Maß ist $\mu = 0$:

$$k_0(p) = k_{trans}$$

Es zählt bei den Kosten also lediglich die vom Mittelpunkt des Liniensegments zurückgelegte Strecke. Durch den fehlenden Kostenfaktor k_{rot} können wir das Liniensegment während der Bewegung quasi wie einen Propeller schnell rotieren lassen, womit wir den Spezialfall der Überdeckung durch eine Kreisscheibe haben.

Genau genommen ist es dabei gar nicht nötig, das Liniensegment schnell rotieren zu lassen, die Rotationskosten lassen sich durch den Pfad des Liniensegmentmittelpunkts abschätzen. Solange wir lediglich das Liniensegment während der Bewegung orthogonal zum Pfad ausrichten, erzielen wir schon eine maximale Überdeckung, wie Abbildung 4.1 zeigt. Wenn wir also Abschätzungen bezüglich des Kurvenverhaltens des Pfads machen können, wächst k_{rot} nicht zwangsläufig über jede Schranke.

Die Frage nach einer optimalen Überdeckung durch Bewegung einer Kreisscheibe ist bisher nur als Randthema in [1] beim Rasenmäherproblem aufgetaucht, wo es zumeist um Überdeckungen durch ein Quadrat geht. Daher soll diese Problemstellung hier vertieft werden.

4.1.1 Einige Beispiele

Zunächst werfen wir einen Blick auf einige einfache Umgebungen und wie optimale Rundtouren in ihnen aussehen.

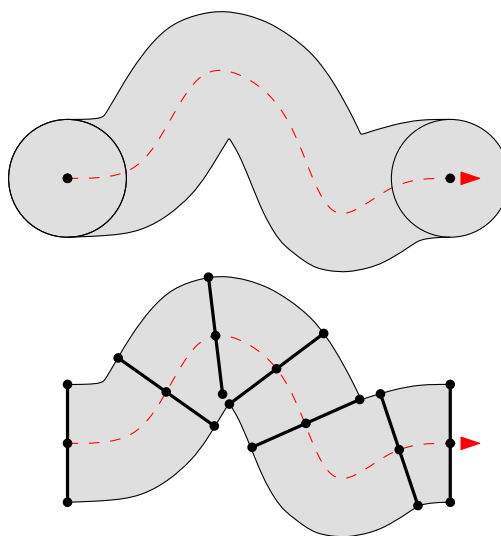


Abbildung 4.1: Richtet man bei Ablaufen eines Pfades das Liniensegment orthogonal zum Pfad aus, ergibt sich dieselbe Überdeckung wie durch eine Kreisscheibe. Bei Betrachtung von Rundtouren entstehen auch am Start- und Zielpunkt keine Unterschiede.

Um in einfachen Umgebungen optimale Pfade zu finden, macht es als ersten Ansatz Sinn, sich markante Punkte der Umgebung auszuwählen und zu diesen Punkten Konturen einzuzichnen, welche mit dem Mittelpunkt des Liniensegments überfahren werden müssen, um die markanten Punkte abzudecken.

Zu einem Einheitsquadrat können wir die Eckpunkte als markante Punkte auswählen. Als Konturen um diese Punkte ergeben sich Kreise mit Radius $\frac{1}{2}$. Eine Rundtour muss also mindestens jeden dieser vier Kreise berühren. Abbildung 4.2 zeigt zwei mögliche Rundtouren für ein Einheitsquadrat. Wir können nachweisen, dass die zweite Rundtour optimal ist: für eine Überdeckung müssen die vier Kreise mindestens berührt werden. Da sich die Kreise nicht überlappen und eine optimale Tour keine Selbstschnitte aufweisen wird, besucht die Tour die Kreise der Reihe nach. Weil eine global optimale Tour auch lokal optimal ist, müssen weiterhin an den Berührungspunkten zu den Kreisen die Eingangswinkel gleich den Ausgangswinkeln sein. Andererseits ließe sich eine Verkürzung vornehmen. De facto verläuft die Tour also im Rechteck zwischen den Kreisen. Abbildung 4.2 (i) zeigt das eine Extrem, einen einfachen Hin- und Rückweg, Abbildung 4.2 (ii) das andere Extrem: ein Quadrat. Die menschliche Intuition lässt auf minimale Kosten für die quadratische Tour schließen. Formal beweisen ließe sich dies durch Aufstellung einer Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Höhe des Rechtecks mit Hilfe von Sinus- und Cosinussatz. Diese Kostenfunktion wird unter ihren

Extremwerten als einziges Maximum eine Höhe von $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ angeben, was der quadratischen Tour entspricht.

Man sieht schnell, dass alle untersuchten rechteckigen Touren auch ausreichend sind, um die gesamte übrige Fläche abzudecken, womit eine gesamtoptimale Tour gefunden wäre.

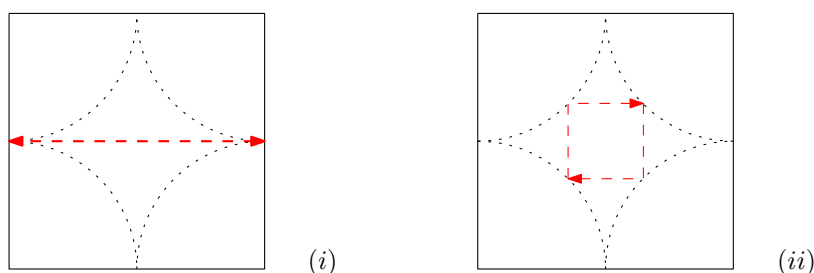


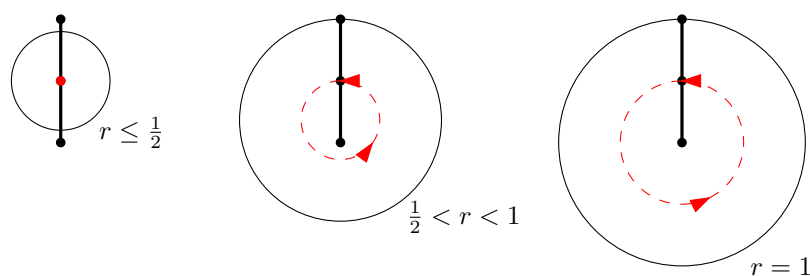
Abbildung 4.2: Zwei mögliche Rundtours im Einheitsquadrat, die zweite ist optimal.

Für kreisförmige Umgebungen können wir ähnlich verfahren. Hier können wir den gesamten Kreisrand als markante Punktmenge ansehen. Wir erhalten eine innere Kontur, welche wir mit dem Mittelpunkt des Liniensegments mindestens umlaufen müssen, um den gesamten Kreisrand einzusehen. Bei einem Kreis mit Radius r um den Mittelpunkt m entspricht die innere Kontur genau dem Kreis mit Radius $r - \frac{1}{2}$ um den Mittelpunkt m .

Für kreisförmige Umgebungen mit einem Radius kleiner oder gleich $r \leq \frac{1}{2}$ ergibt sich als innere Kontur keine Fläche mehr, es genügt dem Liniensegment, an einer Stelle zu verweilen und nur zu rotieren. Damit sind die Kosten gleich null. Erst ab einem Kreisradius $r > \frac{1}{2}$ erhalten wir eine flächige innere Kontur und müssen auf Translationsbewegungen zurückgreifen, durch welche uns Kosten entstehen.

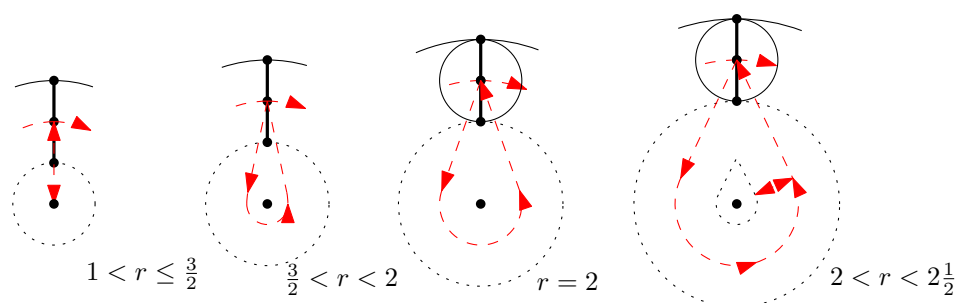
Bei einem Kreis mit Radius $r \leq 1$ sieht man schnell, dass mit dem Umlaufen der inneren Kontur auch das übrige Kreisinnere abgedeckt wird. Aber ist damit eine optimale Tour gefunden? Wir wissen, dass wir um alle Randpunkte abzudecken mindestens jeden der gedachten Einheitskreise mit Mittelpunkt auf dem Rand von F schneiden müssen. Solch eine Tour wird kreuzungsfrei sein, ansonsten könnten wir sie an der Schnittstelle auftrennen und verkürzen. Weiterhin wird die Tour konvex sein: wäre sie es nicht, könnten wir - da es uns nur um die Abdeckung der konvexen Randmenge von F geht - sie entsprechend zu einer konvexen Tour verkürzen. Umgekehrt müssen wir, um alle Randpunkte einsehen zu können, an jeder Stelle der Tour einen Durchmesser von mindestens $2r - 1$ haben, womit nun klar ist, dass die Touren aus Abbildung 4.3 optimal sind.

Für Kreise größer dem Einheitskreis reicht ein Ablaufen der inneren Kontur offensichtlich nicht mehr aus, es entsteht ein nicht abgedeckter Kreis-

Abbildung 4.3: Optimale Wege für Kreise mit Radius $r \leq 1$.

förmiger Bereich im Inneren. Die Vermutung liegt nahe, dass ein Umlaufen der inneren Kontur Teil eines optimalen Weges sein muss, damit alleine der äußere Kreisrand eingesehen werden kann. Misst der nun verbliebene innere Kreis im Durchmesser weniger als eine Einheit, genügt es uns, einmal ins Innere Abzubiegen und (um eine Rundtour zu gewährleisten) auf gleichem Wege wieder zurückzukehren.

Ist der Kreisradius der abzudeckenden Fläche insgesamt größer als $\frac{3}{2}$, ist der verbleibende Innenkreis nach der ersten äußeren Umrundung im Durchmesser größer als eine Einheit. Hier kann zur verbliebenen noch abzudeckenden Fläche erneut eine innere Kontur gedacht werden, welche komplett umrundet werden muss. Dabei starten wir von einem beliebigen Punkt der äußeren Umrundung und bilden mit der inneren Kontur des verbliebenen Bereichs die konvexe Hülle, welche den kürzesten Weg zum Abdecken des inneren Bereichs beschreibt. In Fortführung obiger Überlegungen ergibt sich ebenso noch eine Strategie bis $r = 2\frac{1}{2}$, indem erneut der innere noch nicht observierte Bereich durch direkten Hin- und Rückweg abgedeckt wird.

Abbildung 4.4: Vermutlich optimale Wege für Kreise mit Radius bis $r \leq 2\frac{1}{2}$.

Obwohl es wünschenswert wäre, aus diesen Beobachtungen nun rekursive oder iterative Strategien für beliebig große Kreise oder Quadrate abzuleiten, ist dies bisher nicht gelungen. Erweitern wir den Durchmesser, erhalten wir

als innere noch abzudeckende Flächen keine Kreise und Quadrate mehr, sondern tropfen- oder sternförmige Flächen. Es ist nicht ohne weiteres aus dem Stand zu beantworten, wie man hier weiter vorgehen müsste. Abbildung 4.5 zeigt dieses Verhalten für Kreise und Quadrate.

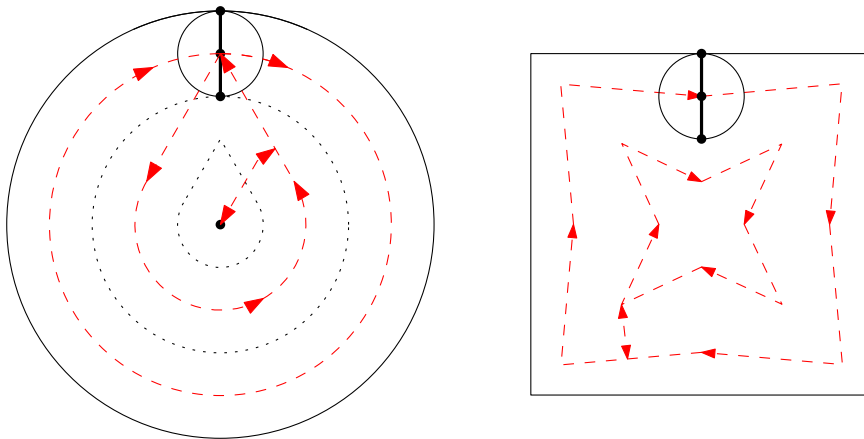


Abbildung 4.5: Rekursive Strategien zur Abdeckung von größeren Kreisen und Quadraten.

4.1.2 Lösungsverfahren für beliebige Umgebungen

Nachdem wir für konkrete Beispielumgebungen gesehen haben, dass schon für sehr spezielle Flächen die Frage nach kürzesten Wegen nicht trivial beantwortbar ist, soll erforscht werden, inwiefern ein allgemeines Verfahren zur Lösung existieren kann und welche Laufzeiten es erzeugt.

Zunächst einmal ist festzustellen, dass schon zu einfachen Probleminstanzen alleine die Ausgabe der Lösung sehr komplex werden kann. Abbildung 4.6 zeigt, dass mitunter selbst für konstant große Problembeschreibungen (4 Rechteckkoordinaten) eine Lösung unbeschränkt viele Einzelsegmente benötigt.

Dieser Umstand steht zunächst dem Wunsch nach einem allgemeinen Verfahren in Polynomzeit im Wege. Dennoch wäre ein nicht exponentielles Wachstum der Laufzeit denkbar. Einerseits könnte die Lösung - also die Beschreibung des Weges - rekursive Strukturen enthalten. Andererseits wäre auch eine Abschätzung denkbar, bei welcher wir Teile der Eingabegrößen mit einfließen lassen, um so eine pseudopolynomielle Laufzeit zu erhalten.

Doch beide Ansätze können nicht zum Ziel führen. Wie wir im Folgenden zeigen werden, ist das Überdeckungsproblem mit einem Liniensegment für das kumulative Kostenmaß mit $\mu = 0$ NP-Hart.

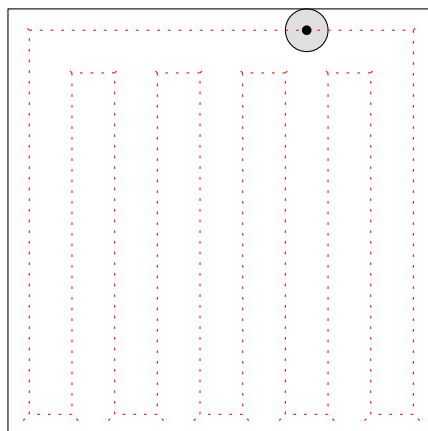


Abbildung 4.6: Eine Tour kann auch bei einfachen Umgebungen unbeschränkt viele Einzelsegmente erfordern.

4.1.3 NP-Härte

Der Beweis für die NP-Härte wird aus zwei Teilen bestehen. Zunächst werden wir eine spezielle Form von Graphen definieren, die *dicht verbundenen Hexgraphen*. Diese sind eine Untermenge der Hexgraphen, deren Knoten auf einem hexagonalen Gitter liegen. Zusätzlich ist solch ein Hexgraph dicht verbunden, wenn je zwei benachbarte Knoten durch eine Kante verbunden sind.

Islam, Meijer, Núñez, Rappaport und *Xiao* haben erst kürzlich in [11] gezeigt, dass das Hamiltonkreisproblem in Hexgraphen NP-Vollständig ist, indem sie eine Reduktion vom Hamiltonkreisproblem auf bipartiten, planaren Graphen vorgenommen haben. Genau genommen haben sie ihren Beweis auch für dicht verbundene Hexgraphen geführt, sind aber auf diesen speziellen Umstand nicht näher eingegangen. Insofern werden wir den Beweis an dieser Stelle erneut durchführen und dabei jeweils auch auf die dichte Verbundenheit eingehen.

Anschließend werden wir das Hamiltonkreisproblem in dichten Hexgraphen auf das Überdeckungsproblem mittels eines Liniensegments reduzieren. Damit weist unser Vorgehen auch Ähnlichkeiten zur Arbeit [1] von *Arkin* et al. auf, in welcher für einen quadratischen Mäher die NP-Härte mittels Reduktion vom Hamiltonkreisproblem auf bipartiten planaren Graphen gezeigt wurde. Dabei wurde ebenfalls der Umweg über Graphen genommen, im Fall quadratischer Mäher boten sich rechtwinklige Gittergraphen an.

Definition 8 Ein *Hexgraph* ist ein planarer, ungerichteter Graph, dessen Knoten auf den Knotenpunkten eines hexagonalen Gitters mit Kantenlängen 1 angeordnet sind und dessen Kanten die Länge 1 haben. Wir nennen einen

Hexgraphen *dicht verbunden*, wenn zwischen zwei Knoten mit Abstand 1 immer eine Kante existiert.

Abbildung 4.7 zeigt zwei Hexgraphen mit gleicher Knotenmenge. Einmal dicht verbunden und einmal nicht dicht verbunden.

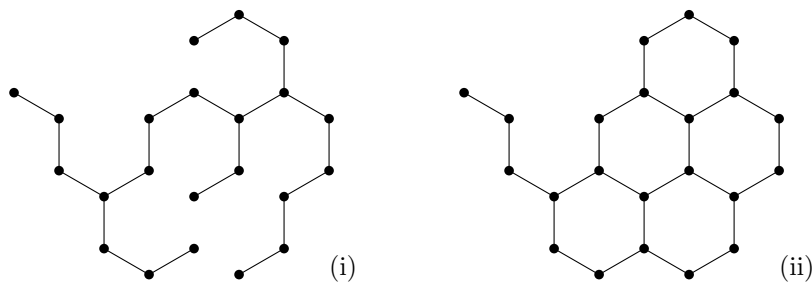


Abbildung 4.7: Ein Hexgraph (i) und ein dicht verbundener Hexgraph (ii) mit gleicher Knotenmenge.

Theorem 9 *Zu einer gegebenen Problem Instanz G des Hamiltonkreisproblems in planaren, bipartiten Graphen mit maximalem Knotengrad 3 existiert eine in Polynomzeit berechenbare Problem Instanz H des Hamiltonkreisproblems in dicht verbundenen Hexgraphen, so dass das Hamiltonkreisproblem im bipartiten Graphen genau dann eine Lösung hat, wenn es eine im Hexgraphen hat.*

Da für das Hamiltonkreisproblem in planaren, bipartiten Graphen mit maximalem Knotengrad 3 die NP-Vollständigkeit bekannt ist [12], würde Theorem 9 auch die NP-Vollständigkeit für dicht verbundene Hexgraphen implizieren.

Beweis. Für den Beweis von Theorem 9 nutzen wir sowohl die Planarität des gegebenen Graphen G als auch, dass er bipartit ist. Um zwischen den beiden bipartiten Knotenmengen zu unterscheiden, bezeichnen wir die Knoten als *hell* und *dunkel*.

Das Vorgehen des Beweises erfolgt in drei Schritten. Zunächst bringen wir den Graphen in eine rechteckige Form und leiten daraus eine wabenartige Struktur ab. Anschließend ersetzen wir die einzelnen Teile von G , also die hellen und dunklen Knoten sowie die in verschiedenen Winkeln verlaufenden Kanten durch bestimmte Bausteine, welche einen dicht verbundenen Hexgraphen ergeben.

Sowohl *Rosenstiehl* und *Tarjan* [17] als auch *Tamassia* und *Tollis* [20] haben gezeigt, wie man einen zusammenhängenden, planaren, bipartiten Graphen in eine rechteckige Form bringen kann. Die langgezogenen Knoten sind dabei in *st-Ordnung* in abwechselnd dunklen und hellen horizontalen Schichten angeordnet. Die Kanten verlaufen vertikal zwischen diesen

Schichten. Eine st -Ordnung bedeutet, dass es für die Knoten des Graphen eine Ordnung v_1, \dots, v_n mit Quellknoten $s = v_1$ und Talknoten $t = v_n$ gibt, so dass für jeden Knoten abgesehen von s und t je ein durch eine Kante verbundener Nachbar mit höherer und niedriger Nummer existiert.

Für einen nicht zusammenhängenden Graphen können diese Bedingungen nicht gelten, wie man sich einfach klar machen kann. Umgekehrt können wir diesen Fall insgesamt ausschließen, da das Hamiltonkreisproblem auf nicht zusammenhängenden Graphen trivial ist: es kann keine Rundtour durch alle Knoten geben.

Wir verschieben nun die im rechtwinkligen Graphen entstandenen Kanten ein wenig um eine Konfiguration von G zu erhalten, in welcher die Kanten Winkel von 60 oder 120 Grad aufweisen. Die Knoten werden dabei soweit nötig in der Breite angepasst. Die entstandene Einbettung des Graphen in die Ebene bezeichnen wir mit $D(G)$. Abbildung 4.8 zeigt diese für einen gegebenen Graphen.

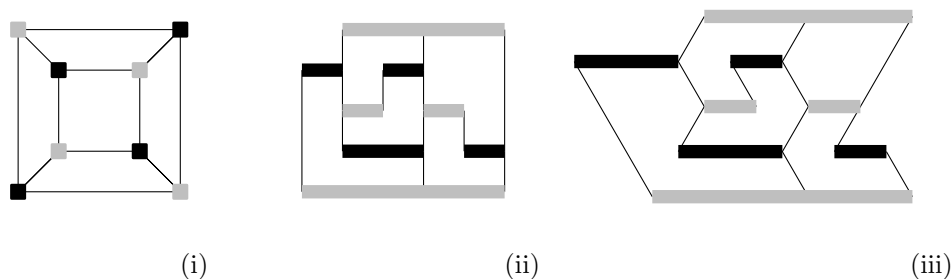


Abbildung 4.8: Ein gegebener bipartiter, planarer Graph G (i), seine rechtwinklige Version (ii) und die wabenartige Einbettung $D(G)$.

Die einzelnen Knoten in $D(G)$ haben maximal Knotengrad drei, aufgrund der st -Ordnung geht dabei abgesehen von den äußeren Knoten s und t bei einem Knotengrad von zwei jeweils eine Kante nach oben und nach unten. Bei einem Knotengrad von drei gehen insgesamt zwei Kanten nach oben und eine nach unten oder umgekehrt.

Nachdem diese Vorarbeit geleistet ist, können wir die einzelnen Teile von $D(G)$ durch Bausteine ersetzen, welche zusammen einen dicht verbundenen Hexgraphen ergeben.

Streifen: Einen Streifen benutzen wir, um eine Kante in $D(G)$ zu simulieren oder einen Knoten waagrecht in die Länge zu ziehen. Er besteht aus einer Reihe aneinandergesetzter Sechsecke. Streifen können jeweils waagrecht oder um 60 und 120 Grad gedreht eingesetzt werden. Für einen Hamiltonpfad gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, einen Streifen zu durchlaufen, um alle Knoten abzudecken: entweder mit einem geschwungenen sequentiellen Pfad oder mit zwei gradlinigen parallelen Pfaden. Dieses

Verhalten werden wir ausnutzen. Ein geschwungener Einzelpfad wird später eine im Hamiltonkreis von G benutzte Kante indizieren, parallele Pfade stehen für eine unbenutzte Kante. Abbildung 4.9 zeigt beide Möglichkeiten des Durchlaufs.

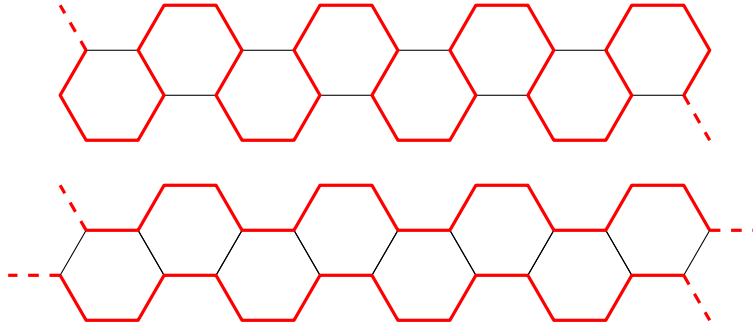


Abbildung 4.9: Ein Streifen, oben mit sequentiell und unten mit parallelem Durchlauf.

Rosette: Eine Rosette (siehe Abbildung 4.10) dient lediglich dazu, zwei um 60 Grad zueinander stehende Streifen zu verbinden. Dabei werden sowohl parallele Pfade als auch ein sequentieller Pfad unverändert durchgeleitet.

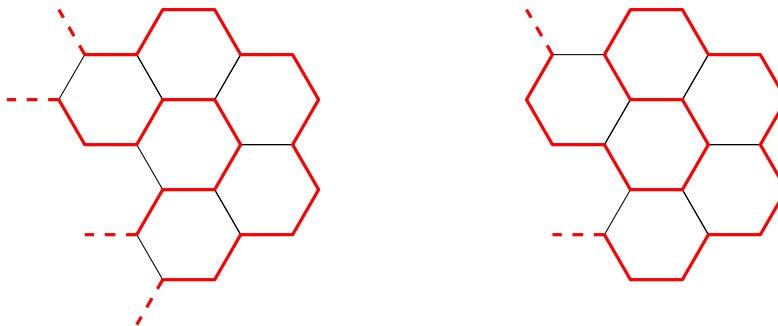


Abbildung 4.10: Ein Rosette, links mit sequentiell und rechts mit parallelem Durchlauf.

U-Turn: Ein U-Turn wird den dunklen Knoten bei jeder einkommenden Kante vorgeschaltet. Kommen durch die angrenzenden Streifen sequentielle Pfade, werden sie miteinander verbunden. Kommen zwei parallele Pfade von den angrenzenden Streifen, trennt sie der U-Turn voneinander und verbindet bei jedem der beiden parallelen Pfade seine Enden. Für die drei Eingänge eines Knotens werden die U-Turns entsprechend um 0, 60 und 120 Grad gedreht. Abbildung 4.11 zeigt zwei U-Turns mit paralleler Trennung und sequentiell Durchlauf.

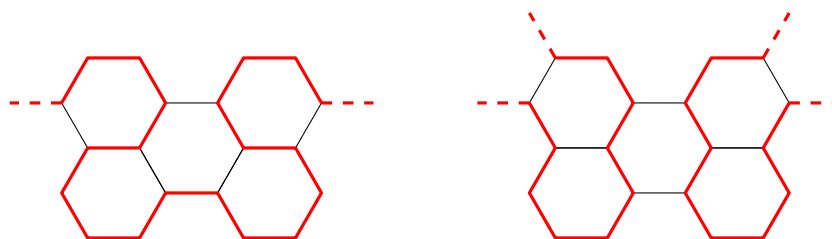


Abbildung 4.11: Ein U-Turn, links mit durchgeleitetem Pfad und rechts zur Trennung zweier paralleler Pfade.

Kern: Ein aus drei Sechsecken bestehender Kern simuliert einen Knoten mit drei eingehenden Kanten. An zweien der beiden Eingänge wird jeweils ein sequentieller Pfad erwartet, an dem dritten Ausgang ein paralleler Pfad. Damit die Streifen jeweils passen, sind helle und dunkle Kerne zueinander gespiegelt. Abbildung 4.12 zeigt einen dunklen und einen hellen Kern mit jeweils einem möglichen Durchlauf.



Abbildung 4.12: Ein dunkler (links) und ein heller (rechts) Kern mit jeweils einem möglichen Durchlauf.

Aus den vier oben beschriebenen Bauteilen können wir nun einen Hexgraphen H nachbauen, der $D(G)$ simuliert: die Knoten von H ersetzen wir durch Kerne, dunklen Knoten schalten wir an allen drei Enden einen U-Turn vor. Mit Hilfe von Streifen und Rosetten werden genau die Kerne miteinander verbunden, dessen zugehörige Knoten in H durch eine Kante verbunden sind. Insbesondere ist H auch dicht verbunden, da die verschiedenen Einzelteile dicht verbunden sind. An allen denkbaren Verbindungen der Einzelteile werden jeweils auch keine nicht dicht verbundenen Knoten erzeugt. Abbildung 4.13 zeigt einen Ausschnitt eines so entstandenen H .

Islam et al. geben in [11] dabei in vertikaler Richtung einen Platzbedarf von $O(n)$ gegenüber dem rechtwinkligen Graphen G an. In horizontaler Richtung kann sich der Hexgraph bis zu $O(n^2)$ ausdehnen, womit insgesamt gegenüber dem rechtwinkligen Graphen ein Platzbedarf von $O(n^3)$ entsteht. Wie in [17, 20] gezeigt wurde, wächst die rechtwinklige Umsetzung von G

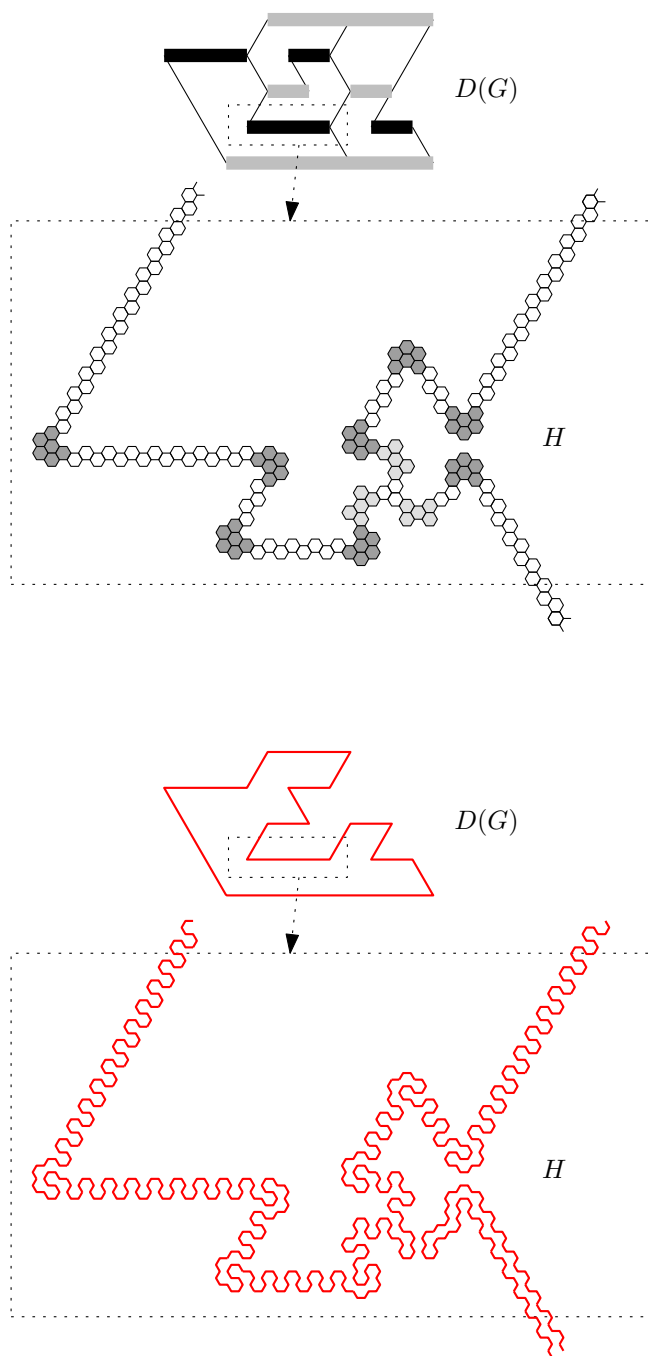


Abbildung 4.13: Ausschnitt aus H : ein Kern mit vorgeschalteten U-Turns und abgehenden Streifen, z.T. über Rosetten umgelenkt. Die entsprechenden Ausschnitte der Hamiltonkreise sind unten rot dargestellt.

nur linear mit seiner Ausgangsgröße.

Damit haben wir also insgesamt eine polynomielle Transformation zwischen einer Instanz des Hamiltonkreisproblems in planaren, bipartiten Graphen mit maximalem Grad 3 und einer Instanz des Hamiltonkreisproblems in dicht verbundenen Hexgraphen. Es verbleibt noch zu zeigen, dass es genau dann einen Hamiltonkreis im bipartiten Graphen gibt, wenn es einen Hamiltonkreis im Hexgraphen gibt.

Die *Hinrichtung* „ \Rightarrow “ ist dabei schnell bewiesen. Wie jeweils oben angegeben, kann jedes Bauteil in mehreren Arten durchlaufen werden. Lassen wir nun durch im Hamiltonkreis von G benutzte Kanten sequentielle Pfade und durch unbenutzte Kanten parallele Pfade laufen, entsteht in H ein Hamiltonkreis.

Die *Rückrichtung* „ \Leftarrow “ verlangt einen genaueren Blick auf die verschiedenen Bausteine von H . Angenommen, wir haben einen Hamiltonkreis in H . Ein Streifen kann nur in exakt zwei Weisen durchlaufen werden: parallel und sequentiell. Ebenso gilt dies auch für die Rosetten und U-Turns.

Für den Kern gibt es ebenso nur eingeschränkte Möglichkeiten durchlaufen zu werden. Hier müssen, wenn ein Hamiltonkreis existiert, an zwei Seiten sequentielle Pfade eingehen. Die dritte Seite muss einen parallelen Pfad haben. Somit haben wir in jedem Knoten eine Eingangs- und Ausgangskante für einen Hamiltonkreis in G gefunden. Da der Hamiltonkreis in H aus einer langen Rundtour und nicht mehreren kleinen Kreisen besteht, ergibt sich auch für G ein einziger großer Hamiltonkreis.

Damit wäre Theorem 9 bewiesen. □

Nachdem wir nun wissen, dass das Hamiltonkreisproblem in dicht verbundenen Graphen NP-Vollständig ist, werden wir eine weitere Reduktion auf Überdeckungen durch Liniensegmente durchführen.

Theorem 10 *Zu einer gegebenen Problem Instanz H des Hamiltonkreisproblems in dicht verbundenen Hexgraphen mit n Knoten existiert eine in Polynomzeit berechenbare Problem Instanz F des Überdeckungsproblems durch Bewegung eines Liniensegments, so dass der Hexgraph genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn das Überdeckungsproblem optimal mit einem Pfad der Länge n lösbar ist.*

Beweis. Zum Beweis von Theorem 10 geben wir F explizit an: Zu jedem der n Knoten des Hexgraphen H bilden wir einen Einheitskreis mit Mittelpunkt auf den entsprechenden Knoten. Die Vereinigung aller Kreise ergibt F . Abbildung 4.15 zeigt einen gegebenen dicht verbundenen Hexgraphen, Abbildung 4.16 die daraus entstandene abzudeckende Fläche F . Die Kanten von H haben nur indirekt Einfluss in F : da der Graph H dicht verbunden ist, muss zwischen je zwei benachbarten Knoten mit Abstand 1 auch eine Kante

existieren, insofern berühren sich die zugehörigen Einheitskreise zweier Knoten genau dann, wenn sie eine gemeinsame Kante haben. (An dieser Stelle sei noch einmal auf Definition 8 verwiesen: zwei benachbarte Knoten sind exakt eine Einheit voneinander entfernt.)

Nun bleibt zu beweisen, dass es genau dann einen Hamiltonkreis in H gibt, wenn in F eine optimale Überdeckungsrundtour mit Kosten n existiert.

Dabei hilft uns folgende Beobachtung: ein Einheitskreis kann nicht mit Translationskosten kleiner als $\frac{1}{2}$ abgedeckt werden, soweit man nicht im Inneren des Kreises startet. Wenn man davon ausgeht, dass noch weitere Kreise abgedeckt werden müssen, kommen Kosten von $\frac{1}{2}$ hinzu, um den Kreis wieder zu verlassen. Da die Kreise zueinander im Winkel von 120 Grad angeordnet sind, ergibt sich auch keine Möglichkeit, von mehreren Seiten nach und nach Teile des Kreises abzudecken. Eine optimale Tour führt durch den Mittelpunkt des Kreises.

Wenn wir nun einen Hamiltonkreis in H gegeben haben, und unser Liniensegment entlang diesem über F bewegen, decken wir F dabei komplett ab, wie Abbildung 4.17 zeigt.

Umgekehrt wissen wir für eine gegebene optimale Tour durch F nun, dass sie die Mittelpunkte der Kreise besucht, woraus sich ein Hamiltonkreis für H ergibt.

□

Abbildung 4.18 zeigt einen wie im obigen Beweis entstandenen Hamiltonkreis in H und die dazugehörige Umgebung F . Insgesamt fällt auf, dass F nicht einfach ist, also durchaus Löcher in seinem Inneren haben kann. Dies ist aber keine Eigenschaft, welche essentiell für den Beweis war. Es ist möglich, wie in Abbildung 4.14 gezeigt, die Kreise zu trennen oder sich minimal überlappen zu lassen, ohne die entstandene Rundtour in ihrem Gesamtverlauf zu beeinflussen. Dadurch ist es möglich, F zu einer einfachen Umgebung F' ohne Löcher zu transformieren. Insgesamt erhalten wir somit auch einen Beweis der np-Härte für einfache Umgebungen F' .

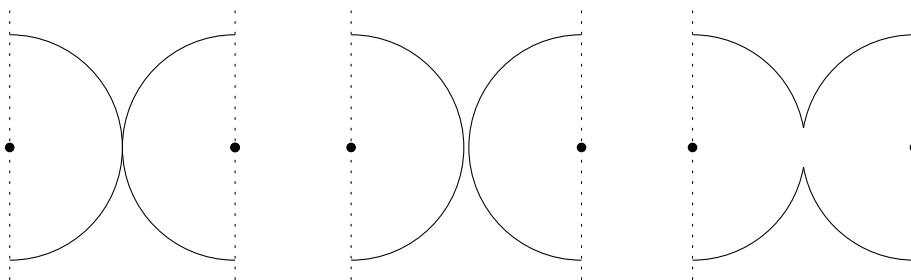


Abbildung 4.14: Durch leichtes Dehnen und Stauchen der Kreise lassen sich Überkappungen oder Trennungen erreichen.

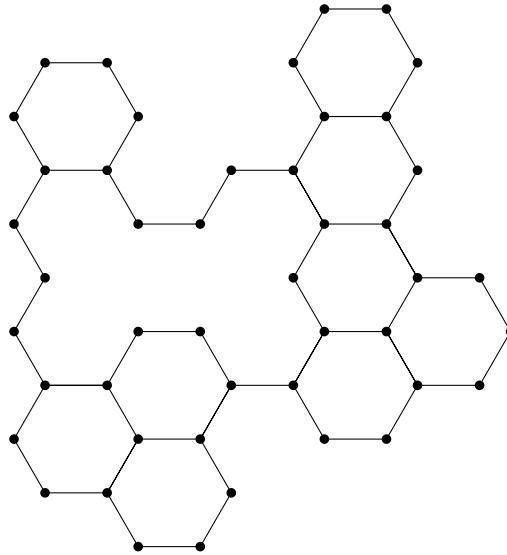


Abbildung 4.15: Ein gegebener dicht verbundener Hexgraph G .

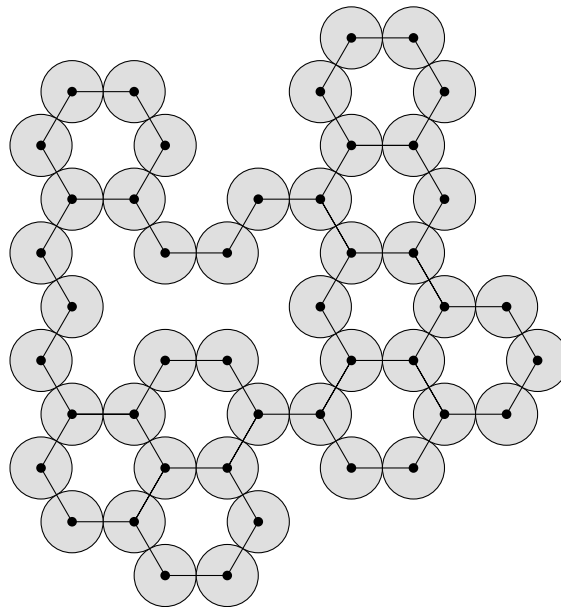


Abbildung 4.16: F entsteht durch Vereinigung der Einheitskreise um alle $g \in G$.

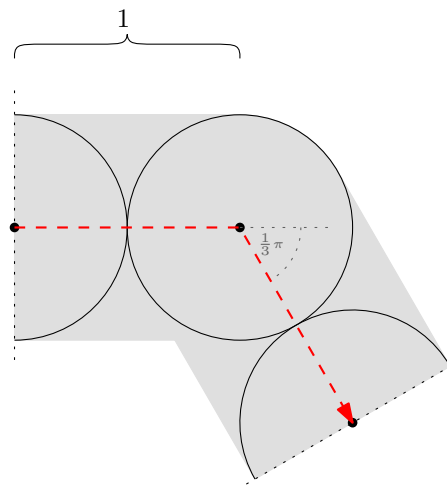


Abbildung 4.17: Bei einer Tour mit dem Liniensegment durch die Mittelpunkte der Kreise werden diese komplett abgedeckt. Umgekehrt muss eine optimale Tour die Kreismittelpunkte besuchen, um den ganzen Kreis abzudecken.

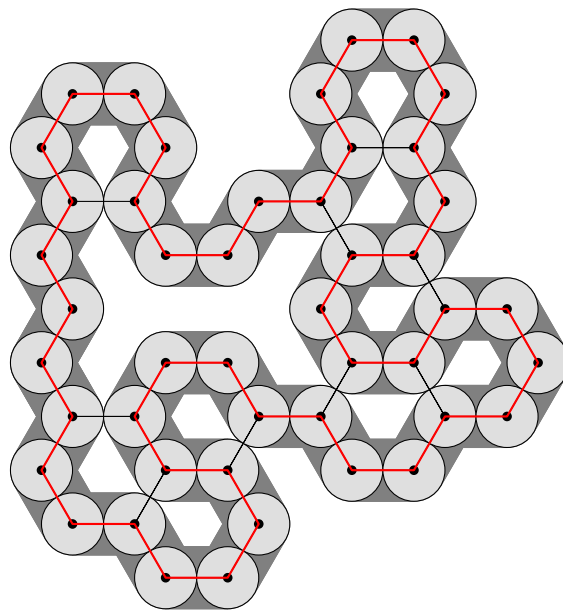


Abbildung 4.18: Eine optimale Rundtour durch F bildet auch einen Hamiltonkreis in H . Die durch das Liniensegment überdeckte Fläche ist dunkelgrau gekennzeichnet.

4.1.4 Zusammenfassung

Wir haben als Spezialfall bei der Überdeckung durch Liniensegmente ein Kostenmaß untersucht, bei dem nur die Translation in die letzten endes entstandenen Kosten eingeflossen ist. De facto handelte es sich somit eher um das Problem der Überdeckung von Flächen durch Bewegung einer Kreisscheibe. Wir haben gesehen, dass es schon für einfache abzudeckende Flächen schwer ist, optimale Wege anzugeben. Weiterhin haben wir herausgefunden, dass das Problem insgesamt NP-hart ist.

4.2 Der einfache Fall $\mu \rightarrow \infty$

Nachdem wir uns im vorangegangenen Abschnitt mit Pfaden befasst haben, bei welchen die Rotation nicht in die Kosten eingegangen ist, betrachten wir nun das andere Extrem: wir heben die Rotationskosten stark an und lassen sie über jede Schranke wachsen, genau genommen also gegen ∞ laufen. Daraus resultiert, dass uns lediglich Translationsbewegungen zur Verfügung stehen.

Es ist leicht einzusehen, dass wir ein optimales Verhältniss von Kosten zu überdeckter Fläche erhalten, wenn wir genau senkrecht zur Stellung des Liniensegments translatieren. Es scheint also, dass optimale Pfade in rechtwinkligen Umgebungen einfacher zu bestimmen sind.

4.2.1 Wege in Rechtecken

Betrachten wir ein Quadrat mit Seitenlängen 2. Eine mögliche Strategie ist in Abbildung 4.19 (i) gezeigt. Wenn man voraussetzt, dass das Liniensegment parallel zu einer der Quadratseiten steht, können wir zeigen, dass diese Strategie optimal ist: der hellgrau markierte Bereich ist genau die Fläche, welche vom Mittelpunkt des Liniensegments mindestens umlaufen werden muss, damit zumindest der Rand eingesehen werden kann. Da hierdurch allein schon eine gültige Überdeckung zustande kommt, ist die Tour optimal. Allerdings steht noch die Frage im Raum, warum das Liniensegment senkrecht stehen sollte.

Angenommen, wir lassen eine andere Startkonfiguration des Liniensegments zu. Dann verringert sich der Umfang des hellgrauen Bereichs, welcher mindestens umlaufen werden muss, um den Rand einzusehen. Unter allen möglichen Ausrichtungen des Liniensegments ergibt sich bei einem Winkel von $\frac{1}{4}\pi$ eine Fläche mit kleinstmöglichem Umfang: ein Quadrat mit Seitenlängen $2 - 2\frac{1}{\sqrt{8}}$, was einen Umfang von ca. 5,17 entspricht. Abbildung 4.19 (ii) zeigt diese Situation. Umgekehrt entsteht im Inneren eine in den Abbildungen dunkelgrau markierte Fläche, welche bei einer Umrundung des hellgrauen Bereichs nicht mit abgedeckt werden kann. Ihre breitere Seite misst mindestens $2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,586$, ihre schmalere Seite ist nur für eine

senkrechte oder waagerechte Stellung des Liniensegments gleich null. Es bleibt also kein anderer Ausweg, als nach der äußeren Umrundung der hellgrauen Fläche ins Innere abzubiegen, um anschließend noch die dunkelgraue Fläche abzudecken. Für eine Hin- und Rücktour entlang dieser kommen aber insgesamt Kosten größer als 6 zustande, was der optimalen Tour mit senkrecht ausgerichtetem Liniensegment entsprechen hat.

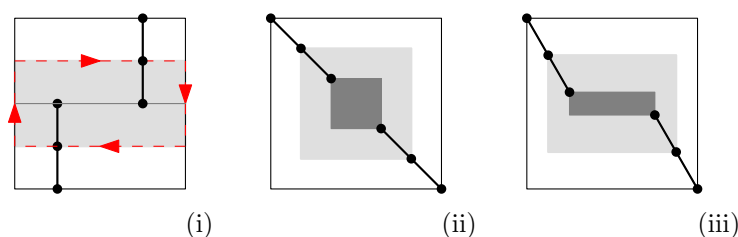


Abbildung 4.19: Touren im Quadrat bei verschiedenen Ausrichtungen des Liniensegments. Der hellgraue Bereich zeigt den Bereich, welcher vom Mittelpunkt des Liniensegments mindestens umfahren werden muss, um alle Randpunkte abdecken zu können. Der dunkelgraue Bereich zeigt, welche Punkte im Inneren dabei nicht eingesehen werden können.

Was gilt nun aber für beliebig große Rechtecke? Die Intuition sagt uns, dass auch hier das Liniensegment eine Stellung parallel zu einer der Rechteckwände einnehmen sollte. Auf einen vermutlich langwierigen Beweis hierfür soll an dieser Stelle verzichtet werden. Wir beschränken uns auf den Spezialfall, dass eine rechtwinklige Startausrichtung vorgegeben ist.

Es verbleibt unter dieser Einschränkung nur noch die Frage, ob das Liniensegment quer oder längs ausgerichtet werden soll. Je nach Ausrichtung des Rechtecks ergeben sich so nämlich zwei Strategien. Entweder wir laufen der Breite entlang, diese Strategie möchten wir *LANGE BAHNEN* bezeichnen oder wir laufen in kurzen Zügen die Schmalseite ab, diese Strategie soll als *KURZE BAHNEN* bezeichnet werden. Sind wir am Ende einer Bahn angekommen, wird eine Einheit quer zur Bahn translatiert und die nun freiliegende Bahn abgelaufen. Am anderen Ende des Rechtecks angekommen, wird auf direktem Wege zurückgekehrt. Abbildung 4.20 zeigt beide Strategien für unterschiedliche Rechtecke. Wir beschränken uns im Folgenden auf Rechtecke mit Längen aus \mathbb{N} . Für reelle Längen gelten im Wesentlichen dieselben Abschätzungen, wobei vereinzelt auf ganze Längen aufgerundet werden muss.

Machen wir uns klar, welche Kosten durch beide Strategien verursacht werden. Bezeichne h die Höhe, also die Länge der schmalen Seite, und b die Länge der breiteren Seite des Rechtecks, dann ergeben sich für die einzelnen

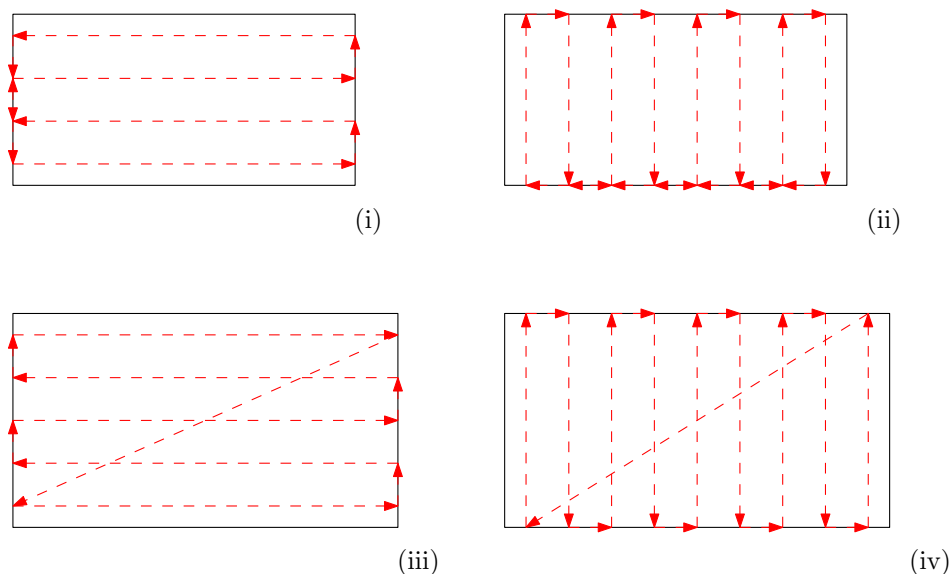


Abbildung 4.20: Die zwei Strategien LANGE BAHNEN (i),(iii) und KURZE BAHNEN (ii),(iv) im Rechteck, jeweils mit gerader (i),(ii) und ungerader Anzahl Bahnen (iii),(iv).

Strategien:

$$k_{\text{LANGE BAHNEN}} = h \cdot b + (h - 1) + \begin{cases} (h - 1), & \text{wenn } h \text{ gerade} \\ \sqrt{(h - 1)^2 + b^2}, & \text{wenn } h \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$k_{\text{KURZE BAHNEN}} = b \cdot h + (b - 1) + \begin{cases} (b - 1), & \text{wenn } b \text{ gerade} \\ \sqrt{(b - 1)^2 + h^2}, & \text{wenn } b \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir können zeigen, dass für Rechtecke mit gerader Höhe die Strategie LANGE BAHNEN optimal ist:

Die Gesamtkosten für eine optimale Überdeckung setzen sich aus verschiedenen Summanden zusammen. Zunächst erzeugt das Abdecken jeder beliebigen Fläche mindestens Kosten in Höhe ihres Flächenmaßes, da wir im optimalen Fall bei Translation orthogonal zur Ausrichtung mit Kosten 1 eine Fläche von 1 abdecken. Dadurch ergeben sich Kosten im Rechteck von $h \cdot b$. Weiterhin müssen wir mindestens eine der beiden Seiten des Rechtecks einmal hin- und zurücklaufen, um den oberen und unteren Rand einsehen zu können, dabei kommt uns die Länge des Liniensegments von 1 zugute, wodurch zusammen Kosten von $2 \cdot (\min(h, b) - 1)$ entstehen. Da $h < b$ ist, erhalten wir genau identische Kosten wie bei LANGE BAHNEN.

Was passiert aber für ungerades b ? Hier können wir zwei weitere Fälle unterscheiden: entweder die zugehörige Höhe ist ungerade oder gerade. Für

ungerade Höhen müssen beide Strategien den Rückweg quer durchs Rechteck nehmen. Durch eine Abschätzung lässt sich zeigen, dass auch hier die Strategie LANGE BAHNEN günstiger ist:

$$\begin{aligned}
& h \cdot b + (h-1) + \sqrt{(h-1)^2 + b^2} \stackrel{!}{\leq} b \cdot h + (b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + h^2} \\
& \iff h + \sqrt{(h-1)^2 + b^2} \stackrel{!}{\leq} b + \sqrt{(b-1)^2 + h^2} \\
& \iff \sqrt{(h-1)^2 + b^2} \stackrel{!}{\leq} (b-h) + \sqrt{(b-1)^2 + h^2} \\
& \text{Da } b \geq h \text{ also } (b-h) \geq 0 \text{ dürfen wir quadrieren:} \\
& \iff (h-1)^2 + b^2 \stackrel{!}{\leq} ((b-h) + \sqrt{(b-1)^2 + h^2})^2 \\
& \iff (h-1)^2 + b^2 \stackrel{!}{\leq} ((b-h) + \sqrt{(b-1)^2 + h^2})^2 \\
& \iff 2bh - 2h - b^2 - h^2 + 2b \stackrel{!}{\leq} 2(b-h)\sqrt{(b-1)^2 + h^2} \\
& \iff (2bh - 2h - b^2 - h^2 + 2b)^2 \stackrel{!}{\leq} (2(b-h)\sqrt{(b-1)^2 + h^2})^2 \\
& \iff b^4 - 4b^3 - 4b^3h + 4b^2 + 12b^2h + 6b^2h^2 - 8bh - 12bh^2 + 4h^2 - 4bh^3 + 4h^3 + h^4 \\
& \stackrel{!}{\leq} \\
& 4b^4 - 8b^3 - 8b^3h + 4b^2 + 16b^2h + 8b^2h^2 - 8bh - 8bh^2 + 4h^2 - 8bh^3 + 4h^4 \\
& \iff 0 \stackrel{!}{\leq} 3b^4 - 4b^3 - 4b^3h + 4b^2h + 2b^2h^2 + 4bh^2 - 4bh^3 - 4h^3 + 3h^4 \\
& \iff 0 \stackrel{!}{\leq} 3b^4 - 4b^3 - 4b^3b + 4b^2b + 2b^2b^2 + 4bb^2 - 4bb^3 - 4b^3 + 3b^4 \\
& \iff 0 \stackrel{!}{\leq} 3b^4 - 4b^4 - 4b^4 + 2b^4 + 3b^4 - 4b^3 + 4b^3 - 4b^3 + 4b^3 \\
& \iff 0 \leq 0
\end{aligned}$$

Als letzter Fall bleibt ein Rechteck mit ungerader Breite und gerader Höhe. Hier lässt sich keine feste Abschätzung finden. Je nachdem, wie nah sich b und h kommen, kann es passieren, dass hier KURZE BAHNEN besser abschneidet als LANGE BAHNEN, da letztere Strategie statt einem geraden Rückweg eine Diagonale nehmen muss. Abbildung 4.21 und Abbildung 4.22 zeigen in tabellarischer Form die Differenzen zwischen den Kosten beider Strategien für Rechtecke mit Höhen und Breiten von einer bis sechzig Einheiten. Die grau hervorgehobenen Felder markieren die Quadrate, hier liefern beide Strategien identische Ergebnisse. Die rot hervorgehobenen Felder zeigen geringere Kosten für KURZE BAHNEN. Man erkennt gut, wie sich diese nahe der Diagonale bei ungeraden Breiten und geraden Höhen häufen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,00	0,00	1,24	2,00	3,12	4,00	5,08	6,00	7,06	8,00	9,05	10,00	11,04	12,00	13,04
2	0,00	0,00	2,83	4,00	6,47	8,00	10,32	12,00	14,25	16,00	18,20	20,00	22,17	24,00	26,14
3	1,24	2,83	0,00	-0,47	1,61	1,68	3,43	3,75	5,32	5,80	7,26	7,83	9,22	9,86	11,19
4	2,00	4,00	-0,47	0,00	3,66	4,00	7,21	8,00	10,94	12,00	14,77	16,00	18,65	20,00	22,56
5	3,12	6,47	1,61	3,66	0,00	-1,21	1,75	1,06	3,59	3,23	5,48	5,35	7,40	7,44	9,34
6	4,00	8,00	1,68	4,00	-1,21	0,00	4,49	4,00	8,00	8,00	11,66	12,00	15,42	16,00	19,23
7	5,08	10,32	3,43	7,21	1,75	4,49	0,00	-2,00	1,81	0,34	3,68	2,58	5,57	4,77	7,50
8	6,00	12,00	3,75	8,00	1,06	4,00	-2,00	0,00	5,31	4,00	8,81	8,00	12,42	12,00	16,12
9	7,06	14,25	5,32	10,94	3,59	8,00	1,81	5,31	0,00	-2,81	1,85	-0,42	3,74	1,88	5,64
10	8,00	16,00	5,80	12,00	3,23	8,00	0,34	4,00	-2,81	0,00	6,14	4,00	9,62	8,00	13,20
11	9,05	18,20	7,26	14,77	5,48	11,66	3,68	8,81	1,85	6,14	0,00	-3,62	1,88	-1,20	3,78
12	10,00	20,00	7,83	16,00	5,35	12,00	2,58	8,00	-0,42	4,00	-3,62	0,00	6,97	4,00	10,44
13	11,04	22,17	9,22	18,65	7,40	15,42	5,57	12,42	3,74	9,62	1,88	6,97	0,00	-4,44	1,90
14	12,00	24,00	9,86	20,00	7,44	16,00	4,77	12,00	1,88	8,00	-1,20	4,00	-4,44	0,00	7,80
15	13,04	26,14	11,19	22,56	9,34	19,23	7,50	16,12	5,64	13,20	3,78	10,44	1,90	7,80	0,00

Abbildung 4.21: Differenzen der Kosten für die Strategien LANGE BAHNEN und KURZE BAHNEN in Rechtecken bis zu einer Seitenlänge von 15 tabellarisch zusammengefasst.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,00	0,00	1,24	2,00	3,12	4,00	5,08	6,00	7,06	8,00	9,05	10,00	11,04	12,00	13,04
2	0,00	0,00	2,83	4,00	6,47	8,00	10,32	12,00	14,25	16,00	18,20	20,00	22,17	24,00	26,14
3	1,24	2,83	0,00	-0,47	1,61	1,68	3,43	3,75	5,32	5,80	7,26	7,83	9,22	9,86	11,19
4	2,00	4,00	-0,47	0,00	3,66	4,00	7,21	8,00	10,94	12,00	14,77	16,00	18,65	20,00	22,56
5	3,12	6,47	1,61	3,66	0,00	-1,21	1,75	1,06	3,59	3,23	5,48	5,35	7,40	7,44	9,34
6	4,00	8,00	1,68	4,00	-1,21	0,00	4,49	4,00	8,00	8,00	11,66	12,00	15,42	16,00	19,23
7	5,08	10,32	3,43	7,21	1,75	4,49	0,00	-2,00	1,81	0,34	3,68	2,58	5,57	4,77	7,50
8	6,00	12,00	3,75	8,00	1,06	4,00	-2,00	0,00	5,31	4,00	8,81	8,00	12,42	12,00	16,12
9	7,06	14,25	5,32	10,94	3,59	8,00	1,81	5,31	0,00	-2,81	1,85	-0,42	3,74	1,88	5,64
10	8,00	16,00	5,80	12,00	3,23	8,00	0,34	4,00	-2,81	0,00	6,14	4,00	9,62	8,00	13,20
11	9,05	18,20	7,26	14,77	5,48	11,66	3,68	8,81	1,85	6,14	0,00	-3,62	1,88	-1,20	3,78
12	10,00	20,00	7,83	16,00	5,35	12,00	2,58	8,00	-0,42	4,00	-3,62	0,00	6,97	4,00	10,44
13	11,04	22,17	9,22	18,65	7,40	15,42	5,57	12,42	3,74	9,62	1,88	6,97	0,00	-4,44	1,90
14	12,00	24,00	9,86	20,00	7,44	16,00	4,77	12,00	1,88	8,00	-1,20	4,00	-4,44	0,00	7,80
15	13,04	26,14	11,19	22,56	9,34	19,23	7,50	16,12	5,64	13,20	3,78	10,44	1,90	7,80	0,00

Abbildung 4.22: Ein weiter gefasster Ausschnitt der Tabelle aus Abbildung 4.21.

4.2.2 Wege in Polygonen

Nachdem wir für einfache, ganzzahlig große Rechtecke gesehen haben, dass sich optimale Wege relativ einfach bestimmen lassen, möchten wir nun allgemeinere Umgebungen untersuchen.

Um das Problem so einfach wie möglich zu halten, erweitern wir es dabei nur vorsichtig. F sei ein rechtwinkliges Polygon, welches seine Ecken auf einem quadratischen Gitter mit Punktabstand 1 liegen haben soll. Um weiter zu vereinfachen, sei F y -monoton und die Höhe n von F gerade sowie die schmalste Stelle von F breit genug, dass die so entstandenen Bahnen, aus denen F besteht, zur Hälfte von links nach rechts und zur anderen Hälfte von rechts nach links abgelaufen werden.

Erneut halten wir an der Vorgabe fest, dass das Liniensegment senkrecht ausgerichtet ist. Die Vermutung liegt nahe, dass bei einer ausreichenden Breite von F eine optimale Strategie das Liniensegment ohnehin senkrecht stellen würde.

Eine erste Idee wäre, unsere Erfahrungen mit Rechtecken einzubringen und die Strategie LANGE BAHNEN anzupassen. Am Ende jedes Bahndurchlaufs wird nicht mehr exakt orthogonal zu den Bahnen translatiert sondern auch quer bis zum Startpunkt der nächsten Bahn, wie Abbildung 4.23 (i) für eine Beispielumgebung zeigt.

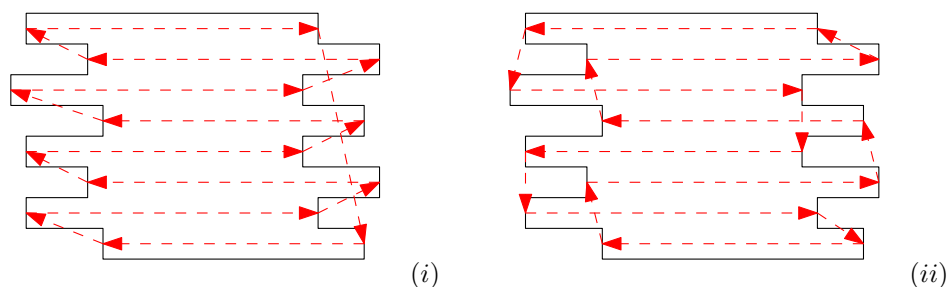


Abbildung 4.23: Zwei mögliche Abdeckungen für eine rechtwinklige, auf einem Gitter ausgerichtete und y -monotone Umgebung.

Dieses Vorgehen scheint aber nicht sonderlich klug zu sein, da wir einen wesentlichen Freiheitsgrad unserer Tour verschenken: den Rückweg. Während es im Rechteck keinen Vorteil gebracht hat, die Bahnen teilweise auf dem Hinweg und teilweise auf dem Rückweg abzulaufen, kann es uns in diesem Fall zum Vorteil gereichen. Abbildung 4.23 (ii) zeigt, wie hier die Wege zwischen den einzelnen Bahnabschnitten verkürzt werden können.

Wir können das Problem graphentheoretisch betrachten. Bezeichne $L = l_1, \dots, l_n$ die Mittelpunkte der Enden der n Bahnen auf der linken Seite, analog dazu $R = r_1, \dots, r_n$ die gegenüberliegenden Punkte. Dann besteht die Knotenmenge $V = L \cup R$ aus der Vereinigung von L und R . Als Kanten fügen

wir zunächst die abzulaufenden Bahnen hinzu - wir nennen sie *Bahnkanten*, weiterhin kann von jedem Randpunkt zu jedem anderen Randpunkt der gleichen Seite gelaufen werden, diese nennen wir *Verbindungskanten*. Es ergibt sich als Knotenmenge

$$E = \underbrace{\{(l_i, r_i)\}}_{\text{Bahnkanten}} \cup \underbrace{\{(l_j, l_k)\} \cup \{(r_j, r_k)\}}_{\text{Verbindungskanten}} \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$$

Da wir in diesem Graphen nach kürzesten Wegen suchen werden, gewichten wir die Kanten entsprechend. Die Verbindungskanten erhalten als Gewicht ihren Euklidischen Abstand zueinander. Für die Bahnkanten wählen wir eine hohe, negative Konstante im Betrag größer als die Summe aller Verbindungskanten. Brechen wir eine der Bahnkanten zwischen L und R auf und fügen zwischen ihr Start- und Zielknoten s und t ein, wird ein kürzester Weg zwischen s und t mit Sicherheit jede der Bahnkanten ablaufen.

Insgesamt erhalten wir einen gewichteten, in die Ebene eingebetteten Graphen mit $|V| = 2n + 1$ Knoten und $|E| = n + 1 + n(n - 1)$ Kanten (Siehe Abbildung 4.24), in welchem wir einen minimalen Pfad von s nach t suchen.

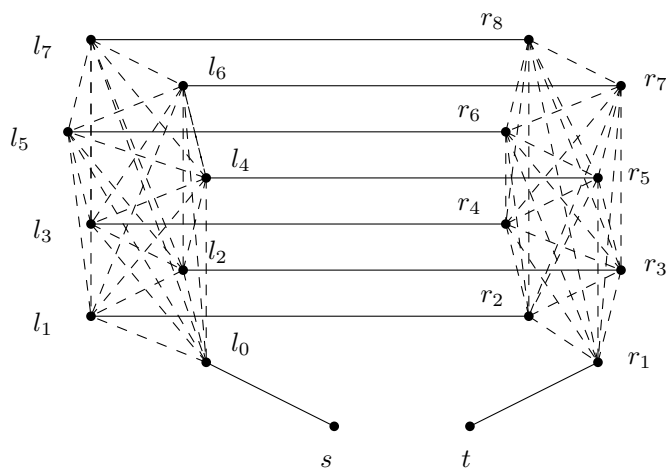


Abbildung 4.24: Die Darstellung der rechtwinkligen, auf einem Gitter ausgerichteten und y -monotonen Umgebung als Graph..

Eine *brute force* Strategie wird uns in Anbetracht der exponentiell vielen Lösungsmöglichkeiten nicht weiterbringen. Da der Graph negative Gewichte enthält, kommt auch ein weiteres Vorgehen mit dem Algorithmus von Dijkstra nicht in Frage. Da ohne Frage Zyklen mit negativem Gewicht enthalten sind, hilft ebensowenig der Bellman-Ford-Algorithmus. Die Frage nach kürzesten *einfachen* Wegen in Graphen - also solchen, die keine Kante mehr als einmal ablaufen - ist unter dem Namen *Elementary shortest path problem* bekannt. Leider ist dieses in seiner Reinform NP-hart [5], womit wir an dieser Stelle gescheitert wären.

Wir müssen uns also fragen, ob optimale Pfade Eigenschaften aufweisen, welche uns die Berechenbarkeit vereinfachen. Eine allgemeine Eigenschaft bei kürzesten Pfaden in der Ebene ist, dass sie keine Selbstschnitte aufweisen. Am Schnittpunkt könnte man die Pfade auch auftrennen und parallel verlaufen lassen. Dieses Prinzip ist beim Überdeckungsproblem ebenfalls zu beobachten: schneiden sich zwei der Verbindungskanten, können wir sie auftrennen und parallel verbinden, wie Abbildung 4.25 zeigt.

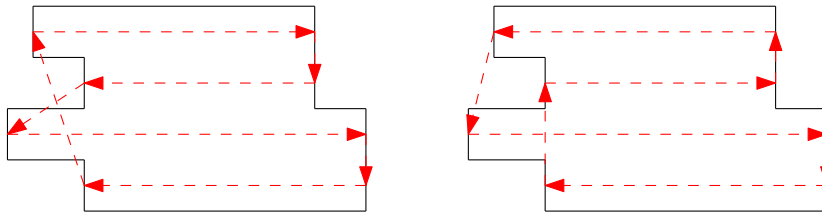


Abbildung 4.25: Schneiden sich zwei Verbindungskanten, kann der Weg durch paralleles Anordnen der beiden Schnittkanten verkürzt werden.

Ob sich daraus ein Polynomzeitalgorithmus bilden lässt, ist fraglich. Zumindest ist ein sicheres Abbruchkriterium für einen Backtrackingalgorithmus gefunden. Insgesamt liegt die Vermutung nahe, dass eine Reduktion zu einem NP-harten Problem gefunden werden kann - besonders für allgemeinere Fälle als die hier betrachtete, sehr spezielle Anordnung der y -monotonen Umgebung.

4.3 Ein gleichgewichteter Fall: $\mu = \frac{1}{8}$

Nachdem wir gesehen haben, dass sowohl für die beiden Extremfälle - sehr günstige Rotation und sehr teure Rotation - in allgemeinen Umgebungen kaum mit annehmbarem Aufwand optimale Wege zu bestimmen sind, können wir nicht davon ausgehen, für ein dazwischenliegendes μ bessere Ergebnisse zu erwarten. Dennoch wollen wir für wenige einfache Umgebungen optimale Wege zeigen.

Bei der Wahl des Gewichtungsfaktors wollen wir uns auf $\mu = \frac{1}{8}$ beschränken. Bei diesem Wert werden für reine Translation und Rotation um den Mittelpunkt gleiche Werte bezüglich der Kosten zu abgedeckter Fläche erreicht. Bei der Translation betrachten wir den Fall einer Bewegung orthogonal zur Ausrichtung. Hier wird pro Kosteneinheit ein maximum an Fläche abgedeckt. Das Verhältniss von Kosten k zu abgedeckter Fläche A beträgt jeweils 1 : 1:

$$\frac{A}{k} = \frac{1}{1} = 1$$

Ebenso verhält es sich bei einer vollständigen Rotation um die eigene Achse:

$$\frac{A}{k} = \frac{\pi r^2}{2\pi \cdot \mu} = \frac{\pi \cdot 8}{\pi \cdot 2 \cdot 4} = 1$$

4.3.1 Wege in Kreisen

Betrachten wir einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$. Zwei Strategien, welche sich für den Anfang anbieten würden, wären die reine Rotation sowie die reine Translation. Eine reine Translationsbewegung müsste den Durchmesser des Kreises mindestens einmal ablaufen, um bei senkrecht ausgerichtetem Segment sowohl den linken als auch den rechten Randpunkt zu sehen, für eine Rundtour kämen wir also auf Kosten

$$k = 2.$$

Für eine reine Rotationsabdeckung würden wir das Zentrum des Liniensegments auf dem Mittelpunkt des Kreises platzieren und um 2π drehen, womit wir auf Kosten von

$$2\mu\pi = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$$

kommen. Dabei spielt es keine Rolle, ob wir eine halbe Hin- und Rückdrehung machen oder einmal komplett im Kreis drehen. Unsere Vermutung geht dahin, dass die reine Rotationsbewegung optimal ist. Motivieren wir dies näher:

Angenommen, wir führen während unserer Tour eine Hin- und eine Rückrotation um den Winkel α aus. Für ein $\alpha = 0$ haben wir schon gesehen, dass uns höhere Kosten als für eine reine Rotationsbewegung entstehen. Was passiert für ein $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$? Abbildung 4.26 (i) zeigt, dass bei einer Tour mit Startpunkt in der Mitte ebenfalls den Kreisradius mindestens zweimal abgelaufen werden muss. Wir profitieren also in keinsten Weise von einer Rotation. Sie erzeugt um Gegensatz zur reinen Translation nur zusätzliche Kosten. Die Vermutung liegt nahe, dass aus Symmetriegründen ein Start in der Mitte optimal in dem Sinne ist, dass für jeden anderen Startpunkt höhere Kosten entstehen.

Ab einem $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wie es in Abbildung 4.26 (ii) dargestellt ist, können wir nicht mehr durch einfaches hinschauen argumentieren, wie sich die Kosten in Abhängigkeit von α verhalten. Wir halten an der Vermutung fest, dass das Liniensegment im Kreismittelpunkt startet. Dann müssen wir mindestens die in Abbildung 4.26 (iii) rot markierte Strecke a ablaufen, um die gesamte Fläche zu überdecken. Über das rechtwinklige Dreieck abc wissen wir weiterhin, dass $\alpha' = \pi - \alpha$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$. Als Seitenlänge für b ergibt sich aufgrund des Kreisradius $b = \frac{1}{2}$. Die Länge der Strecke a erhalten wir durch

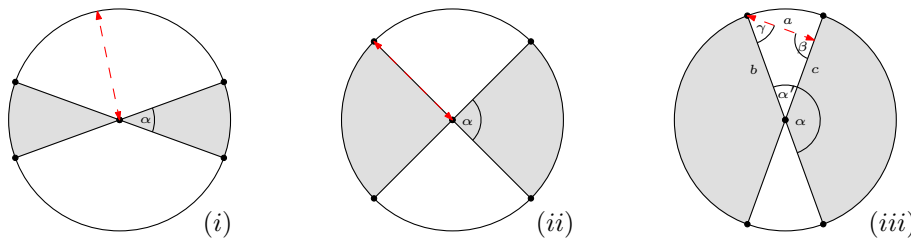


Abbildung 4.26: Beschreibt der maximale Rotationswinkel weniger als einen Viertelkreis, muss bei Start im Mittelpunkt mindestens bis an den Kreisrand translatiert werden (i). Für eine darüber hinausgehende Rotation muss mindestens die Strecke a abgelaufen werden (iii).

den Sinussatz:

$$\begin{aligned}
 a &= b \cdot \frac{\sin(\alpha')}{\sin(\beta)} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha')}{1} \\
 &= \frac{1}{2} \sin(\alpha') \\
 &= \frac{1}{2} \sin(\pi - \alpha)
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Gesamtkosten, welche uns für einen bestimmten Winkel α entstehen. Für die Hin- und Rückrotation ergeben sich $k_{rot} = \mu \cdot 2\alpha$. Für die Translation haben wir $k_{trans} = 2 \cdot a$, insgesamt also Kosten

$$\begin{aligned}
 k(\alpha) &= \underbrace{\frac{2 \cdot \alpha}{8}}_{\text{Rotation}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin(\pi - \alpha)}{2}}_{\text{Translation}} \\
 &= \frac{1}{4} \alpha + \sin(\pi - \alpha)
 \end{aligned}$$

Um das Verhalten von im Intervall $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ besser übersehen zu können, errechnen wir die Extremstellen von $k(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
 k'(\alpha) &= \frac{1}{4} + \cos(\pi - \alpha) \cdot (-1) \\
 &= \frac{1}{4} - \cos(\pi - \alpha)
 \end{aligned}$$

Setze $k'(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{4} - \cos(\pi - \alpha) \\
\cos(\pi - \alpha) &= \frac{1}{4} \\
\pi - \alpha &\approx 1,318 \\
\alpha &\approx 1,823
\end{aligned}$$

Einsetzen in die zweite Ableitung weist für $\alpha \approx 1,823$ ein lokales Maximum nach:

$$\begin{aligned}
k''(\alpha) &= \sin(\pi - \alpha) \cdot (-1) \\
&= -\sin(\pi - \alpha) \\
k''(1,823) &= -\sin(\pi - 1,823) \\
&< 0
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass die Kosten bei einem Rotationswinkel von $\alpha = \pi$ bei ca. $k = 0,785$ und bei einem Rotationswinkel von $\alpha < \frac{\pi}{2}$ bei mindestens $k = 2$ liegen. Dazwischen existiert als einziger Extrempunkt ein lokales Maximum, weswegen ein Hin- und Rückrotationswinkel von $\alpha = \pi$ optimal sein muss.

Insgesamt erhärtet sich die Vermutung, dass eine reine Rotationsbewegung zur Abdeckung des Einheitskreises optimal ist. Ist der Startpunkt auf den Mittelpunkt des Kreises festgelegt, ergibt obige Argumentation einen Beweis. Ohne diese Einschränkung liegt die Vermutung sehr nahe, dass sich an dem optimalen Pfad keine Änderungen ergeben, als bewiesen kann dies aber nicht gelten.

4.3.2 Wege im Einheitsquadrat

Betrachten wir das Einheitsquadrat mit Seitenlänge 1. Es liegt nahe, hier lediglich mit Translationsbewegungen zu arbeiten. Translatieren wir einmal längs durchs Quadrat und zurück, erhalten wir eine Rundtour mit Kosten $k = 2$. Trivialerweise ist diese Tour optimal, wenn wir lediglich Translationsbewegungen betrachten. Aber wie verhält es sich, wenn wir zusätzlich rotieren?

Angenommen, wir führen während unserer Tour auch Rotationen aus. Genauer: wir tätigen eine vollständige Rotation um die eigene Achse. In diesem Fall kommen wir lediglich mit Rotationsbewegungen nicht aus. Es sind auch Translationen nötig, mindestens die in Abbildung 4.27 (ii) rot markierte Strecke, von dessen Endpunkten aus die beiden zugehörigen Eckpunkte des Quadrates gerade noch eingesehen werden können. Durch mehrfache Anwendung des Satz des Pythagoras ergibt sich für diese Strecke eine

Länge von $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, wir erhalten also insgesamt einen Translationsanteil

$$k_{trans} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

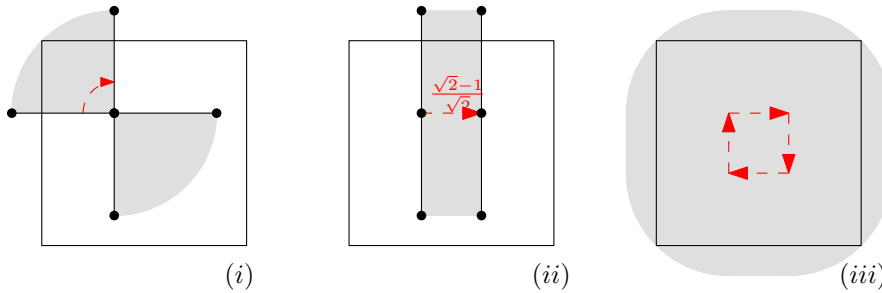


Abbildung 4.27: Bei einer Rundtour mit kompletter Rotation um die eigene Achse entstehen trotzdem mindestens Translationskosten $k_{trans} = 4 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

Zusammen mit den Rotationskosten von

$$K_{rot} = \mu \cdot 2\pi$$

ergibt sich

$$k = \frac{1}{8} \cdot 2\pi + 4 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \approx 1,957$$

womit wir zumindest günstiger als bei der reinen Translation fahren. Aber ist diese Tour optimal? Offensichtlich muss eine bessere Tour weder keine noch eine volle Rotation ausführen, also maximal eine halbe Hin- und Rückdrehung ausführen. Erstaunlicherweise lässt sich die obige Tour aus Abbildung 4.27 auch modifizieren, so dass keine vollständige Umdrehung nötig ist, sondern lediglich eine halbe Hin- und Rückdrehung genügt, wie Abbildung 4.28 veranschaulicht. An den Kosten ändert sich dabei nichts. Lediglich die überdeckte Fläche außerhalb des Quadrats nimmt ab.

Was passiert aber, wenn die Rotationskosten insgesamt echt weniger als eine ganze Rotation ausmachen sollen, also $k_{rot} < \mu \cdot 2\pi$? Dann ist es nicht mehr möglich, wie im sechsten Schritt von Abbildung 4.28 zwischenzeitlich während der Tour einen ganzen Einheitskreis abzudecken. Es verbleibt ein schmaler, nicht einzublickender Winkel, welcher durch ein Mehr an Translationskosten abgedeckt werden muss. Macht man sich diese Situation an Beispielen klar, erhärtet sich der Verdacht, dass diese Translationen - insbesondere wegen des nötigen Hin- und Rückwegs - stets höhere Kosten erzeugen als eine entsprechend zum vollen Kreis erhöhte Rotation.

Dennoch wäre ein Beweis hierfür sehr schwer. Gängige Beweistechniken schlagen aufgrund zu vieler unbekannter Parameter fehl. Es gibt kaum eine

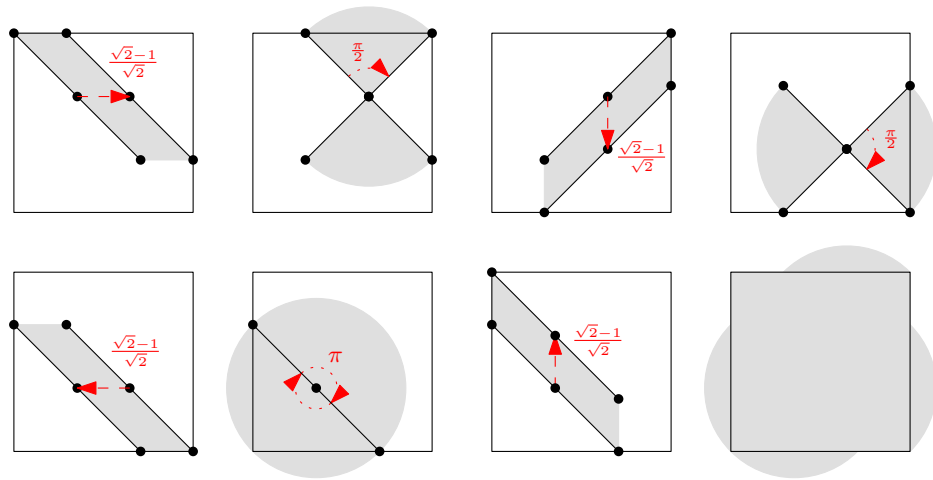


Abbildung 4.28: Modifikation der Rundtour aus Abbildung 4.27. Das letzte Bild zeigt die insgesamt überdeckte Fläche.

verlässliche Annahme für optimale Touren: die üblichen Methoden der Bahnplanung gelten größtenteils nicht. Eine große Hilfe ist zumeist, sich auf die Kreuzungsfreiheit optimaler Pfade berufen zu können. Allerdings ist für das Liniensegment diese Bedingung nur erfüllt, wenn bei einer Überkreuzung des Pfades auch seine Ausrichtung identisch ist. Somit fällt es schwer, getrennte Aussagen über Rotation und Translation zu machen, die Anzahl der Möglichkeiten und Unbekannten steigt und ein argumentatives Vorgehen ist fast unmöglich.

Kapitel 5

Ein allgemeines Näherungsverfahren

Nachdem wir im vorhergehenden Kapitel gesehen haben, dass es schon für einfache Umgebungen sehr schwierig sein kann, optimale Wege zu finden, soll in diesem Kapitel ein Näherungsverfahren vorgestellt werden, welches in polynomial beschränkter Zeit Wege findet, die nur um einen linearen Faktor dem optimalen Pfad nachstehen.

Die Grundideen hierzu sind im Wesentlichen dieselben wie sie auch *Arkin* et al. in [1] für einen quadratischen und runden Mäher verfolgen, wobei sich bei den Abschätzungen mit optimalen Pfaden durch das unterschiedliche Kostenmaß Veränderungen ergeben.

5.1 Der Algorithmus

Der Algorithmus selbst verläuft in mehreren Schritten. Zu Anfang betrachten wir ein Dreiecksgitter, welches die Ebene flächig mit gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge $\sqrt{\cos(\frac{2}{3}\pi)}$ ausfüllt. Das Dreiecksgitter, welches aus den Eckpunkten der Dreiecke besteht, bezeichnen wir mit \mathcal{D} . Um jeden Punkt von \mathcal{D} können wir ein Sechseck mit einem Durchmesser von 1 legen, so dass die gesamte Fläche durchgehend mit Sechsecken gekachelt ist.

Nun berechnen wir zu jedem $d \in \mathcal{D}$, ob sein Sechseck die Fläche F schneidet. Die erhaltenen Punkte bezeichnen wir mit D und bilden daraus eine Knotenmenge für einen planaren Graphen G_D . Wir machen G_D zu einem dicht verbundenen Graphen, indem wir jeweils zwei Knoten im Graphen genau dann verbinden, wenn sie im Gitter benachbart sind, also exakt Abstand von $\sqrt{\cos(\frac{2}{3}\pi)}$ haben.

Eine Rundtour für unser Liniensegment erhalten wir, indem wir eine Rundtour t auf G_D suchen, welche jeden Knoten mindestens einmal besucht. Dazu bedienen wir uns des minimalen spannenden Baumes, bei dem

wir jede Kante zweimal ablaufen. Starten wollen wir mit zum Weg orthogonal ausgerichtetem Liniensegment. Im weiteren Verlauf wird in jedem Knoten entsprechend dem Winkel, den der Weg macht, rotiert. In den Blättern des minimalen spannenden Baumes wird eine halbe Rotation um die eigene Achse ausgeführt, also um π gedreht.

Insgesamt erhalten wir eine Strategie, welche im Weiteren DREIECKSLÄUFER genannt werden soll, sie ist in Algorithmus 5.1.1 noch einmal dargestellt. Abbildung 5.1 veranschaulicht den Algorithmus graphisch.

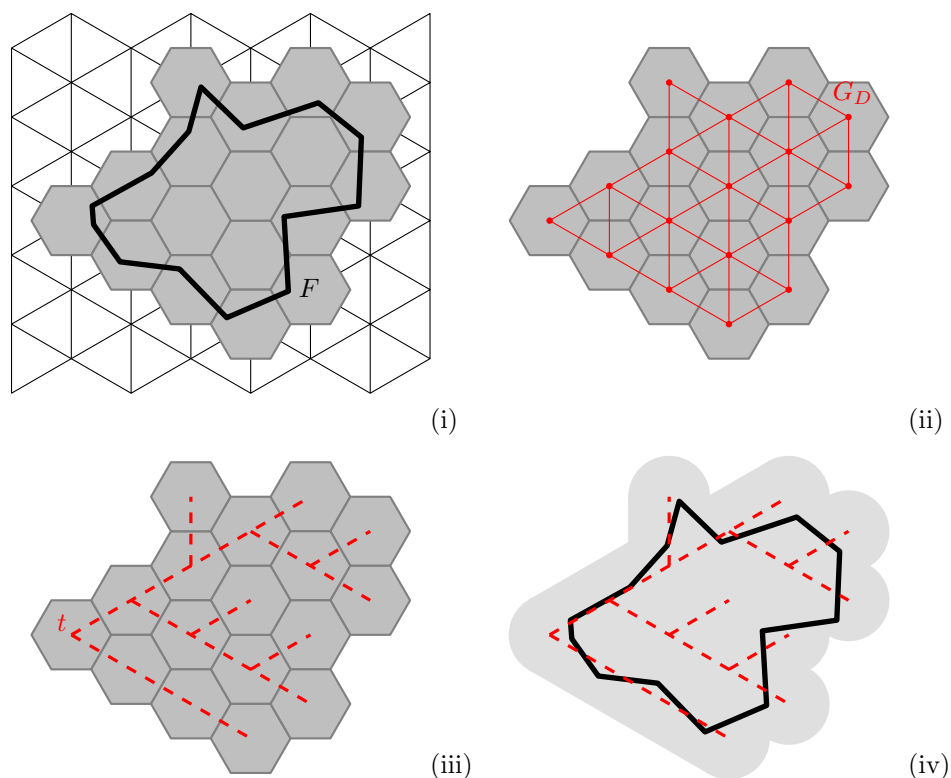


Abbildung 5.1: Der Algorithmus DREIECKSLÄUFER: (i) Finde alle Eckpunkte auf dem Dreiecksgitter, dessen umschließende Sechsecke F schneiden. (ii) Bilde aus den Eckpunkten den dicht verbundenen Dreiecksgraphen G_D . (iii) Konstruiere eine Rundtour mittels des minimalen Spannbaum auf G_D (iv) Die durch die t abgedeckte Fläche im Vergleich zu F .

5.2 Korrektheit

Lemma 11 *Die Strategie DREIECKSLÄUFER erzeugt zu einer vorgegebenen Umgebung F eine gültige Überdeckung.*

Algorithm 5.1.1 Dreiecksläufer

-
- Berechne zu F die Punkte $D \in \mathcal{D}$, dessen umschließende Sechsecke mit Durchmesser 1 sich mit F schneiden.
 - Bilde aus D einen dicht verbundenen Dreiecksgraphen G_D .
 - Erzeuge mittels Ablaufen des minimalen spannenden Baums von G_D eine Rundtour t über G_D , bei welcher jeder Knoten mindestens einmal besucht wird.
 - Erzeuge einen Pfad p für das Liniensegment durch Ablaufen von t , wobei an jedem Knoten von G_D eine Drehung um den Mittelpunkt des Liniensegments ausgeführt wird, so dass es orthogonal zum nächsten Knoten steht.
-

Beweis. Der Beweis von Lemma 11 verläuft in zwei Schritten. Zunächst zeigen wir, dass wir mit der Konstruktion des Dreiecksgraphen G_D und der zugehörigen Sechsecke um seine Knoten eine Fläche erhalten, welche die ursprüngliche Umgebung F komplett überdeckt. Anschließend zeigen wir, dass eine Rundtour, welche jeden Knoten in G_D besucht, auch die gesamte Sechseckfläche des Graphen abdeckt.

Der erste Beweisabschnitt ergibt sich direkt aus dem Algorithmus. Demnach muss jeder Punkt aus F auch in einem zu einem Knoten aus G_D gehörigen Sechseck enthalten sein, ansonsten würde der Algorithmus den entsprechenden Knoten hinzunehmen.

Anschließend müssen wir zeigen, dass jedes der Sechsecke durch die Tour t auf G_D auch wirklich komplett abgedeckt wird. Da t jeden Knoten einmal besucht und es sich um eine Rundtour handelt, wird jeder Knoten durch eine Kante besucht und durch eine (evtl. dieselbe) Kante wieder verlassen. Da in einem Dreiecksgraphen jeder Knoten maximal Grad 6 hat, gibt es nur 6^2 Möglichkeiten, wie diese Wege verlaufen können, abzüglich Spiegelung und Symmetrie bleiben noch 4 Möglichkeiten, zu welchen Abbildung 5.2 die komplette Abdeckung nachweist.

Somit wird jedes Sechseck komplett abgedeckt und damit auch komplett F . □

5.3 Laufzeit

Lemma 12 *Bestehe F aus einem Polygon mit n Ecken und sei N die Anzahl der Gitterpunkte eines hexagonalen Gitters mit Gitterabstand 1, welche F überdeckt. Dann hat der Algorithmus DREIECKSLÄUFER eine Zeitkomplexität von $O((N + n) \log n)$.*

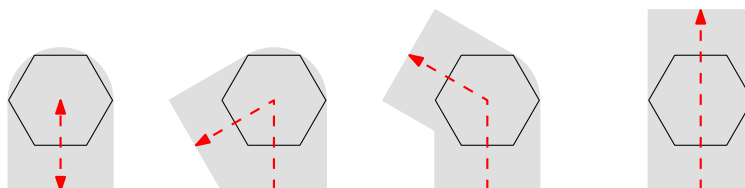


Abbildung 5.2: Vier Möglichkeiten, einen Knoten auf einer Rundtour zu besuchen und zu verlassen, in jedem Fall wird das den Knoten umschließende Sechseck mit Durchmesser 1 vollständig abgedeckt.

Beweis. Der zeitlich gesehen aufwändigste Teil des Algorithmus beschäftigt sich mit der Suche der geschnittenen Sechsecke. Zunächst gilt es, zu einem beliebigen Eckpunkt von F den nächstliegenden Gitterpunkt v_0 zu bestimmen und markieren, was in konstanter Zeit möglich ist. Von hier aus starten wir mit einem Stack, welchen wir mit den sechs Nachbarknoten von v_0 im Gittergraphen initialisieren. Wir prüfen nun nach und nach die obersten Elemente des Stacks ob sie innerhalb von F liegen. Ist dem so, markieren wir sie und legen ihre Nachbarn erneut auf den Stack, soweit sie noch nicht markiert sind. Finden wir einen Knoten außerhalb von F auf dem Stack, wird er ohne weiteres Vorgehen vom Stack entfernt.

Die Prüfung, ob ein Knoten in F enthalten ist, benötigt $O(\log n)$ Zeit, soweit wir F zuvor einmalig in Zeit $O(n \log n)$ horizontal und vertikal nach den Methoden von *Seidel* [19] in Trapeze zerlegt haben. Anschließend gilt es noch Knoten zu finden, welche nicht in F liegen, deren umschließende Sechsecke dennoch F schneiden. Hierzu untersuchen wir unter den höchstens $O(N)$ vielen markierten Knoten die Randknoten und prüfen ihre ebenfalls maximal $O(N)$ vielen nicht markierten Randknoten. Hier kann unter den einmalig sortierten Kanten von F in Zeit $O(\log n)$ festgestellt werden, ob eine der Sechseckkanten F schneidet, womit wir insgesamt bis hierhin auf eine Laufzeit von $O(N \log n) + O(n \log n)$ kommen.

Sobald die Knoten von G_D gefunden sind, können die zugehörigen Kanten in Zeit $O(N)$ eingefügt werden. Zu jedem Knoten müssen lediglich die sechs möglichen Nachbarknoten auf ihre Markierung geprüft werden.

Das Bilden eines minimalen Spannbaumes benötigt im hier vorliegenden Fall ebenso Zeit $O(N)$. Da die Längen aller Kanten identisch sind, genügt es, N viele Kanten einzufügen, ohne einen Kreis entstehen zu lassen. Dazu werden die $O(N)$ vielen möglichen Kantenkandidaten der Reihe nach durchlaufen. Wenn einer der beiden Endknoten noch keine weitere Kante besitzt, wird der Kantenkandidat zur Kantenmenge hinzugefügt, ansonsten übersprungen. Das Ergebnis ist ein alle Knoten überspannender Baum. Wäre dem nämlich nicht so, würde entweder ein Knoten im Baum fehlen oder ein Kreis entstanden sein. Ein fehlender Knoten ist unmöglich, da G_D

zusammenhängend ist und somit eine Kante untersucht wurde, welche den isolierten Knoten angebunden hätte. Ein Kreis kann nicht entstehen, da niemals eine Kante zwei Knoten verbindet, welche schon an Kanten angebunden sind, also lediglich isolierte Knoten aufnimmt.

Der letzte Schritt im DREIECKSLÄUFER-Algorithmus berechnet zu jedem Knoten aus G_D den Drehwinkel für das Liniensegment, was für jeden Knoten nur konstante Zeit kostet, insgesamt also ebenfalls $O(N)$.

Somit erhalten wir eine Gesamtlaufzeit von $O((N + n) \log n)$ \square

5.4 Güte

Nachdem wir gezeigt haben, dass der DREIECKSLÄUFER sowohl korrekte Ergebnisse liefert als auch mit annehmbaren Laufzeiten auskommt, möchten wir nun die Güte des berechneten Weges näher betrachten. Maßstab soll dabei stets der optimale Weg für eine Abdeckung von F sein. Da uns dieser nur in den seltensten Fällen überhaupt bekannt ist, müssen wir mit Abschätzungen leben. Genauer gesagt, mit dem Begriff der Kompetitivität.

Definition 13 Gegeben sei ein Problem Π und eine Lösungsstrategie S . Wir sagen, die Strategie S ist kompetitiv mit Faktor C , wenn es eine Zahl A gibt, so dass für jede Probleminstanz von $P \in \Pi$ die Abschätzung

$$k_S(P) \leq C \cdot k_{opt}(P) + A$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet $k_{opt}(P)$ die Kosten der optimalen Lösung von P .

Wir möchten zeigen, dass solch ein kompetitiver Faktor C existiert. Dabei werden wir allerdings zwei Einschränkungen machen. Erste Einschränkung ist, dass der kompetitive Faktor von μ abhängen wird. Wie man am Algorithmus selbst schon erkennen kann, verläuft dieser unabhängig von der Gewichtung der Kosten zwischen Rotation und Translation, insofern wird durch ein höheres μ mitunter auch der Faktor C steigen.

Die zweite Einschränkung betrifft die Fläche F . Wir fordern von F , dass ihre Fläche höchstens linear mit ihrem Umfang wächst. Damit schließen wir solche Umgebungen aus, welche vorwiegend aus sehr schmalen Streifen bestehen. Wenn man hingegen eine Mindestbreite für jede Stelle von F vorgibt, also beispielsweise eine rechteckige Umgebung auf einem Gittergraphen betrachtet, ist diese Bedingung erfüllt: jedes Kästchen im Gittergraphen kann maximal drei seiner Seitenlängen zum Rand beisteuern, also wächst der Rand pro hinzugenommenem Kästchen nur linear.

Theorem 14 *Unter den beiden oben genannten Einschränkungen handelt es sich bei der DREIECKSLÄUFER-Strategie um ein kompetitives Verfahren, wobei die Gewichtung μ in den kompetitiven Faktor eingeht.*

Beweis. Der Beweis für Theorem 14 wird aus vier einzelnen Abschätzungen bestehen. Wir zeigen, dass C_1, \dots, C_4 und A existieren, so dass

1. $C_1 \cdot k_{opt}(F) + A \geq \text{Fläche}(F)$
2. $C_2 \cdot \text{Fläche}(F) + A \geq \text{Sechseckfläche}(G_D)$
3. $C_3 \cdot \text{Sechseckfläche}(G_D) + A \geq |D|$
4. $C_4(\mu) \cdot |D| + A \geq k_{\text{DREIECKSLÄUFER}}(F)$

Wenn obige vier Aussagen bewiesen sind, ergibt sich direkt aus Definition 13, dass auch Theorem 14 bewiesen ist.

Die erste Aussage besagt, dass die abgedeckte Fläche durch die Kosten eines Pfades mit dem Liniensegment beschränkt ist. Tatsächlich sehen wir, dass sich ein optimales Verhältnis von Kosten zu abgedeckter Fläche bei reiner Translation und orthogonal ausgerichtetem Liniensegment ergibt. Lediglich wenn μ klein wird, können wir durch Drehung auf der Stelle ohne Translation mit geringeren Kosten mehr Fläche abdecken. Da diese Fläche aber beschränkt ist, bis wir wieder translatieren, kann hier entsprechend ein Summand A gewählt werden.

Die zweite Aussage besagt, dass die Fläche, welche die Sechsecke um die Knoten von G_D bilden, höchstens linear von der Fläche von F abhängt. An dieser Stelle geht unsere Einschränkung ein, dass der Umfang von F linear durch die Fläche von F beschränkt ist. Durch die Sechseckfläche erhalten wir nämlich einen neuen Rand, welcher in jedem Punkt höchstens konstanten Abstand zum Rand von F hat, da nicht mehr als eine neue Reihe Sechsecke um F herum anwachsen wird. Da für die Sechseckfläche selbst die Fläche nur linear mit dem Rand anwächst, da jedes neue Sechseck höchstens fünf neue Kanten zum Rand beiträgt, ist auch die zweite Aussage korrekt.

Die dritte Aussage setzt die Sechseckfläche ins Verhältnis zum entstehenden spannenden Baum t . Diese hängen direkt zusammen: für jedes enthaltene Sechseck kommt ein Knoten zu t hinzu, weiterhin besitzt t genau eine Kante weniger als Knoten.

Im Beweis der vierten Aussage geht unsere zweite Einschränkung mit ein: der kompetitive Faktor ist von μ abhängig. Betrachten wir die vom DREIECKSLÄUFER ausgeführte Translation, so entspricht diese exakt der Kantenzahl von t . Für die Rotation können uns in jedem Knoten zusätzlich Kosten von bis zu $\mu \cdot \pi$ entstehen, welche hier in C mit eingehen. □

5.5 Optimierungsmöglichkeiten

Mit den bis hierhin erreichten Laufzeiten und der Kompetitivität des DREIECKSLÄUFER hat man prinzipiell schon die wesentlichen Wünsche an ein

Approximationsverfahren abgedeckt. Dennoch gibt es Optimierungsmöglichkeiten, welche zwar keine Verbesserungen an der theoretischen Komplexität, dafür aber an den real auftretenden Resultaten erzielen. Insbesondere unangenehm fällt die Besuchsreihenfolge für die einzelnen Knoten des Gittergraphen G_D auf. Optimal wäre hier, einen Hamiltonkreis zu finden um die Anzahl der Kantenbesuche zu halbieren. Grundsätzlich ist das Hamiltonkreisproblem aber auch auf Dreiecksgraphen NP-Vollständig. Ein Beweis hierzu kann sehr ähnlich dem in Kapitel 4.1 vorgestellten Beweis zu Hexgraphen geführt werden. Lediglich die einzelnen Bausteine sind anzupassen, wie *Gordon, Orlovich* und *Werner* in [8] gezeigt haben.

Unabhängig davon ist aber nicht einmal klar, ob ein Hamiltonkreis überhaupt existiert oder sich Einsparungen gegenüber dem minimalen Spannbaum ergeben können. Insbesondere Brücken, also Knoten im Graphen, welche in jedem Weg zwischen zwei Knoten zu finden sind, schließen Hamiltonkreise aus. Umgekehrt wird hier aber auch der optimale Weg mitunter zweimal dem Verlauf der Brücke in etwa folgen müssen. Abbildung 5.3 zeigt ein Beispiel hierfür.

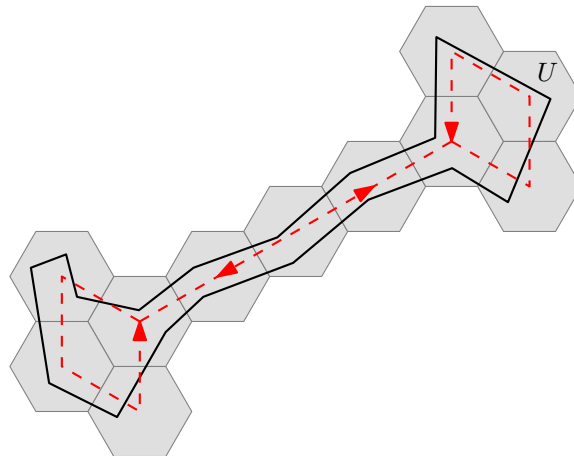


Abbildung 5.3: Enthält der Graph G_D eine Brücke, wird zumeist auch ein optimaler Pfad diese Strecke zweimal ablaufen müssen.

Dennoch kann in vielen Fällen die benötigte Kantenzahl verringert werden. Unabhängig von dem Umstand, ob ein Hamiltonkreis existiert, kann uns folgendes Verfahren die Kantenzahl reduzieren.

Seien $v_i \in V, 1 \leq i \leq N$ die Knoten von G_D . Wir nennen einen durch k Kanten verbundenen Kreis C auf den Knoten v_1, \dots, v_k erweiterbar, wenn ein Kreis C' der Länge $k + 1$ existiert, der alle Knoten aus C enthält. Grundidee ist nun, einen vorhandenen Kreis mittels Tiefensuche zu bestimmen, um ihn nach und nach zu erweitern. Dabei wird zunächst versucht, C zu erweitern, ohne dabei eine schon besuchte Kante erneut abzulaufen, notfalls

aber auch ein benachbarter Knoten durch eine einfache Hin- und Rückkante verbunden. Abbildung 5.4 zeigt dieses Verfahren an einer Beispielumgebung.

Wie *Gordon et al.* in [7] gezeigt haben, gibt es eine Vielzahl von Unterklassen der Dreiecksgraphen, in denen dieses Verfahren wirklich einen Hamiltonkreis liefert, soweit er existiert. Der Fall, dass ein weiterer Knoten nur durch direkten Hin- und Rückweg angebunden werden kann, tritt in diesen Fällen nicht auf.

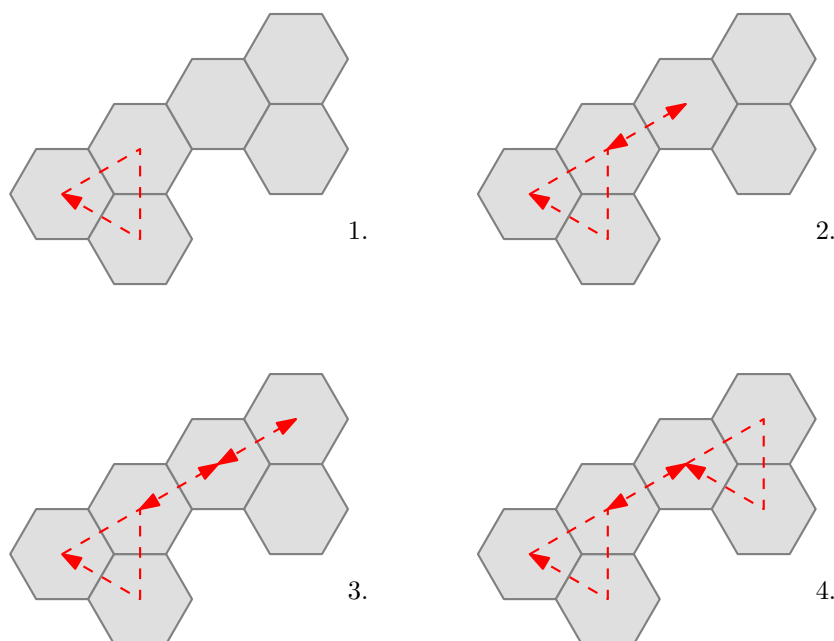


Abbildung 5.4: Sukzessive Erweiterung der Rundtour durch G_D . Falls möglich, wird der Kreis unter Hinzunahme zweier neuer Kanten erweitert (Schritt 4.), ansonsten unter Hinzunahme einer Hin- und Rücktour zu einem noch nicht angebundenen Knoten (Schritt 2 und 3).

5.6 Zusammenfassung und Kritik

Im vorhergehenden Kapitel haben wir ein approximatives Verfahren vorgestellt, welches die Grundbedürfnisse an eine praktikable Laufzeit erfüllt und für festes μ nur um einen konstanten Faktor hinter dem optimalen Pfad liegt. Damit ist insbesondere für kleine μ ein Algorithmus bekannt, welcher kaum weitere Wünsche offen lässt.

Hingegen ist für wachsendes μ das vorgestellte Verfahren kaum zu gebrauchen, da je nach Ausrichtung des Liniensegments im optimalen Pfad und Lage des verwendeten Dreiecksgitters zwingend Rotationen getätigt werden

müssten, die ein optimaler Pfad nicht durchzuführen brauchte. Ob allerdings ein kompetitiver Algorithmus existiert, welcher sich abhängig von der Wahl des Gewichtungsparameters μ verhält, ist mit derzeitigem Wissensstand nicht abzusehen.

Zweiter Problempunkt sind die Einschränkungen an die Umgebung F . Die Bedingung, den Umfang von F nicht beliebig stärker als die Fläche von F wachsen zu lassen, hat die Abschätzungen des kompetitiven Faktors hier erst ermöglicht. Es ist aber nicht einzusehen, warum bei gegebenen Problemen, in welchen diese Eigenschaft verletzt ist, der DREIECKSLÄUFER gegenüber der optimalen Lösung mehr als linear schlechter sein sollte. Hier könnte in Zukunft noch eine Abschätzung gefunden werden, welche ohne diese Einschränkung auskommt.

Kapitel 6

Das Partyfotografenproblem

Nachdem wir uns ausgiebig mit dem kumulativen Kostenmaß beschäftigt haben, soll zum Schluss noch ein etwas anders gelagerter Fall betrachtet werden. Bisher diente als Bezugspunkt für das Liniensegment sein Mittelpunkt, was für Anwendungen Sinn gemacht hat, in denen der Antrieb mittig platziert ist und zu zwei Außenseiten hin agiert werden kann. Was passiert aber, wenn nur zu einer Seite hin agiert wird? Diesen Umstand beschreibt das Partyfotografenproblem:

Ein Fotograf soll bei einem Sektempfang Fotos von den geladenen Gästen machen. Die Räumlichkeiten sind dem Fotografen bekannt, die Standorte und Anzahl der einzelnen Personen im Raum hingegen nicht. Diese erfährt er erst, wenn er mit der Kamera dicht vor den Augen die Personen durch den Sucher sieht. Gesucht ist nun eine Rundtour durch den Raum, so dass der Fotograf jeden Gast mindestens einmal vor die Linse bekommt, wobei der Gast innerhalb der maximalen Sichtweite des Fotografen stehen muss. Ob die Gäste mit dem Rücken oder dem Gesicht zur Kamera stehen, sei nicht von Belang, wir gehen davon aus, dass sie sich selbst zum Fotografen drehen. Weiterhin ist nicht zu befürchten, dass die Gäste ihren Standort wechseln, da sie eifrig in Gespräche vertieft sind.

Die Standorte der Gäste sind dem Fotografen nicht bekannt, es handelt sich um ein Onlineproblem. Da wir aber von jedem Gast ein Foto wünschen, muss der Fotograf für eine komplette Überdeckung des Raumes sorgen. Lässt er nur einen Punkt aus, könnte hier ein weiterer Gast stehen und das Problem wäre nicht gelöst.

Um das Partyfotografenproblem für eine theoretische Betrachtung zu vereinfachen, machen wir ein paar zusätzliche Annahmen. Die Personen im Raum haben eine unendlich kleine Ausdehnung und können sich nicht gegenseitig verdecken, ebenso sind Kollisionen ausgeschlossen. Darüber hinaus verkleinern wir den Aufnahmewinkel der Kamera auf ein unendlich dünnes Band. Insgesamt erhalten wir also ein Liniensegment, dessen Bezugspunkt nicht mehr die Mitte, sondern einer der Randpunkte ist. Ebenso wie in den

vorhergehenden Kapiteln suchen wir eine optimale Rundtour, welche den gesamten Raum überdeckt.

Wesentlicher Unterschied zu den bisherigen Betrachtungen sind die erlaubten Platzierungen für den Bezugspunkt. Während es in den vorhergehenden Kapiteln zumeist keinen Sinn gemacht hat, mit dem Mittelpunkt die Umgebung F zu verlassen, soll es hier explizit verboten sein, dass der Fotograf durch Wände geht. Weiterhin kann ein Punkt natürlich nur gesehen werden, wenn keine Wand zwischen ihm und dem Fotografen ist. Wände stellen hierbei die Randpunkte der Umgebung F dar. Da der Fotograf selbst nun nicht mehr auf die Wände translatieren kann, besteht die von ihm zu überblickende Fläche F naturgemäß aus einer offenen Punktmenge. Darüber hinaus gestehen wir der Fläche F weiterhin auch zu, nicht einfach zu sein, also Löcher zu beinhalten. Insbesondere den Spezialfall einer frei im Raum stehenden Wand lassen wir zu. Abbildung 6.1 zeigt den Fotografen in einer möglichen Umgebung.

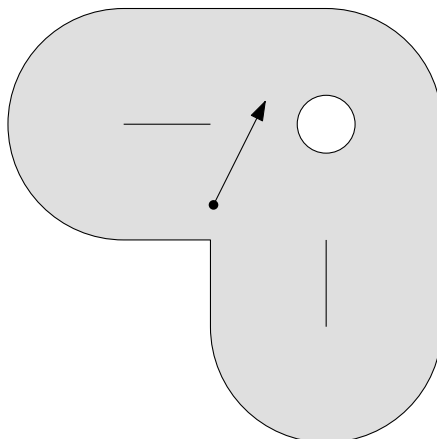


Abbildung 6.1: Eine Mögliche Umgebung F für den Partyfotografen. Freistehende Wände sowie nicht betretbare (aber auch nicht abzudeckende) Innenhöfe sind erlaubt.

Ein sehr ähnlich gelagertes Problem mit einem wandernden Fotografen wurde bereits in [9] untersucht. *Hoffmann, Icking, Klein, und Kriegel* gaben für einen Fotografen, welcher ein Objekt von allen Seiten fotografieren wollte, scharfe obere Schranken sowohl für den Fall der unbegrenzten Ebene als auch in Inneren eines Polygons an. Trotz der Ähnlichkeiten im Aufbau sind die gewonnenen Erkenntnisse dennoch hier nicht verwertbar, da eine komplette Überdeckung des Raumes wesentlich andere Strategien erfordert.

6.1 Kosten

Grundsätzlich macht das oben geschilderte Problem noch keine Aussage über die entstehenden Kosten. Für unsere Betrachtungen möchten wir aber weiterhin auf das in Kapitel 3 vorgestellte kumulative Kostenmaß aufbauen, also die Summe aus Translationsstrecke und Rotationswinkel. Lediglich der Bezugspunkt ändert sich, ansonsten lassen sich die Definitionen ganz analog übertragen. Bezüglich der Rundtour bleiben wir ebenso bei den bisherigen Bedingungen: Start- und Endkonfigurationen sollen identisch sein, insbesondere auch die Ausrichtung des Fotografen.

6.2 Wege im Einheitskreis

Als erste einfach zu untersuchende Umgebung F wählen wir den Einheitskreis. Im folgenden Kapitel soll gezeigt werden, wie hier optimale Rundtouren aussehen. Zusätzlich zu den bisherigen Betrachtungen gehen wir dabei auch auf die Fälle ein, in denen eine Start- und Endkonfiguration vorgegeben ist.

6.2.1 Der gleichgewichtete Fall: $\mu = \frac{1}{2}$

Für unsere ersten Beobachtungen möchten wir einen Gewichtungsfaktor finden, welcher ähnlich wie in Kapitel 4.3 ein Gleichgewicht zwischen Rotation und Translation herstellt. Dies ist für den Partyfotografen bei $\mu = \frac{1}{2}$ gegeben. Für reine Translation beträgt das Verhältnis von Kosten k zu abgedeckter Fläche A nach wie vor $1 : 1$:

$$\frac{A}{k} = \frac{1}{1} = 1$$

Ebenso verhält es sich bei einer vollständigen Rotation um die eigene Achse, wenn wir $\mu = \frac{1}{2}$ setzen:

$$\frac{A}{k} = \frac{\pi r^2}{2\pi \cdot \mu} = \frac{\pi}{2\pi \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

Wie sehen nun optimale Touren im Einheitskreis aus? Bei freier Wahl des Startpunkts liegt die Vermutung nahe, dass eine Tour mit Startpunkt in der Mitte des Kreises optimal ist. Einzige Bewegung wäre eine Rotation um die eigene Achse, wie es Abbildung 6.2 zeigt.

Beweisen lässt sich dies schnell mit Hilfe der oben begründeten Wahl von μ : sowohl Rotation als auch Translation erzeugen in ihrer reinen Form pro überdeckter Flächeneinheit gleiche Kosten. Eine Mischform aus Rotation und Translation wird diese Quote nicht verbessern können. Also ist

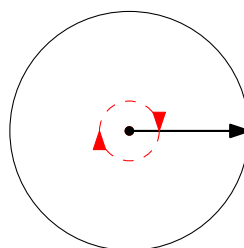


Abbildung 6.2: Abdeckung des Einheitskreises durch eine komplette Rotation vom Kreismittelpunkt aus.

eine Tour, bei welcher die Fläche von F gleich den erzeugten Kosten ist, zwangsläufig optimal. Bei obiger Tour haben wir eine Fläche von

$$A = \pi r^2 = \pi$$

mit Kosten

$$k = \mu \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

überdeckt, womit diese optimal wäre.

Und wie sehen Touren mit fest vorgegebenem Startpunkt aus? Wir wählen als Beispiel eine Konfiguration mit dem Fotografen am unteren Rand von F , seine Kamera nach rechts ausgerichtet, wie in Abbildung 6.3 dargestellt. Offensichtlich müssen wir mindestens Kosten von 1 für Translationen zum Kreismittelpunkt aufwenden, um nur eine Chance zu bekommen, im Verlauf der weiteren Rundtour den obersten Punkt a im Kreis zu erfassen. Mit dieser Translation haben wir aber noch keinen Punkt der oberen Kreishälfte abdecken können.

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Angenommen, eine optimale Tour kommt nur mit Translationsbewegungen aus: die insgesamt ausgeführte Hin- und Rückrotation α ist null. Dann müssen wir weiter bis zum Punkt a translatieren. Da wir bis hierhin noch keinen Punkt des linken Kreisrandes gesehen haben, bleibt uns für den Rückweg keine andere Wahl, als entlang dieses Randes zu laufen, wie es Abbildung 6.3 (i) zeigt. Es entstehen dabei Kosten von

$$k = 2 + \pi$$

2. Angenommen, während der Tour wird eine komplette Rotation ausgeführt. In diesem Fall genügt es, bis zum Kreismittelpunkt zu translatieren, sich hier komplett im Kreis zu drehen und zurückzukehren. Es entstehen ebenfalls Kosten von

$$k = 2 + \pi$$

Abbildung 6.3 (ii) zeigt diesen Fall.

3. Verbleibt der Fall, dass während der Tour insgesamt um den Winkel α hin- und rückrotiert wird. Es gilt $0 < \alpha < \pi$, ansonsten würde eine volle Umdrehung gleiches mit geringeren Kosten leisten. Dann existiert ein Stück Kreisrand, welches weder durch die erste Translation noch durch die Rotation um α erkundet werden konnte und zu welchem für Kosten 1 erneut hintranslatiert werden muss. Das nicht observierte Stück Kreisrand ist insgesamt mindestens $\pi - \alpha$ lang, womit sich die Kosten insgesamt folgendermaßen summieren:

$$k = 2 + \frac{2\alpha}{2} + (\pi - \alpha) = 2 + \pi$$

Abbildung 6.3 (iii) zeigt einen dieser Fälle.

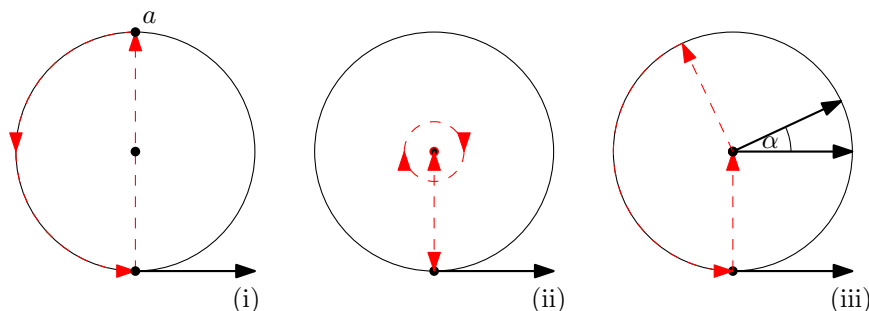


Abbildung 6.3: Drei Fälle für optimale Wege im Einheitskreis: ohne Translation (i), mit voller Umdrehung (ii) oder einer Rotation um den Winkel $0 < \alpha < \pi$ (iii).

Wir sehen: in allen drei Fällen ergeben sich identische Mindestkosten und durch die beliebige Wahl des Winkels α im dritten Fall sind es unendlich viele optimale Wege.

Weiterhin ist obige Startkonfiguration am Rand von F auch Worstcase: für jede andere Startkonfiguration entstehen uns gleiche oder geringere Kosten. Ist lediglich die Ausrichtung verändert, der Startpunkt aber immer noch am Rand, wenden wir die Strategie aus Fall 2 an und kommen auf gleiche Kosten. Ist der Startpunkt nicht am Rand, entstehen uns geringere Kosten: wir translatieren zum Mittelpunkt und rotieren dort um die eigene Achse.

Zusammenfassend haben wir gezeigt:

Theorem 15 Für das Fotografierenproblem im Einheitskreis mit kumulativem Kostenmaß und Gewichtungssparameter $\mu = \frac{1}{2}$ gilt:

1. Unabhängig von der Startkonfiguration existiert eine Rundtour mit maximal $\pi + 2$ Kosten.

2. Bei freier Wahl einer Startkonfiguration entstehen mindestens Kosten π , dabei nutzen optimale Rundtouren lediglich Rotationsbewegung.
3. Die angegebenen Schranken sind scharf.

6.2.2 Ein ungleichgewichteter Fall: $\mu = 1$

Nachdem wir gesehen haben, dass für den gleichgewichteten Fall $\mu = \frac{1}{2}$ eine reine Rotation im Kreis bei Wahl der Startkonfiguration optimal ist und auch bei fest vorgegebenem Startpunkt zu vielen optimalen Wegen gehören, möchten wir sehen, wie sich optimale Wege ergeben, wenn die Kosten für die Rotation erhöht werden. Wir setzen nun $\mu = 1$. Wie sehen nun optimale Wege aus, wenn Startkonfigurationen fest vorgegeben oder frei wählbar sind?

Wählen wir als erstes Beispiel folgende Startkonfiguration: der Fotograf selbst startet auf dem Rand des Einheitskreises, der Fotoapparat ist parallel zum Rand ausgerichtet, siehe Abbildung 6.4 (i).

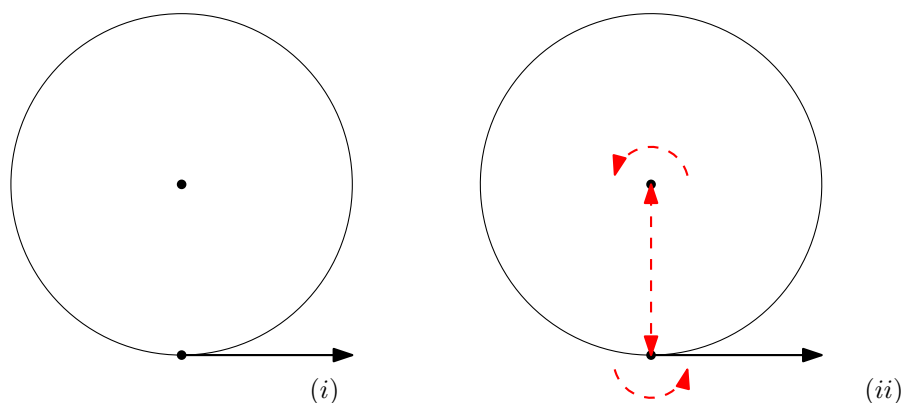


Abbildung 6.4: (i) Die Startkonfiguration des Fotografen am Rand der kreisförmigen Umgebung F mit Ausrichtung parallel zum Kreisrand. (ii) Eine mögliche Rundtour zur Abdeckung des Einheitskreises.

Man sieht auf Anhieb, dass wir mit einer reinen Rotation des Fotografen um die eigene Achse nicht auskommen, sich der Fotograf selbst also auch bewegen muss. Eine Lösungsmöglichkeit wäre, bis zum Kreismittelpunkt zu translatieren, anschließend die obere Kreishälfte mittels einer Rotation um den Winkel π in positiver Drehrichtung zu explorieren und mit Ausrichtung nach links zurück zum Ausgangspunkt zu translatieren (siehe Abbildung 6.4 (ii)). Um die Bedingung der Rundtour von gleicher Start- und Endkonfiguration zu erfüllen, folgt noch eine Drehung um den Winkel π zurück in die Ausgangsstellung. Dieser Weg würde uns Kosten in Höhe von $2\pi + 2$ verursachen.

Alternativ könnte man sich vorstellen, auf Rotationen ganz zu verzichten und sich nur auf Translationen zu beschränken. Bewegt sich der Fotograf zur gegenüberliegenden Wand und translatiert anschließend am linken Rand der Wand, kommt auch eine gültige Rundtour zustande (siehe Abbildung 6.5 (i)). Allerdings entstehen hierbei nur Kosten in Höhe von $\pi + 2$. Es drängt sich die Vermutung auf, dass die Möglichkeit der Rotation bei dieser Startkonfiguration keinen Nutzen mit sich bringt. Dies wollen wir beweisen.

Lemma 16 *Für eine kreisförmige Umgebung F mit Radius 1 kommt für $\mu = 1$ eine minimale, die Umgebung überdeckende Rundtour r mit der oben definierten Startposition ohne Rotationsbewegungen aus.*

Beweis. Betrachte Abbildung 6.5 (i). Die dort angegebene Rundtour führt zunächst eine Translation bis zum gegenüberliegenden Punkt a mit Kosten 2 aus, wobei die gesamte rechte Hälfte des Einheitskreises exploriert wird. Anschließend wird entlang der linken Wand mit Kosten π translatiert, wobei die linke Hälfte exploriert wird. Insgesamt ergeben sich Kosten von $2 + \pi$.

Angenommen, es gäbe eine Rundtour, welche auch eine Rotation vornimmt, gibt es zwei zu unterscheidende Fälle:

1. Es wird während der Rundtour mindestens eine viertel Drehung ($\geq \frac{\pi}{2}$) um die eigene Achse ausgeführt. Um den Punkt a zu erkunden, muss mindestens bis zum Kreismittelpunkt translatiert werden. Für eine Rundtour ergeben sich so für Hin- und Rückweg sowie Hin- und Rückdrehungen mindestens Kosten von $2 + \pi$. Bis dahin ist aber noch kein Punkt der linken Kreishälfte erkundet, womit wir auf jeden Fall höhere Kosten erhalten als mit obiger reinen Translation.
2. Es wird während der Rundtour insgesamt weniger als eine viertel Drehung ausgeführt. Dann können die Punkte auf dem linken Rand des Einheitskreises nur erkundet werden, indem der Fotograf auf ihm translatiert. Es ergeben sich erneut mindestens $2 + \pi$ Kosten zuzüglich der erfolgten Drehung. Erneut ist die reine Translation besser.

Eine optimale Rundtour zu der gegebenen Startposition besteht also nur aus Translationsbewegungen. Dass die in Abbildung 6.5 (i) gezeigte Rundtour auch unter allen reinen Translationen optimal ist, ergibt sich aus der Überlegung, dass zur Exploration des linken Randes keine andere Möglichkeit besteht, als diesen direkt abzulaufen. Somit ist die Tour bis auf die Ablaufrichtung auch eindeutig. \square

Gleichzeitig ist $2 + \pi$ anscheinend aber auch untere Schranke für optimale Wege bei freier Wahl der Startkonfiguration. Der der Blickrichtung abgewandte Kreisrand ist nur durch eine Translation an ihm zu erkunden. Hinzu kommt der direkte Rückweg.

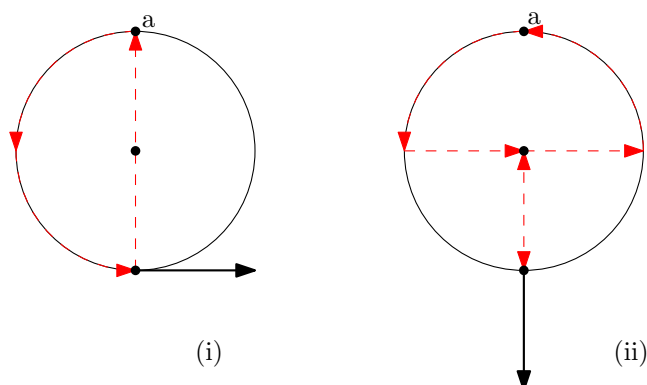


Abbildung 6.5: (i) Eine optimale Rundtour mit Kosten $2 + \pi$ im Einheitskreis. (ii) Bei Start auf dem Rand und Blickrichtung nach außen wird der Worstcase mit mindestens $4 + \pi$ Kosten angenommen.

Was ergibt sich aber für beliebige Startkonfigurationen als obere Schranke? Trivialerweise können wir von $4 + \pi$ ausgehen, denn mit höchstens Kosten 2 finden wir von jedem Startpunkt aus eine Translationsbewegung auf die oben beschriebene Tour und zurück zum Ausgangspunkt. Ein Beispiel, in dem diese obere Schranke auch angenommen wird, zeigt Abbildung 6.5 (ii). Ähnlich wie im Beweis zu Lemma 16 kann hier auch argumentiert werden, dass mit Rotationen zu keiner besseren Lösung zu kommen ist.

Besteht denn aber unabhängig von der Startposition und Ausrichtung der optimale Weg immer lediglich aus Translationsbewegungen?

Lemma 17 *Für eine kreisförmige Umgebung F mit Radius 1 kommt eine minimale, die Umgebung überdeckende Rundtour ohne vorgegebene Startkonfiguration ohne Rotation des Fotografen aus.*

Beweis. Ein optimaler Pfad, welcher Rotationen beinhaltet, wird keine volle Drehung beschreiben können. Diese verursacht mindestens Kosten von 2π , um den gesamten Kreis explorieren zu können. Mit reiner Translation benötigen wir nur $2 + \pi$ Kosten. Es kann also im Laufe der Rundtour keine volle Umdrehung ausgeführt werden.

Hier kann nun für den weiteren Beweis folgende Idee weiterhelfen: wie wir jetzt wissen, ist die insgesamt während der Tour ausgeführte Drehbewegung nach oben durch eine Konstante beschränkt. Durch diese Winkelbeschränkung entsteht eine Fläche im Kreis, welche nicht durch Rotation abgedeckt werden kann, sondern nur durch eine Translation erreicht werden kann. Durch diese Translation entstehen erneut Kosten, welche den maximalen Drehwinkel weiter einschränken. Eine weitere Einschränkung des Drehwinkels führt zu einer längeren Translationsstrecke, was die Rotationsmöglichkeiten weiter einschränkt. Durch Aufstellen und Lösen dieser

Rekursionsgleichung wollen wir zeigen, dass sich für die maximal mögliche Rotation ein Winkel von 0 ergibt.

Da wir gleiche Start- und Endkonfiguration fordern, kommt insgesamt während des Tourverlaufs nur weniger als eine halbe Hin- und Rückdrehung in Frage. Wenn der Fotograf nun aber während seiner Tour nur eine halbe Umdrehung ausführen kann, deckt er damit maximal einen Halbkreis ab. Um die verbliebene Umgebung zu explorieren muss also mindestens noch einmal eine Strecke in Länge des Kreisradius abgelaufen werden (vgl. Abbildung 6.6 (i)).

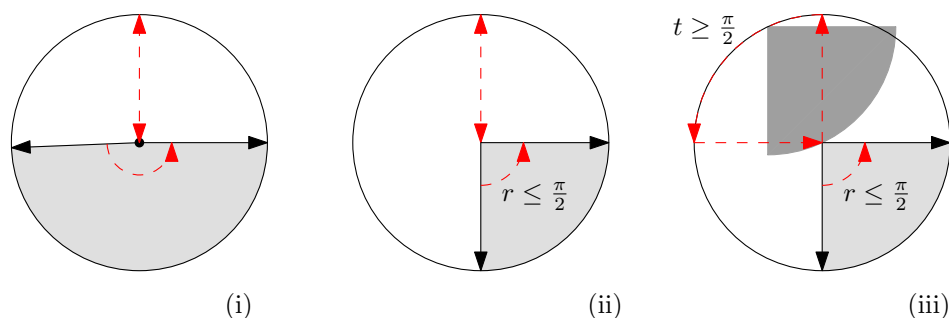


Abbildung 6.6: (i) Wird im Laufe einer Rundtour weniger als eine halbe Umdrehung ausgeführt, muss der Kreisradius mindestens einmal abgelaufen werden. (ii) Der maximal mögliche Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$. (iii) Ein gegenüberliegender Teil des Kreisrandes kann nur durch Translation entlang des Randes eingesehen werden.

Wenn wir berücksichtigen, dass wir eine Weglänge von weniger als $2 + \pi$ erreichen wollen, verbleiben nach dem zweifachen Ablaufen des Radius noch maximal π Kosten für Hin- und Rückdrehung, also insgesamt ein Rotationswinkel von $r \leq \frac{\pi}{2}$ (vgl. Abbildung 6.6 (ii)). Daraus ergibt sich aber, dass nun das gegenüberliegende Kreisbogensegment nur erkundet werden kann, wenn der Fotograf selbst über dieses translatiert, wie Abbildung 6.6 (iii) verdeutlicht. Für den gegenüberliegenden abzulaufenden Kreisbogen ergibt sich eine Länge von mindestens $t \geq \frac{\pi}{2}$.

Die bei der Translation entstandenen Kosten fehlen uns aber nun wieder bei der Rotation, eine kleinere Rotation bedeutet aber wieder eine größere Translation. Diese Wechselbeziehung wollen wir als Gleichungssystem formulieren.

Als erste Invariante stellen wir zunächst eine obere Schranke für die Kosten der aus Rotation und Translation bestehenden Rundtour auf. Unsere Rundtour selbst besteht aus drei Teilen: zum einen ergeben sich aus dem Rotationswinkel r für die Hin- und Rückdrehung Kosten in Höhe von $2r$. Weiterhin muss die Strecke vom Kreismittelpunkt zum Kreisbogenstück der Länge t zweimal abgelaufen werden, was Kosten in Höhe von 2 verur-

sacht. Zuletzt muss das gegenüberliegende Kreisbogenstück der Länge t selbst abgelaufen werden. Wenn wir unterhalb der Kosten der schon gefundenen Rundtour bleiben möchten, ergibt sich

$$\underbrace{2r + t + 2}_{\text{Kosten einer Tour mit Rotationen und Translation}} \leq \underbrace{2 + \pi}_{\text{Minimale Kosten einer reinen Translationstour}}$$

Als zweite Invariante schätzen wir minimale Länge t des abzulaufenden Kreisbogenstücks ab. Ausgehend vom gesamten Kreisrand der Länge 2π ziehen wir den Rotationsbereich r des Fotografen sowie die beiden Viertelkreise, welche zu beiden Seiten angrenzen, ab (siehe Abbildung 6.7).

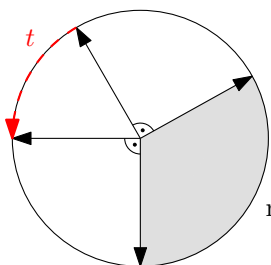


Abbildung 6.7: Die Länge des abzulaufenden Kreisbogenstücks t .

Als zweite Invariante ergibt sich somit

$$t \geq 2\pi - \pi - r$$

Erinnern wir uns an die Beweisidee: wir haben festgehalten, dass r maximal eine halbe Hin- und Rückrotation beschreiben kann. Damit hat sich eine Mindestlänge t ergeben, was wiederum die Rotation r weiter beschränkte. Sei nun r_i die in der i -ten Iteration ausgeführte Rotation und t_i die in der i -ten Iteration ausgeführte Translation auf dem gegenüberliegenden Kreisbogenstück. Aus den beiden obigen Invarianten lassen sich dann folgende Rotationsgleichungen ableiten:

$$r_i \leq \frac{\pi - t_{i-1}}{2}$$

$$t_i \geq \pi - r_i$$

Durch Einsetzen ineinander erhalten wir die Fixpunktgleichungen

$$r^* \leq \frac{\pi - (\pi - r^*)}{2} \Leftrightarrow r^* \leq 0$$

und

$$t^* \geq \pi - \left(\frac{\pi - t^*}{2}\right) \Leftrightarrow t^* \geq \pi$$

Wir haben also gezeigt, dass die ausgeführte Rotation gleich 0 ist und auf dem gegenüberliegenden Kreisbogenstück eine halbe Kreisumdrehung translatiert werden muss, was genau unserem im Beweis zu Lemma 16 gefundenen optimalen Pfad entspricht. \square

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Theorem:

Theorem 18 *Für das Fotografenproblem im Einheitskreis mit kumulativem Kostenmaß und Gewichtungsparemeter $\mu = 1$ gilt:*

1. *Unabhängig von der Startkonfiguration existiert eine Rundtour mit maximal $\pi + 4$ Kosten.*
2. *Bei freier Wahl einer Startkonfiguration entstehen mindestens Kosten $\pi + 2$, dabei nutzen optimale Rundtouren lediglich Translationsbewegungen.*
3. *Die angegebenen Schranken sind scharf.*

6.3 NP-Härte

Allein aufgrund der starken Ähnlichkeit zum Überdeckungsproblem durch ein Liniensegment mit mittigem Bezugspunkt liegt nahe, dass das Fotografenproblem einige seiner Eigenschaften mit ihm teilen wird. Der in Kapitel 4.1 geführte Beweis zur NP-Härte für $\mu = 0$ lässt sich direkt übertragen. Durch eine Skalierung des dort verwendeten Hexgraphen G sowie der daraus abgeleiteten Umgebung F um den Faktor 2 erhalten wir gleiche Aussagen für die Überdeckung durch einen Kreis mit doppeltem Durchmesser. Genau dieser entsteht beim Partyfotografenproblem mit $\mu = 0$. Der Fotograf darf sich ohne Mehrkosten laufend um die eigene Achse drehen, es entsteht ein kreisförmiger Sichtbereich mit Radius 1, also Durchmesser 2.

Anpassen müssen wir weiterhin die Übergänge zwischen den einzelnen Kreisen, aus denen F besteht. Während dem Rasenmäher ein Verlassen seiner Rasenfläche erlaubt war, wäre der Fotograf in jedem seiner Kreise gefangen. Wir passen diese also an, indem wir den sich berührenden Kreisen einen infinitesimal schmalen Bereich der Überlappung lassen, den Radius der Kreise nun also auf $1 + \epsilon$ setzen.

Dieser Schritt verbaut uns aber leider die Möglichkeit, Aussagen für einfache Flächen F zu machen, also Flächen, welche keine Löcher oder freistehende Wände im Inneren haben. Die beim allgemeinen Überdeckungsproblem erwähnte Möglichkeit der schmalen Schlitze in F würde für den Fotografen ein unüberwindliches Hindernis bedeuten. Ob das Fotografenproblem auch für den Fall einer komplett ausgefüllten Umgebung F für bestimmte μ weiterhin NP-hart bleibt, muss an dieser Stelle leider unbeantwortet bleiben.

Dafür werden wir unsere Erkenntnisse in eine andere Richtung erweitern. Es soll gezeigt werden, dass das Partyfotografenproblem auch für beliebiges μ NP-hart ist. Wir beginnen mit dem Fall eines sehr großen μ und werden später Aussagen darüber machen, wie wir die benutzen Beweisideen verallgemeinern können. Für den Anfang gehen wir davon aus, dass $\mu \rightarrow \infty$, unser Fotograf also lediglich translatiert.

Erneut besinnen wir uns auf das Hamiltonkreisproblem in dicht verbundenen Hexgraphen, von dem wir dank Theorem 9 wissen, dass es NP-vollständig ist. Wir zeigen, dass wir mittels des Partyfotografenproblems das Hamiltonkreisproblem im Hexgraphen lösen können.

Theorem 19 *Zu einer gegebenen Probleminstanz H des Hamiltonkreisproblems in dicht verbundenen Hexgraphen mit n Knoten existiert eine in Polynomzeit berechenbare Probleminstanz F des Partyfotografenproblems mit $\mu \rightarrow \infty$, so dass der Hexgraph genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn das Partyfotografenproblem optimal mit einem Pfad der Länge $4 \cdot n$ lösbar ist.*

Beweis. Der Beweis von Theorem 19 wird ähnlich dem von Theorem 9 verlaufen. Allerdings wird die Umgebung F nicht mehr aus Einheitskreisen sondern aus Rechtecken - wir nennen sie *Kammern* - zusammengesetzt sein.

Eine einzelne der rechtwinkligen Kammern hat dabei eine Breite von 2 und eine Höhe von 1. Jede Kammer kann bis zu drei infinitesimal schmale Eingänge und Ausgänge haben. Jeweils einen in der linken und rechten oberen Ecke, sowie einen an der Unterseite mittig. Abbildung 6.8 zeigt eine Kammer mit drei solchen Ein- und Ausgängen.

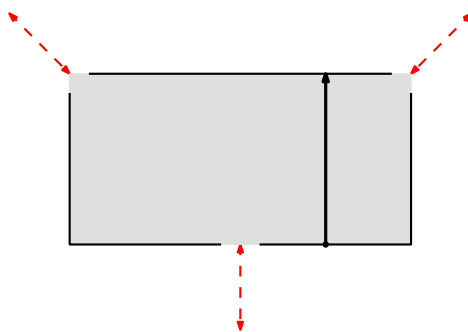


Abbildung 6.8: Eine Kammer mit drei Ein- und Ausgängen.

Wir gehen davon aus, dass der Fotograf während der Tour seine Ausrichtung nach oben hat. Es ist einfach, solch ein Verhalten für eine optimale Tour zu erzwingen: wir fügen irgendwo seitlich an unserer Fläche einen sehr langen Gang mit Höhe 1 und Breite m an. Ist m groß genug, wird für eine optimale Tour nur ins Gewicht fallen, den Gang optimal abzulaufen - dies ist

nur bei senkrechter Ausrichtung möglich. Fügen wir zusätzlich noch Spitzen als Hindernisse ein, wie sie in Abbildung 6.9 gezeigt sind, können wir eine Ausrichtung nach oben erzwingen.

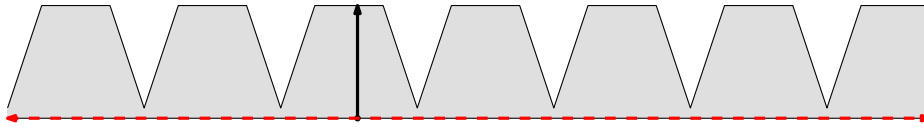


Abbildung 6.9: Ein langer Gang zwingt den Fotografen, sich nach oben auszurichten.

Da wir also die Ausrichtung des Fotografen kennen, schauen wir uns nun an, wie eine einzelne Kammer optimal abgedeckt werden kann. Weil wir später mehrere Kammern aneinandersetzen werden, interessieren wir uns nur für Pfade, welche bei einem der Eingänge beginnen und einem der Eingänge enden.

Da die Ausrichtung des Fotografen nach oben feststeht, bleibt einem Pfad für eine Abdeckung der Kammer keine andere Wahl, als den gesamten unteren Rand der Kammer abzulaufen, um dort sämtliche randnahen Punkte einsehen zu können. Man sieht schnell, dass bei gewünschtem Start- und Endpunkt auf den Eingängen mindestens Translationskosten von $k_{trans} = 4$ entstehen. Insgesamt gibt es aber mehrere verschiedene Möglichkeiten, mit diesen Kosten die gesamte Kammer abzudecken.

Insbesondere ist es möglich, von jedem Eingang zu jedem anderen Eingang einen Weg der Länge 4 zu finden, welcher eine optimale Abdeckung bildet, wie Abbildung 6.10 (i) und (ii) zeigen. Einzige weitere Möglichkeit eine Kammer mit Kosten $k_{trans} = 4$ abzudecken ist eine Tour vom unteren mittleren Eingang zurück zu diesem, wie in Abbildung 6.10 (iii) dargestellt.

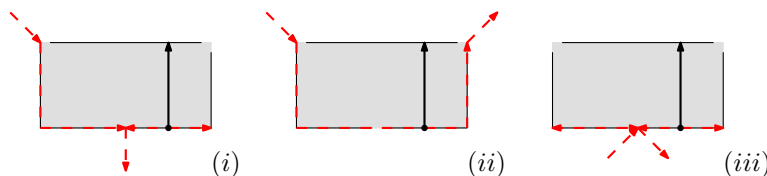


Abbildung 6.10: Abzüglich Spiegelungen und verschiedener Ablauffrichtungen gibt es drei Möglichkeiten, eine Kammer mit Kosten 4 optimal abzudecken.

Wie simulieren wir damit aber nun den gegebenen Hexgraphen H ? Wir reihen die einzelnen Kammern an den Eingängen passgenau aneinander - aus den Eingängen werden *Durchgänge*. Für jeden Knoten aus H setzen wir eine Kammer ein, für jede Kante aus H lassen wir die Durchgänge, welche

die beiden Knotenkammern verbinden, geöffnet. In diesem Fall benötigen wir nicht einmal die Eigenschaft der dichten Verbundenheit von H . Falls zwei benachbarte Knoten keine gemeinsame Kante haben, schließen wir den entsprechenden Durchgang. So können wir zu jedem gegebenen Hexgraphen eine Umgebung F konstruieren, wie es Abbildung 6.11 für ein vorgegebenes H zeigt.

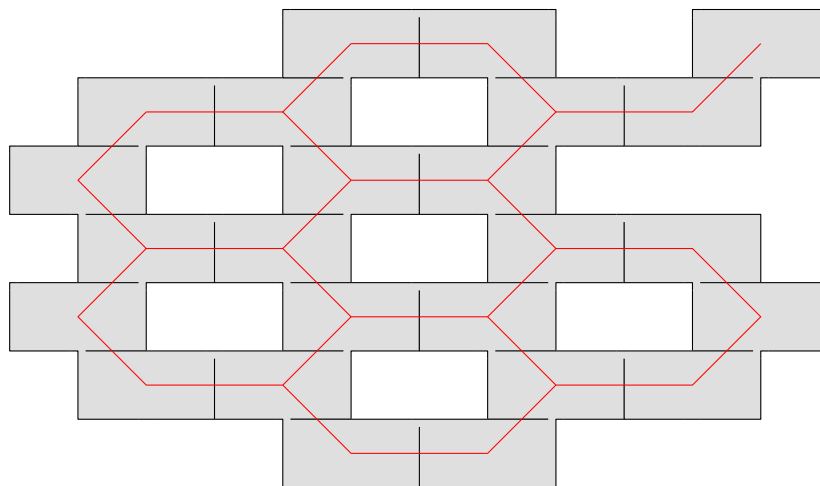


Abbildung 6.11: Ein gegebener Hexgraph H wird aus einzelnen Kammern zusammengesetzt. Nicht eingezeichnet ist der noch benötigte lange Gang aus Abbildung 6.9.

Es ist ohne weiteres einzusehen, dass die Konstruktion von F in von n abhängiger Polynomzeit vonstatten gehen kann. Genau genommen ist nur Linearzeit nötig. Für jeden Knoten und seine angrenzenden Kanten kann in konstanter Zeit die zugehörige Kammer konstruiert werden.

Es verbleibt nach der Konstruktion von F also noch der eigentliche Kernbeweis: wir müssen zeigen, dass H genau dann einen Hamiltonkreis besitzt, wenn eine optimale Rundtour durch F Kosten von $k_{trans} = 4 \cdot n$ hat.

Die *Hinrichtung* „ \Rightarrow “ ist rasch abgehandelt. Wir wissen, dass wir während einer Rundtour jede Kammer irgendwo betreten und irgendwo verlassen müssen. Jede Kammer verursacht uns dabei für eine Abdeckung mindestens Kosten von 4, solange wir die Kammer durch verschiedene Eingänge betreten und verlassen. Weitere Annahme war, dass auf H ein Hamiltonkreis existiert. Also existiert eine Tour durch alle Kammern, bei der jede Kammer nur einmal besucht wird und durch verschiedene Durchgänge betreten und verlassen wird. Damit hat eine optimale Rundtour durch F Kosten von $k_{trans} = 4 \cdot n$.

Die *Rückrichtung* „ \Leftarrow “ ist ebenso schnell gezeigt. Wir wissen, dass eine optimale Rundtour durch F Kosten von $k_{trans} = 4 \cdot n$ erzeugt, wir also für

jede Kammer im Schnitt nur Kosten von 4 erzeugen dürfen. Jede Kammer muss dabei durch Eingänge betreten und verlassen werden, wobei es nur drei Möglichkeiten gibt, dies mit Kosten 4 zu schaffen, wie Abbildung 6.10 gezeigt hat. Der Fall (iii) kann dabei nicht auftreten. Zwar erzeugt er auch nur Kosten von 4, allerdings resultiert dies in der nach unten benachbarten Kammer in zwei parallel einmündenden Pfaden. Da wir insgesamt eine Rundtour suchen, würden zwei parallel einmündende Pfade bedeuten, dass eine Kammer mehrmals betreten und verlassen wird. Durch ein mehrmaliges Betreten und Verlassen einer Kammer ist zwar auch eine komplette Abdeckung mit Kosten 4 möglich, wie Abbildung 6.12 (i) zeigt. Allerdings münden hier die parallelen Pfade nach unten, womit sie in der angrenzenden Kammer oben einmünden. Und für parallel einmündende Pfade an einem der oberen Eingänge gibt es keine Möglichkeit, in einer Kammer auf Kosten ≤ 4 zu kommen, wie man sich leicht anhand von Abbildung 6.12 (ii) klarmachen kann. Aus der Gesamtkostenschranke von $k_{trans} = 4 \cdot n$ folgt also, dass uns jede Kammer mindestens Kosten von 4 erzeugt und jede Kammer durch verschiedene Eingänge betreten und verlassen wird. Weiterhin wird jede Kammer besucht, da wir sonst keine komplette Überdeckung hätten. Wir haben also eine Rundtour durch alle Kammern gefunden, wobei jede Kammer nur einmal besucht wird. Anders gesprochen: wir haben eine Rundtour durch alle Knoten gefunden, wobei jeder Knoten nur einmal besucht wird: ein Hamiltonkreis.

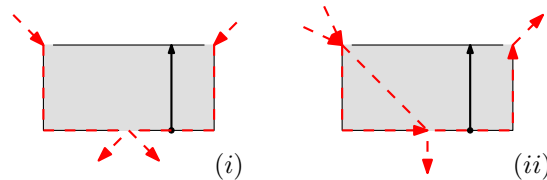


Abbildung 6.12: Abdeckung einer Kammer durch mehrmaliges Betreten und Verlassen. Eine Abdeckung mit Kosten 4 ist nur möglich, wenn der untere Eingang doppelt benutzt wird (i). Soll einer der oberen Eingänge doppelt benutzt werden, entstehen höhere Kosten (ii).

Damit wäre Theorem 19 bewiesen. \square

Wie können wir die obigen Beweisideen aber nutzen, um für das allgemeine Problem unabhängig von μ Aussagen zu machen? Der Schlüssel zum Beweis war die Konstruktion der Kammern. Wichtig war, dass für eine Abdeckung der Kammern die Weglänge gleich lang war, unabhängig davon, welche Durchgänge als Ein- und Ausgang dienen. Für ein senkrecht ausgerichtetes Liniensegment waren bei den Kammern eigentlich nur der rechte und linke untere Punkt der Kammer von Bedeutung, der übrige untere Kammerrand wurde ohnehin mit abgedeckt. Tragen wir Sorge dafür, dass beide

Eckpunkte bei einer Überdeckung auf jeden Fall vom Fotografen persönlich besucht werden, entstehen uns für alle Pfade identische Kosten.

Hier können wir ansetzen. In den unteren beiden Ecken einer jeden Kammer richten wir kleine *Taschen* ein: kleine Winkel, welche nur eingesehen werden können, wenn der Fotograf selbst bis in die Ecke hineintritt. Wenn wir diese Taschen klein genug halten, macht es für die Gesamtkonstruktion keinen Unterschied mehr, ob die Tasche selbst durch eine Rotation oder Translation eingesehen wird, wichtig ist, dass wir den Fotografen in jeder Kammer die Kosten von 4 alleine durch seine Translation entstehen lassen.



Abbildung 6.13: Eine um zwei Taschen erweiterte Kammer. Aufgrund der Berührungen mit den benachbarten Kammern ist jeweils eine Tasche nach unten und eine Tasche seitlich ausgerichtet.

Abbildung 6.13 zeigt eine einzelne Kammer mit Taschen. Aufgrund der Berührungen der Kammern untereinander ist jeweils eine Tasche nach unten und eine zu Seite angebracht. Eine Gesamtübersicht über den Beweis geben die darauf folgenden Abbildungen: Abbildung 6.14 zeigt einen Hexgraphen mit hervorgehobenem Hamiltonkreis, Abbildung 6.15 zeigt dazu die Anordnung der mit Taschen erweiterten Kammern sowie einen optimalen Pfad für den Fotografen. Man erkennt, dass dieser die Kammern in der Reihenfolge des Hamiltonkreises besucht.

Damit haben wir insgesamt eine noch allgemeinere Form von Theorem 19 bewiesen:

Theorem 20 *Zu einer gegebenen Problem Instanz H des Hamiltonkreisproblems in dicht verbundenen Hexgraphen mit n Knoten existiert eine in Polynomzeit berechenbare Problem Instanz F des Partyfotografenproblems, so dass für beliebiges μ der Hexgraph genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn das Partyfotografenproblem optimal mit einem Pfad der Länge $4 \cdot n$ lösbar ist.*

Damit ist das Partyfotografenproblem unabhängig vom Gesichtungsfaktor μ np-hart.

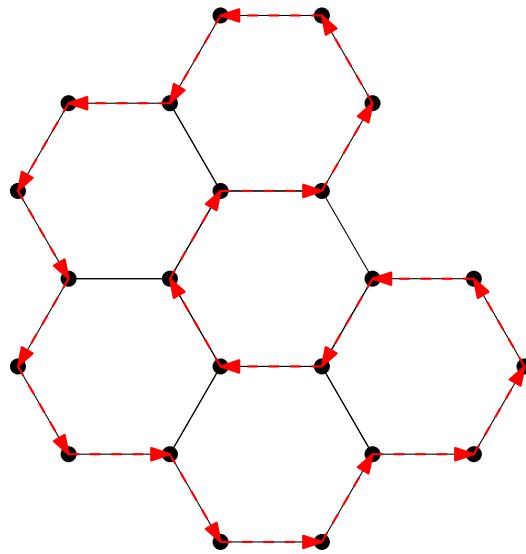


Abbildung 6.14: Ein Hamiltonischer Hexgraph, sein Hamiltonkreis ist rot hervorgehoben.

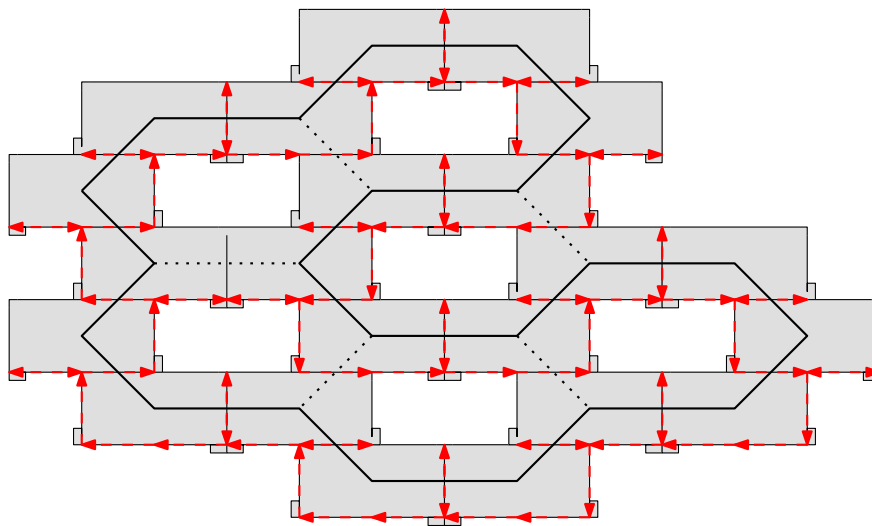


Abbildung 6.15: Der Nachbau des Hamiltonkreises aus Abbildung 6.14 mit den um Taschen erweiterten Kammern und rot eingezeichnetem optimalem Fotografenpfad. Man erkennt, dass der Fotograf die Kammern der Reihenfolge des Hamiltonpfads nach besucht.

6.4 Ein Näherungsverfahren

Nachdem nun klar ist, dass auch beim Partyfotografenproblem kein Algorithmus in Sicht ist, welcher Hoffnung auf optimale Lösungen in annehmbarer Zeit macht, möchten wir hier ebenfalls kompetitive Verfahren untersuchen. Es leuchtet schnell ein, dass der in Kapitel 5 vorgestellte DREIECKSLÄUFER dem Partyfotografen nicht helfen kann, da er eventuell im Weg stehende Wände nicht berücksichtigt.

Ausgehend von der Tatsache, dass der Fotograf in seinem Raum gefangen ist und die randnahen Punkte nur einsehen kann, wenn er die Wand innerhalb seiner Reichweite abläuft, liegt die Idee nahe, daraus ein allgemeines Verfahren zu entwickeln.

Anfangen bei einem Randpunkt fängt der Fotograf an, die Wand abzulaufen, wobei er seinen Blick stets orthogonal zur Wand in das Innere der Umgebung richtet. Ist die Wand komplett umrundet, wird eine Einheit ins Innere translatiert und mit der restlichen zu überdeckenden Fläche rekursiv fortgefahren. Ist keine innere Fläche mehr vorhanden, kehrt der Fotograf auf gleichem Wege zurück.

Man sieht, dass für bestimmte Umgebungen obige Strategie - wir nennen sie im Folgenden RANDLÄUFER - eine gültige Überdeckung erzeugt. Konvexe Flächen überdeckt der RANDLÄUFER problemlos, wie Abbildung 6.16 zeigt.

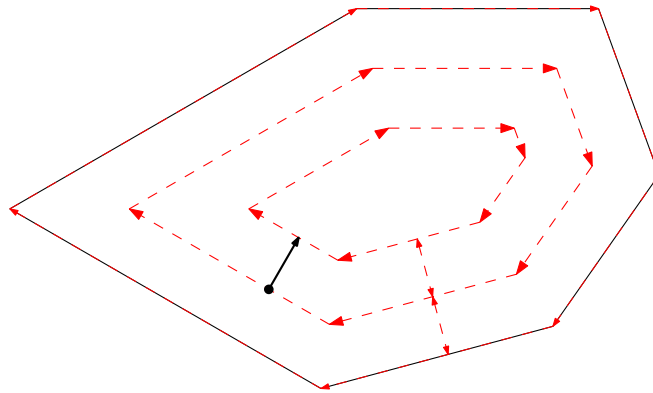


Abbildung 6.16: Überdeckung eines konvexen Polygons durch die RANDLÄUFER-Strategie.

Wir werden sehen, dass der RANDLÄUFER für festes μ sogar nur kompetitiv schlechter als ein optimaler Algorithmus ist:

Theorem 21 *Sei F eine konvexe Fläche und das Partyfotografenproblem optimal mit Kosten $k_{opt}(F)$ auf F lösbar. Es existieren C und A in Abhängigkeit von μ , so dass der RANDLÄUFER eine Rundtour mit Kosten*

$$k_{\text{RANDLÄUFER}}(F) \leq C \cdot k_{opt}(F) + A$$

erzeugt.

Beweis. Wir führen einige Hilfsvariablen zu der gegebenen Fläche F ein: bezeichne U die Länge des Umfangs von F . Weiterhin sei \mathcal{D} der längste der kürzesten Pfade zwischen zwei Randpunkten in F , also der Diameter. Wir konstruieren das kleinste mögliche Rechteck, das F komplett einschließt, und dessen Längsseite parallel zu \mathcal{D} verläuft. Die Länge der Längsseite ist gleich der Länge von \mathcal{D} , wir bezeichnen sie mit D . Die Länge der Schmalseite wollen wir mit d bezeichnen. Abbildung 6.17 zeigt dies noch einmal grafisch.

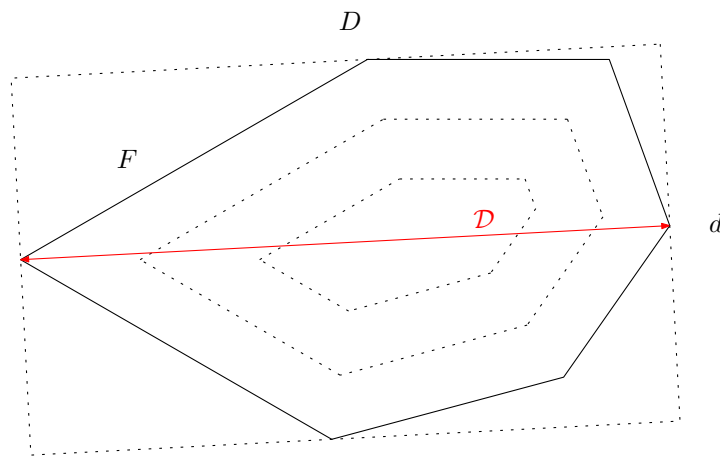


Abbildung 6.17: Ein konvexes Polygon mit seinem Diameter \mathcal{D} sowie der Längen D und d des kleinsten umschließenden Rechtecks parallel zu \mathcal{D} .

Der Beweis von Theorem 21 besteht aus drei Abschätzungen, für welche wir einzeln die Existenz von Konstanten C_1, C_2 und C_3 beweisen und die zusammen die Kompetitivität des RANDLÄUFER direkt ergeben.

$$C_1 \cdot K_{opt}(F) \geq \text{Fläche}(F) \quad (6.1)$$

$$C_2 \cdot \text{Fläche}(F) \geq d \cdot U \quad (6.2)$$

$$C_3 \cdot d \cdot U \geq K_{\text{RANDLÄUFER}}(F) \quad (6.3)$$

Die erste Abschätzung ist schnell gezeigt: sowohl für Translations- als auch Rotationsbewegungen gilt eine obere Schranke bezüglich der maximal überdeckbaren Fläche pro Kosteneinheit. Für reine Translation ist eine Bewegung senkrecht zur Blickrichtung optimal. Es entstehen für jede abgedeckte Flächeneinheit Kosten von 1. Für die Rotation gelten je nach μ ähnliche Schranken, eine Kombination aus Rotation und Translation wird dieses Verhältnis nicht verbessern können.

Für die zweite Abschätzung benötigen wir die oben gegebenen Hilfsvariablen. Über den Umfang U wissen wir, dass er linear durch den Umfang

des umschließenden Rechtecks beschränkt ist, da F konvex ist. Also gilt:

$$\begin{aligned} C_2 \cdot \text{Fläche}(F) &\geq d \cdot U \\ \Leftrightarrow C_2 \cdot \text{Fläche}(F) &\geq d \cdot (2d + 2D) \\ \Leftrightarrow C_2 \cdot \text{Fläche}(F) &\geq d \cdot 4 \cdot D \end{aligned}$$

Die Fläche von F ist ebenso durch das umschließende Rechteck beschränkt - sowohl nach oben als auch nach unten. Die kleinste anzunehmende Fläche für F besteht aus einer Raute, welche symmetrisch im Rechteck liegt. Ihre Fläche entspricht genau der Hälfte des Rechtecks.

$$\begin{aligned} C_2 \cdot \text{Fläche}(F) &\geq d \cdot 4 \cdot D \\ \Leftrightarrow C_2 \cdot \frac{d \cdot D}{2} &\geq d \cdot 4 \cdot D \\ \Leftrightarrow C_2 &\geq 8 \end{aligned}$$

Für die dritte Abschätzung ist ein Blick auf das Vorgehen des RANDLÄUFER nötig. Der Fotograf dreht mehrere Runden in F , wobei die einzelnen Runden jeweils nur kleiner als der Umfang von F werden können. Es verbleibt die Frage, wie viele Runden der Fotograf drehen muss. Hier ist die Anzahl der Runden linear durch d beschränkt. Wäre dem nicht so, müssten die einzelnen Randsegmente von F in beliebig steilem Winkel zu \mathcal{D} stehen, was im Widerspruch zu der Annahme steht, dass \mathcal{D} der Durchmesser ist. An Rotationskosten entsteht durch die Konvexität der einzelnen Runden jeweils eine volle Umdrehung pro Runde. Für ein konstantes μ entstehen pro Runde also konstante Kosten. Hier geht der Gewichtungsfaktor μ in den Kompetitiven Faktor ein. \square

Für konvexe Polygone haben wir somit also gezeigt, dass es ein kompetitives Verfahren geben kann. Hilft uns der Randläufer aber auch bei komplexeren Umgebungen? Leider nein! Selbst für einfache, sternförmige Flächen können die Kosten unbegrenzt wachsen, wie Abbildung 6.18 zeigt.

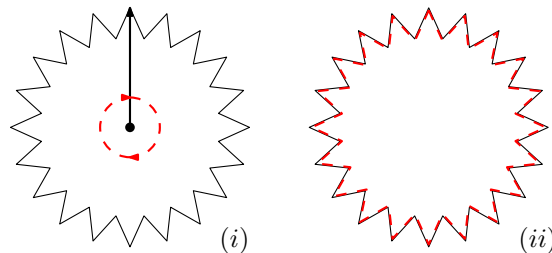


Abbildung 6.18: Während ein optimaler Weg mit einer einfachen Umdrehung konstante Kosten erzeugt (i) kann der RANDLÄUFER in Abhängigkeit von der Randbeschaffenheit beliebig hohe Kosten erzeugen (ii).

Uns wird zum Verhängnis, dass die Randlänge nicht durch die Fläche beschränkt sein muss. Können wir diese Bedingung sicherstellen, bleibt auch die Güte des RANDLÄUFER erhalten. Insbesondere ist dies bei Flächenkonstruktionen auf Gittergraphen der Fall. Jede einzelne Kachel des Gitters kann bei fester Fläche maximal alle bis auf eine Seite ihres Umfangs zum Gesamtumfang beitragen. Dennoch ist nicht gesagt, dass damit schon eine kompetitive Strategie gefunden ist. Es gibt keine Gewährleistung, dass die Restfläche nach der ersten Umrundung noch zusammenhängend ist. Hier wären weitere Strategien erforderlich, um die einzelnen Restflächen und deren erneute Unterteilungen günstig abzuarbeiten. Es darf vermutet werden, dass sich hierfür schnelle Polynomzeitalgorithmen finden lassen, ihre Ausarbeitung und Analyse würden den Rahmen dieser Arbeit allerdings sprengen.

Kapitel 7

Schlussbemerkungen

Die vorliegende Arbeit hat sich mit verschiedenen Problemstellungen auseinandergesetzt, welche im Zusammenhang mit überdeckenden Pfaden durch ein Liniensegment stehen. Dabei wurden die Kosten für die entstehenden Bewegungen mit einem Kostenmaß bewertet, welches bisher nicht untersucht wurde, in den konkreten Anwendungsfällen aber durchaus Sinn ergeben hat.

Im Einzelnen wurden zwei Szenarien genauer untersucht: ein allgemeiner Fall für die Bewegung eines Liniensegments sowie ein speziellerer Fall - das Partyfotografenproblem. Bei diesem haben wir den Bezugspunkt an eines der Enden des Liniensegments verschoben und zusätzliche Einschränkungen bezüglich erlaubter Konfigurationen gemacht. Auch wenn die Detailfragen jeweils anders gelautet haben, ähneln sich die gesammelten Erkenntnisse doch recht stark.

Für einzelne, einfache Probleminstanzen haben wir optimale Wege aufzeigen können. Auffällig war dabei, dass kaum ein einheitlicher Lösungsweg bestand. Zu konkreten Fragestellungen hat sich kein festes Schema durchgesetzt, nach welchem man Lösungen angeben kann. Die einzelnen Ergebnisse wurden jeweils anders gewonnen, die Palette reichte vom argumentativen Vorgehen über das Aufstellen von Gleichungssystemen und Fixpunktberechnung bis zur Aufstellung einer Kostenfunktion und Berechnung ihrer Extrempunkte. Für schon leicht kompliziertere Umgebung war mit vertretbarem Aufwand kaum ein Lösungsweg zu beschreiben. Dies führte uns zu der Vermutung, dass allgemeine Lösungsverfahren einerseits schwer zu finden und andererseits mit ungünstigen Laufzeiten verbunden sind.

Tatsächlich konnte ein Beweis der np -Härte für das Partyfotografenproblem erbeacht werden! Auch für das allgemeinere Liniensegmentproblem konnten wir zumindest unter Vernachlässigung der Rotationskosten die NP -Härte nachweisen. Ausgangspunkt für die gegebenen Beweise war dabei stets das Hamiltonkreisproblem. Obwohl auf den ersten Blick keineswegs offensichtlich, besteht hier anscheinend doch ein enger Zusammenhang zwischen beiden Problemen. Dies ist ein wertvoller Ansatz für weitere Forschungen.

Auf der Suche nach einer allgemeinen Problemlösung konnten Erfolge erzielt werden, sobald wir von einem Lösungsverfahren keine Optimalität mehr erwartet haben. Wir haben gezeigt, dass für das allgemeine Liniensegmentproblem durchaus ein gegenüber einem optimalen Verfahren kompetitiv schlechterer Algorithmus existiert. Für konvexe Umgebungen war dies auch für den Partyfotografen möglich.

Dennoch hat die Arbeit wegen ihres Charakters als Einstiegswerk in einen kaum untersuchten Teilbereich der algorithmischen Geometrie mehr Fragen aufgeworfen als beantwortet. Die interessantesten davon sind vermutlich die Frage nach einem allgemeinen kompetitiven Verfahren des Partyfotografenproblems und der NP-Härte für das allgemeine Liniensegmentproblem unabhängig vom Gewichtungsfaktor zwischen Rotation und Translation.

Weiterhin wurde in vorliegender Arbeit bisher darauf verzichtet, für die angegebenen kompetitiven Verfahren den verwendeten Faktor näher zu bestimmen. Es wäre reizvoll, hier weitere graphentheoretische Arbeiten einzubeziehen, welche Angaben über die Lösung des Hamiltonkreisproblems in verschiedenen speziellen Gittergraphen machen. Es lässt sich vermuten, dass auf lange Sicht gesehen Verfahren gefunden werden könnten, welche in geringer Polynomzeit mit kleinem kompetitiven Faktor Lösungen liefern - sowohl für den allgemeinen Fall als auch für das Partyfotografenproblem.

Literaturverzeichnis

- [1] E. M. Arkin, S. P. Fekete, and J. S. B. Mitchell. Approximation algorithms for lawn mowing and milling. *Computational Geometry*, 17(1-2):25–50, 2000.
- [2] T. Asano, T. Asano, L. J. Guibas, J. Hershberger, and H. Imai. Visibility-polygon search and euclidean shortest paths. In *FOCS*, pages 155–164, 1985.
- [3] A. S. Besicovitch. Sur deux questions de l'intégrabilité. *Journal de la Société des Math. et de Phys. à l'Univ. à Perm. T.*, II, 1920.
- [4] A. S. Besicovitch. On keakeya's problem and a similar one. *Mathematische Zeitschrift*, 27:312–320, 1928.
- [5] M. Dror. Note on the complexity of the shortest path models for column generation in vehicle routing problem with time windows. *Operations Research*, 42:977–978, 1994.
- [6] V. A. Dubovitskij. *The Ulam problem of optimal motion of line segments*. Originaltitel in Russisch war 1980: *Zadacha Ulama ob optimal'nom sovmeshchenii otrezkov* Optimization Software, Publications Division, New York, 1985.
- [7] V. Gordon, Y. Orlovich, and F. Werner. Hamiltonian properties of triangular grid graphs. Preprint series 06-15, Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2006.
- [8] V. Gordon, Y. Orlovich, and F. Werner. Complexity of the hamiltonian cycle problem in triangular grid graphs. Preprint series 07-04, Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2007.
- [9] F. Hoffmann, C. Icking, R. Klein, and K. Kriegel. Moving an angle around a region. In *Proc. 6th Scand. Workshop Algorithm Theory*, volume 1432 of *Lecture Notes Comput. Sci.*, pages 71–82. Springer-Verlag, 1998.
- [10] C. Icking, G. Rote, E. Welzl, and C.-K. Yap. Shortest paths for line segments. *Algorithmica*, 10(2–4):182–200, 1993.

- [11] K. Islam, H. Meijer, Y. N. Rodríguez, D. Rappaport, and H. Xiao. Hamilton circuits in hexagonal grid graphs. In P. Bose, editor, *CCCG*, pages 85–88. Carleton University, Ottawa, Canada, 2007.
- [12] D. S. Johnson and C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Wiley, 1985.
- [13] S. Kakeya. Some problems on maximum and minimum regarding ovals. Tôhoku Science Reports 6, Tôhoku University, 1917.
- [14] J. O'Rourke. Finding a shortest ladder path: a special case. IMA Preprint Series 353, Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, 1987.
- [15] C. H. Papadimitriou and E. B. Silverberg. Optimal piecewise linear motion of an object among obstacles. *Algorithmica*, 2:523–539, 1987.
- [16] F. Preparata and M. Shamos. *Computational Geometry - An Introduction*. Springer-Verlag, 1 edition, 1985.
- [17] P. Rosenstiehl and R. E. Tarjan. Rectilinear planar layouts and bipolar orientations of planar graphs. *Discrete Comput. Geom*, 1:343–353, 1986.
- [18] J. T. Schwartz and M. Sharir. On the piano movers' problem: I. the case of a two-dimensional rigid polygonal body moving amidst polygonal barriers. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 36:345–398, 1983.
- [19] R. Seidel. A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 1(1):51–64, 1991.
- [20] R. Tamassia and I. G. Tollis. A unified approach to visibility representations of planar graphs. *Discrete Comput. Geom*, 1:321–341, 1986.

Bildnachweise

- Abbildung 4.8 sowie die Abbildungen 4.9, 4.10, 4.11 und 4.12 sind in in starker Anlehnung an die entsprechenden Abbildungen in [11] entstanden.
- Ich danke herzlich der *FPS Foto/Video-Press-Services, Coesfeld* (WWW.LUFTBILD-AUTO.DE) für die freundliche Genehmigung zum Abdruck von Abbildung 1.1.

Index

F	16
μ	15
k_{rot}	14
k_{trans}	14

A

Algorithmische Geometrie	5
--------------------------------	---

B

Bahnkanten	40
Bahnplanung	7
Besicovitch-Menge	6
Bewegung	12

D

dicht verbunden	24
Dreiecksläufer	48

E

Elementary shortest path problem	40
---	----

H

Hexgraph	24
----------------	----

K

Keakeya's Nadelproblem	5
Kammer	68
Kompetitivität	51
Kostenmaß	11
Kumulatives Kostenmaß	14
Kurze Bahnen	35

L

Lange Bahnen	35
Liniensegment	11

N

Natürliches Kostenmaß	8, 12
-----------------------------	-------

P

Partyfotografenproblem	57
Pfad	12
Piano movers' problem	7
Platzierung	12

R

Rasenmäherproblem	8
Rundtour	17

U

Ueberdeckung	16
--------------------	----

V

Verbindungskanten	40
-------------------------	----