Prof. Dr. Otto Moeschlin et al.

Modul 61612

Wahrscheinlichkeitstheorie

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

1 Konvergenz im p–ten Mittel

In diesem Paragraphen werden zunächst in Abschnitt 1.1 die $\mathcal{L}^p$–**Räume** eingeführt. Diese erweisen sich als vollständige, lineare Räume über $\mathbb{R}$.

In Abschnitt 1.2 werden Bedingungen genannt, unter denen die μ–stochastische Konvergenz die **Konvergenz im p–ten Mittel** nach sich zieht.

Dieser Sachverhalt kann als Verallgemeinerung des Satzes von der majorisierten Konvergenz gesehen werden, der in Abschnitt 1.1 für Folgen p–**fach integrierbarer Funktionen** formuliert wird.

1.1 p–fache Integrierbarkeit

In diesem Abschnitt werden zunächst zwei Ungleichungen bewiesen, nämlich die **Höldersche** *bzw. die* **Minkowskische Ungleichung**. *Die zuerst genannte geht in einem Spezialfall in die CSB–Ungleichung (vgl. WI 6.2.15) über.*
Die Abbildung, die jedem Paar (f, g) reeller meßbarer Funktionen den Wert $E\big[\int |f-g|^p \mathrm{d}\mu\big]^{\frac{1}{p}}$ für ein $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$ zuordnet, erweist sich als Pseudo–Metrik und gibt Anlaß zur Definition einer weiteren Konvergenzart, der **Konvergenz im p–ten Mittel**.
Der Raum der (sogenannten) p–fach integrierbaren reellen Funktionen ausgestattet mit der eben erwähnten Pseudo–Metrik erweist sich als vollständig.
Schließlich wird gezeigt, daß die Konvergenz im p–ten Mittel die μ–stochastische Konvergenz impliziert.

1.1.1 Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$

(a) *Für $f \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ sei*

$$\begin{aligned} N_p(f) &:= \left[\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &=: E\left(|f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

(b) *$f \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ heißt p–***fach integrierbar**, *falls $N_p(f) < \infty$.*

(c) *$\overline{\mathcal{L}}^p(\mu) := \{f \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}) \,|\, N_p(f) < \infty\}$*
bzw.
$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \,|\, N_p(f) < \infty\}$
ist die Gesamtheit der **numerischen** *bzw.* **reellen p–fach integrierbaren Funktionen**.

Falls im folgenden Präzisierungen unterbleiben, so wird jeweils ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. $1 \leq p < \infty$ unterstellt.

1.1.2 Bemerkung

(1) Es genügt in Definition 1.1.1 $f \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ zu fordern, denn mit f gelten auch $|f| \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ und $|f|^p \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ aufgrund von WI 3.3.6 wegen

$$\{|f|^p \geq a\} = \begin{cases} \Omega & \text{für } a \leq 0. \\ \left\{|f| \geq a^{\frac{1}{p}}\right\} & \text{für } a > 0. \end{cases}$$

(2) Offenbar gilt

$$0 \leq N_p(f) \leq \infty\,.$$

(3) Ebenso erhält man als unmittelbare Konsequenz aus der Definition

$$N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) \quad (\alpha \in \mathbb{R})\,.$$

(4) Im Falle $p = 2$ spricht man von den **quadratisch integrierbaren Funktionen**; die **1–fach integrierbaren Funktionen** stimmen mit den **integrierbaren Funktionen** überein.

Der folgende Satz ist für diesen Abschnitt grundlegend.

1.1.3 Satz

Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$.
Dann gilt:

$$N_1(fg) \le N_p(f) N_q(g) \qquad \textit{(Höldersche Ungleichung).} \tag{1}$$

Beweis:
Wir können uns offensichtlich auf den Nachweis von (1) für

$$N_p(f), N_q(g) < \infty$$

beschränken.
Wir unterstellen zunächst den Fall, dass

$$N_p(f) = 0 \quad \text{oder} \quad N_q(g) = 0$$

gilt. Nach WI 4.5.6 ist dann $|f|^p = 0$ μ-f.ü. oder $|g|^p = 0$ μ-f.ü. und wiederum wegen WI 4.5.6 $N_1(fg) = 0$. (Für $N_p(f) = 0$ oder $N_q(g) = 0$ tritt in (1) also die Gleichheit ein.)
Sei dann

$$0 < N_p(f), N_q(g) < \infty\,. \tag{i}$$

Zunächst wollen wir ein Resultat aus der Analysis festhalten, nämlich

$$a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b \quad (a, b, \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1) \tag{ii}$$

(vgl. z.B. O. Forster, Analysis I, Vieweg Bd. 24, 1976, S.114).
Setzt man nun speziell in (ii) für $\omega \in \Omega$ — unter Beachtung von (i) —

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}$$

sowie

$$a = \left(\frac{|f(\omega)|}{N_p(f)}\right)^p, \quad b = \left(\frac{|g(\omega)|}{N_q(g)}\right)^q,$$

so erhält man

$$\frac{|f(\omega) \cdot g(\omega)|}{N_p(f) \cdot N_q(g)} \le \frac{|f(\omega)|^p}{p \cdot (N_p(f))^p} + \frac{|g(\omega)|^q}{q \cdot (N_q(g))^p}\,. \tag{iii}$$

Integration von (iii) nach μ liefert dann schließlich

$$\begin{aligned}\frac{N_1(fg)}{N_p(f)\cdot N_q(g)} &\leq \frac{(N_p(f))^p}{p\cdot(N_p(f))^p}+\frac{(N_q(g))^q}{q\cdot(N_q(g))^q}\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,,\end{aligned}$$

also bei Multiplikation mit $N_p(f)\cdot N_q(g)$ — unter Beachtung von (i) — die Höldersche Ungleichung, d.h. (1). □

Hinweis
Im Falle $p=2$ ist die Höldersche Ungleichung gerade die Ihnen aus WI 6.2.15 bekannte Schwarzsche Ungleichung.

Aus der Hölderschen Ungleichung leitet man nun unmittelbar das folgende Resultat ab:

1.1.4 Korollar

Seien $f\in\overline{\mathcal{L}}^p(\mu), g\in\overline{\mathcal{L}}^q(\mu)$ (bzw. $f\in\mathcal{L}^p(\mu), g\in\mathcal{L}^q(\mu)$). Dann ist $f\cdot g\in\overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ (bzw. $f\cdot g\in\mathcal{L}^1(\mu)$) $(1<p,q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.

Einen Vergleich zwischen der p–fachen Integrierbarkeit von Funktionen und daher auch zwischen $\overline{L}^q$– (bzw. $\overline{L}^p$–) Räumen für unterschiedliche $p\geq 1$ liefert der folgende

1.1.5 Satz

Seien $1\leq p_1\leq p_2<\infty$ und $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum mit endlichem Maß.
Dann ist

$$N_{p_1}(f)\leq N_{p_2}(f)\cdot\mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\qquad\big(f\in\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})\big)\tag{1}$$

und daher

$$\overline{\mathcal{L}}^{p_2}(\mu)\subset\overline{\mathcal{L}}^{p_1}(\mu)\tag{2}$$

bzw.

$$\mathcal{L}^{p_2}(\mu)\subset\mathcal{L}^{p_1}(\mu)\,.\tag{3}$$

Beweis:
Wir weisen nur (1) nach, da (2) und (3) damit offensichtlich sind. Im Fall $p_1=p_2$ ist die Aussage unmittelbar einsichtig. Sei dann $p_2>p_1$. Ersetzt man in der Hölderschen Ungleichung 1.1.3 f durch $|f|^{p_1}$, g durch 1_Ω, p durch $\frac{p_2}{p_1}$ und q durch $\frac{p_2}{p_2-p_1}$ (wobei $|f|^{p_1}\in\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ sowie $\frac{p_2}{p_1},\frac{p_2}{p_2-p_1}>1$ und $\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}}+\frac{1}{\frac{p_2}{p_2-p_1}}=1$ zu beachten ist) ergibt sich

$$N_1\left(|f|^{p_1}\right)\leq N_{\frac{p_2}{p_1}}\left(|f|^{p_1}\right)\cdot N_{\frac{p_2}{p_2-p_1}}(1)\tag{i}$$

und daher nach rechnerischer Umformung von (i)

$$\begin{aligned}(N_{p_1}(f))^{p_1} &\leq (N_{p_2}(f))^{p_1}\,\mu(\Omega)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}\\ &= \left(N_{p_2}(f)\mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\right)^{p_1}\,.\end{aligned}$$

Beachtet man in der obigen Ungleichung die Nichtnegativität der Basen, so liest man daraus die behauptete Ungleichung (1) unmittelbar ab.
(2) und (3) sind unmittelbar klar. □

Mit Hilfe von Satz 1.1.3 beweisen wir nun einen im weiteren noch öfter zitierten Sachverhalt.

1.1.6 Satz

Seien $f, g \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ sowie $1 \leq p < \infty$. Dann gilt, sofern $f + g$ auf ganz Ω definiert ist,

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g) \quad \textit{(Minkowskische Ungleichung).} \tag{1}$$

Beweis:
Wir können uns offenbar auf den Nachweis von (1) für

$$0 < N_p(f), N_p(g) < \infty \tag{i}$$

beschränken. (Für $N_p(f), N_p(g) = 0$ ist z.B. $N_p(f+g) = 0$.)
Wegen

$$|f+g| \leq |f| + |g|$$

und daher auch

$$N_p(f+g) \leq N_p\left(|f| + |g|\right)$$

genügt es, $f, g \geq 0$ vorauszusetzen.
Im Falle $p = 1$ ergibt sich (1) aufgrund von WI 4.4.7(2), wobei in diesem Falle sogar das Gleichheitszeichen gilt. Sei dann $p > 1$. Dazu halten wir zunächst die folgenden Abschätzungen fest

$$\begin{aligned} (f+g)^p &\leq (2\sup(f,g))^p \\ &= 2^p \sup(f^p, g^p) \\ &\leq 2^p(f^p + g^p)\,. \end{aligned} \tag{ii}$$

Integration von (ii) nach μ liefert

$$\begin{aligned} (N_p(f+g))^p &\leq 2^p\left((N_p(f))^p + (N_p(g))^p\right) \\ &\leq 2^p\left(N_p(f) + N_p(g)\right)^p\,. \end{aligned} \tag{iii}$$

Wegen (i) ergibt sich aus (iii) die Gültigkeit von

$$N_p(f+g) \leq \infty\,. \tag{iv}$$

Für einen unmittelbaren Bezug halten wir für $p, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Gültigkeit von

$$\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \qquad pq = p + q \tag{v}$$

fest. Offenbar gilt

$$\int (f+g)^p \mathrm{d}\mu = \int f(f+g)^{p-1}\mathrm{d}\mu + \int g(f+g)^{p-1}\mathrm{d}\mu\,. \tag{vi}$$

Wendet man die Höldersche Ungleichung 1.1.3 auf die im Rechtsterm von (vi) auftretenden Summanden an, so erhält man

$$\begin{aligned}
(N_p(f+g))^p &= \int (f+g)^p \mathrm{d}\mu \\
&\underset{\text{(vi)}}{=} N_1\left(f(f+g)^{p-1}\right) + N_1\left(g(f+g)^{p-1}\right) \\
&\underset{1.1.3}{\leq} N_p(f)N_q\left((f+g)^{p-1}\right) + N_p(g)N_q\left((f+g)^{p-1}\right) \\
&= (N_p(f)+N_p(g))\left(\int (f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\underset{\text{(v)}}{=} (N_p(f)+N_p(g))\left(\int (f+g)^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (N_p(f)+N_p(g))\,(N_p(f+g))^{p-1}\,.
\end{aligned}$$

Wegen (iv) können wir die Ungleichung (vii) durch $(N_p(f+g))^{p-1}$ dividieren und lesen die Minkowskische Ungleichung, d.h. (1) ab. □

Aus dem Bisherigen erhält man:

1.1.7 Satz
Seien $f, g \in \overline{\mathcal{L}}^p(\mu)$ bzw. $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so gilt

(1) $\alpha f \in \overline{\mathcal{L}}^p(\mu)$ *bzw.* $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

(2) $f+g \in \overline{\mathcal{L}}^p(\mu)$, *sofern* $f+g$ *auf ganz* Ω *definiert ist, bzw.* $f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

(3) $\sup(f,g), \inf(f,g) \in \overline{\mathcal{L}}^p(\mu)$ *bzw.* $\sup(f,g), \inf(f,g) \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Beweis:
Nach WI 3.3.8/3.3.10 sind αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $\sup(f,g)$ und $\inf(f,g) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ bzw. $\in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$.
Der Nachweis der p–fachen Integrierbarkeit von (1), (2) und (3) ergibt sich durch die folgenden Abschätzungen:

Ad(1): Für αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ ist wegen 1.1.2(3)

$$N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) < \infty\,.$$

Ad(2): Nach 1.1.6 gilt

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g) < \infty\,.$$

Ad(3): Wegen

$$\left.\begin{array}{r}|\sup(f,g)| \\ |\inf(f,g)|\end{array}\right\} \leq |f| + |g|\,,$$

folgt aus der Monotonie des Integrals (WI 4.4.8)1))

$$\left.\begin{array}{r}N_p\,(\sup(f,g)) \\ N_p\,(\inf(f,g))\end{array}\right\} \leq N_p\,(|f| + |g|) \underset{(2)}{<} \infty\,.$$

□

1.1.8 Bemerkung

$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ $(1 \leq p < \infty)$, wie man sich aufgrund von 1.1.7 durch Überprüfen der Vektorraumeigenschaften klar macht.

Bitte beweisen Sie nun die

1.1.9 Aufgabe

$f \in \overline{\mathcal{L}}^p(\mu)$ bzw. $f \in \mathcal{L}^p(\mu) \iff f^+, f^- \in \overline{\mathcal{L}}^p(\mu)$ bzw. $f^+, f^- \in \mathcal{L}^p(\mu)$. *L*

Die in der folgenden Definition einzuführende Abbildung $d_p : \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ genügt — wie sich herausstellen wird — fast allen Eigenschaften einer Metrik.

1.1.10 Definition

Für $1 \leq p < \infty$ *sei* $d_p : \mathcal{L}^p(\mu) \times \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$d_p(f,g) := N_p(f-g) \quad (f,g \in \mathcal{L}^p(\mu))$$

1.1.11 Bemerkung

Die Abbildung d_p erfüllt auf $\mathcal{L}^p(\mu) \times \mathcal{L}^p(\mu)$ die folgenden Eigenschaften für $f,g,h \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

(1) $0 \leq d_p(f,g) < \infty$.

(2) $d_p(f,g) = 0 \iff f = g$ μ-f.ü.

(3) $d_p(f,g) = d_p(g,f)$.

(4) $d_p(f,h) \leq d_p(f,g) + d_p(g,h)$.

d_p genügt also allen Eigenschaften einer Metrik mit der Ausnahme, dass $d_p(f,g) = 0$ nach (2) nur $f = g$ μ-f.ü. jedoch i.a. **nicht** $f = g$ impliziert. Man spricht deshalb von d_p als von einer Pseudo–Metrik, nämlich der Pseudo–Metrik der Konvergenz im p–ten Mittel.

Zum Nachweis der oben genannten Eigenschaften (1)–(4) überlegt man sich, dass zunächst einmal mit $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ nach 1.1.7(1,2) auch $f - g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ist.

(1) läßt sich dann unmittelbar aus 1.1.1(2) in Verbindung mit 1.1.2(2) herleiten.

(2) ist eine unmittelbare Konsequenz aus WI 4.5.6.

(3) gilt offensichtlich wegen $|f-g| = |g-f|$.

(4) zeigen wir mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichung 1.1.6.
Es ist

$$\begin{aligned} d_p(f,h) &\underset{1.1.10}{=} N_p(f-h) = N_p\left((f-g)+(g-h)\right) \\ &\underset{1.1.6}{\leq} N_p(f-g) + N_p(g-h) \\ &= d_p(f,g) + d_p(g,h)\,. \end{aligned}$$

1.1.12 Festlegung

$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist im folgenden stets mit der Pseudo–Metrik d_p, der **Metrik der Konvergenz im p–ten Mittel**, bzw. der durch d_p induzierten Topologie ausgestattet.

1.1.13 Bemerkung

Man beachte, daß die von d_p induzierte Topologie **nicht** dem Hausdorffschen Trennungsaxiom genügt. (Warum?) $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist also kein separierter Raum (Schubert, S. 44).
Dadurch, daß $\mathcal{L}^p(\mu)$ mit der Pseudo–Metrik d_p ausgestattet ist, ist auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ eine Konvergenz, die Konvergenz im p–ten Mittel, erklärt.

1.1.14 Bemerkung

Eine Folge (f_n) aus $\mathcal{L}^p(\mu)$[2] **konvergiert im p–ten Mittel** gegen $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, falls

$$\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$$

gilt. In Zeichen $f_n \underset{\longrightarrow}{\mathcal{L}^p} f$.
Für $p=1$ spricht man auch von der **Konvergenz im Mittel**,
für $p=2$ von der **Konvergenz im quadratischen Mittel**.

1.1.15 Bemerkung

(1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge aus $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist nur μ-f.ü. eindeutig bestimmt.

[2] Wir bezeichnen im weiteren eine Folge (f_n) mit Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ als Folge (f_n) aus $\mathcal{L}^p(\mu)$.

(2) Die von d_p induzierte Topologie ist kompatibel mit der Vektorraumstruktur von $\mathcal{L}^p(\mu)$: Sind $(f_n), (g_n)$ zwei konvergente Folgen aus $\mathcal{L}^p(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so folgt aufgrund von 1.1.7 und Minkowski (1.1.6), dass (αf_n), $(f_n + g_n)$ ebenfalls konvergente Folgen aus $\mathcal{L}^p(\mu)$ sind.

Unmittelbar aufgrund von 1.1.5 erhält man den folgenden

1.1.16 Satz

Seien $1 \leq p_1 \leq p_2$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und (f_n) eine Folge aus $\mathcal{L}^{p_2}(\mu) \subset \mathcal{L}^{p_1}$ (vgl. 1.1.5). Dann gilt

$$f_n \underset{\longrightarrow}{\mathcal{L}^{p_2}} f \implies f_n \underset{\longrightarrow}{\mathcal{L}^{p_1}} f \,.$$

Mit den selben Überlegungen wie in WI 4.7.4 beweist man den Satz von der majorisierten Konvergenz, wobei jetzt die Konvergenz im p–ten Mittel mit $p \geq 1$ unterstellt wird. Wir verzichten auf einen Beweis des folgenden Satzes.

1.1.17 Satz (von der majorisierten Konvergenz)

Sei (f_n) eine μ-f.ü. konvergente Folge meßbarer reellwertigerFunktionen auf Ω. Existiert eine p–fach integrierbare numerische Funktion $g \geq 0$ auf Ω mit

$$|f_n| \leq g \ \mu\text{-f.ü.} \quad (n \in \mathbb{N}) \,, \tag{1}$$

so sind die Funktionen f_n $(n \in \mathbb{N})$ p–fach integrierbar; es gibt eine Funktion f auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ mit

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \ \mu\text{-f.ü.}$$

und die Folge (f_n) konvergiert im p–ten Mittel gegen f.

Wir führen nun für $\mathcal{L}^p$–Räume den Begriff der Cauchy–Folge ein.

1.1.18 Definition

Sei $1 \leq p < \infty$. Eine Folge (f_n) mit Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt **Cauchy–Folge auf** *$\mathcal{L}^p(\mu)$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$d_p(f_n, f_m) = N_p(f_n - f_m) \leq \varepsilon \quad (m, n \in \mathbb{N},\, n \geq n_\varepsilon) \,.$$

Wie man sich aufgrund der Minkowskischen Ungleichung[3] (1.1.6) überlegt, ist jede konvergente Folge aus $\mathcal{L}^p(\mu)$ eine Cauchy–Folge. Die Umkehrung dieses Sachverhaltes ist ebenfalls richtig, d.h. $\mathcal{L}^p$–Räume sind vollständige Räume, wie der folgende Satz lehrt.

[3] Beachten Sie, dass in WI die Markoff'sche Ungleichung zwar nur für W–Maße formuliert wurde, jedoch auch allgemein gilt.

1.1.19 Satz

Sei (f_n) eine Cauchy–Folge aus $\mathcal{L}^p(\mu)$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ derart, dass (f_n) im p–ten Mittel gegen f konvergiert.

Beweis:
Aus der Definition der Cauchy–Folge ergibt sich unmittelbar die Existenz einer Teilfolge (f_{n_k}) mit

$$N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leq 4^{-k} \quad (k \in \mathbb{N})\,. \tag{i}$$

Wir zeigen zunächst, dass (f_{n_k}) μ-f.ü. konvergiert. Dazu konstruieren wir Mengen

$$A_k := \left\{\omega \,\middle|\, |f_{n_{k+1}}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \geq 2^{-k}\right\} \quad (k \in \mathbb{N})\,.$$

Mit Hilfe der Markoffschen Ungleichung (WI 6.2.12) erhält man bei Beachtung von

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kp} < \infty$$
$$\mu(\overline{\lim}\, A_k) \underset{\text{WI 2.2.19}}{=} 0\,.$$

Für $\omega \notin \overline{\lim}\, A_k$ gibt es ein $k_\omega \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|f_{n_{k+1}}(\omega) - f_{n_k}(\omega)\right| < 2^{-k} \quad (k \geq k_\omega)\,.$$

Daher konvergiert $(f_{n_k}(\omega))$ $(\omega \notin \overline{\lim}\, A_k)$ und für die durch

$$f(\omega) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\omega) & \text{für } \omega \notin \overline{\lim}\, A_k \\ 0 & \text{für } \omega \in \overline{\lim}\, A_k \end{cases}$$

definierte Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt wegen (ii)

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k} \ \mu\text{-f.ü.} \tag{ii}$$

Für gegebenes, beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund der Cauchy–Eigenschaft der Folge (f_n) ein n_ε derart, dass für festes $n \geq n_\varepsilon$

$$(N_p(f_n - f_{n_k}))^p \leq \varepsilon \quad (n_k \geq n_\varepsilon) \tag{iii}$$

gilt. Daher folgt mit Hilfe des Lemmas von Fatou (WI 4.7.3) und unter Berücksichtigung von (iii)

$$\begin{aligned} \varepsilon \ &\underset{\text{(iv)}}{\geq} \ \underline{\lim}_{k\to\infty} (N_p(f_n - f_{n_k}))^p = \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_\Omega |f_n - f_{n_k}|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\underset{\text{WI 4.7.3}}{\geq} \int \underline{\lim}_{k\to\infty} |f_n - f_{n_k}|^p \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{(iii)}}{=} (N_p(f_n - f))^p\,. \end{aligned} \tag{iv}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt worden war, ergibt sich aus (v) $\lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$. Wegen $f = (f - f_n) + f_n$ gilt zudem nach 1.1.7(2) $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. $\square$

Auf $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist durch $f \to \int f \mathrm{d}\mu$ wegen der Linearität des Integrals (WI 4.4.7) eine Linearform erklärt. Diese ist stetig, wie der folgende Satz lehrt.
Ebenso kann man für $\mathcal{L}^p$–Räume mit $p > 1$ eine analoge Eigenschaft formulieren.

1.1.20 Satz

(1) Die Linearform $f \to \int f \mathrm{d}\mu$ ist auf dem Raum $\mathcal{L}^1(\mu)$ (gleichmäßig) stetig.

(2) Für $1 \leq p < \infty$ ist die Funktion $f \to N_p(f)$ auf dem Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ (gleichmäßig) stetig.

Beweis:
Wir beschränken uns auf den Nachweis von (1).
Wegen

$$\Big| \int f \mathrm{d}\mu - \int g \mathrm{d}\mu \Big| \leq \int |f - g| \mathrm{d}\mu = d_1(f, g) \quad \big(f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)\big)$$

ist zu $\varepsilon > 0$ mit $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ ein δ_ε so gefunden, dass $\left| \int f \mathrm{d}\mu - \int g \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon$ gilt, falls $d_1(f, g) < \delta_\varepsilon$ $\big(f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)\big)$ ist. □

Bekanntlich sind in (pseudo–) metrischen Räumen Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent. Dies besagt, daß für eine im Mittel bzw. im p–ten Mittel $(1 \leq p < \infty)$ gegen f konvergente Folge (f_n)

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = N_p(f) \quad (1 \leq p < \infty)$$

gilt.

Zum Zusammenhang mit der μ–stochastischen Konvergenz formulieren wir den

1.1.21 Satz

Seien $1 \leq p < \infty$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Konvergiert die Folge (f_n) aus $\mathcal{L}^p(\mu)$ im p–ten Mittel gegen $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so konvergiert (f_n) auch μ–stochastisch gegen f.

Beweis:
Aufgrund der Markoffschen Ungleichung[4] (WI 6.2.12) gilt für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} \underset{\text{WI2.2.12}}{\leq} \mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} && \text{(i)} \\ &\underset{\text{WI6.2.12}}{\leq} \int |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu \frac{1}{\varepsilon^p} = (N_p(f_n - f))^p \cdot \frac{1}{\varepsilon^p}\,. \end{aligned}$$

[4] vgl. S. 9

Wegen $\lim_{n\to\infty} (N_p(f_n - f))^p \underset{??}{=} 0$ ergibt sich aus (i)

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} = 0 \qquad (\varepsilon > 0)\,,$$

also die μ–stochastische Konvergenz von (f_n) gegen f. $\square$

Die Umkehrung des in Satz 1.1.21 formulierten Sachverhaltes gilt i.a. nicht, wie das nachfolgende Beispiel lehrt.

1.1.22 Beispiel

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P) = \big([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1], \overline{\lambda}\big)$, wobei $\overline{\lambda}$ das BL–Maß auf $[0,1]$ bedeutet, sowie (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n := \mathrm{e}^n 1_{(0,\frac{1}{n}]}$ $(n \in \mathbb{N})$. Offenbar konvergiert f_n auf ganz Ω und damit nach WI 8.1.8 auch dem Maße nach gegen $f \equiv 0$.
Jedoch ist für $p \in [1,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$

$$(N_p(f_n))^p = \int_0^1 |f_n(x)|^p \mathrm{d}\overline{\lambda} = \int_0^{\frac{1}{n}} e^{np} \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{np}\,,$$

also

$$N_p(f_n) = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} e^n$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = \infty\,,$$

was die Konvergenz im p–ten Mittel ausschließt.

Selbstbeurteilung:
Versuchen Sie, den Beweis vom Satz von der majorisierten Konvergenz in Anlehnung an WI 4.4.7 zu führen.